

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE  
*Union - Discipline – Travail*

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Institut National Polytechnique  
Félix HOUPHOUËT-BOIGNY de Yamoussoukro



Ecole Doctorale Polytechnique

N<sup>o</sup> : 093/2021

**Thèse**

Pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY**

**Mention : Mathématiques Appliquées  
Spécialité : EDP et Analyse Numérique**

**Thème :**

**Méthode numérique et asymptotique pour l'étude de  
l'extinction de certaines équations aux dérivées partielles de  
type parabolique avec conditions aux limites non-linéaires**

Présentée et soutenue publiquement par

**N'DRI Kouakou Cyrille Aymar Pacôme**

Le 22 Juillet 2021

**JURY**

<b>M. SORO Yaya</b>	Professeur Titulaire, Institut National Polytechnique F H-B	Président
<b>M. COULIBALY Adama</b>	Maître de Conférences, Université Félix HOUPHOUËT-BOIGNY	Rapporteur
<b>M. MONSIA Marc Delphin</b>	Professeur Titulaire, Université d'Abomey Calavi	Rapporteur
<b>M. ADOU Kablan Jérôme</b>	Professeur Titulaire, Université Félix HOUPHOUËT-BOIGNY	Examineur
<b>M. TOURE Kidjégbo Augustin</b>	Professeur Titulaire, Institut National Polytechnique F H-B	Co-Directeur de thèse
<b>M. YORO Gozo</b>	Maître de Conférences, Université Nangui-Abrogoua	Co-Directeur de thèse

**Méthode numérique et asymptotique pour l'étude de  
l'extinction de certaines équations aux dérivées  
partielles (EDP) de type parabolique avec conditions  
aux limites non-linéaires**

**Thèse**

**Cyrille N'DRI**

Sous la direction de:

Augustin Touré, codirecteur de recherche  
Gozo Yoro, codirecteur de recherche

# Résumé

Dans cette thèse, nous étudions quelques approximations numériques de la solution des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (EDP) de type parabolique, dans lesquelles la non-linéarité apparaît à la fois dans le terme source et dans la condition limite de type Neumann. Après une étude des problèmes originaux, une semi-discrétisation des différents problèmes à l'aide de la méthode des différences finies, nous a permis d'obtenir des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) censés être de bonnes approximations de ces problèmes. Des critères pour l'extinction et l'explosion en temps fini des solutions de ces systèmes ont été établis. La convergence de ces différents temps numériques vers ceux des problèmes continus prouvée, et quelques résultats sur le comportement des solutions proches des temps d'extinction ou d'explosion ont été donnés aussi. Enfin, nous avons effectué des simulations numériques, après avoir transformé dans certains cas nos différents problèmes d'extinction en des problèmes d'explosion à l'aide d'un changement de fonctions inconnues. Ce qui nous a permis d'obtenir un nouveau système d'EDO équivalent au précédant, auquel nous avons appliqué la technique de la transformation de la longueur d'arc, qui comme un changement de variable éliminant les singularités, nous a permis d'obtenir un nouveau système d'EDO plus maniable et de générer une suite linéairement convergente du temps d'explosion qui a été par la suite accélérée par la méthode  $\Delta^2$  d'Aitken.

**Mots clés :** [Équations paraboliques; Équation de réaction-diffusion; Explosion et extinction en temps fini; Vitesse d'explosion et d'extinction; Flux sortant non-linéaire à la frontière; Transformation de la longueur d'arc; Méthode  $\Delta^2$  d'Aitken; Suite linéairement convergente .]

# Abstract

In this thesis we studied some numerical approximations of the solution of systems governed by partial differential equations of the parabolic type, of which the non-linearity appears both in the source term and in the Neumann boundary condition. After studying the original problems, semi-discretization of the different problems using the finite difference method allowed to obtain systems of ordinary differential equations supposed to be good approximations of these problems. Criteria for finite time blow-up and quenching are established, convergence to the continuous one are proved, and some behavior results near the blow-up and quenching time given. Finally, we transformed extinction problems into explosion problems by a change of unknown functions, which permitted to obtain a new ODE's system equivalent to the previous one. Using the arc length transformation technique, we transformed again the new ODE's system into the tractable form by and we generated a linearly convergent sequence to the blow-up time. The sequence is then accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. From which we give some numerical results to illustrate certain points of our work.

**Keywords :** [Parabolic equations; Reaction-diffusion equation; finite time quenching and blow-up; quenching and blow-up rates; Nonlinear boundary outflux; Arc length transformation; Linearly convergent sequence; Aitken  $\Delta^2$  method.]

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des notations et définitions</b>	<b>xi</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Étude numérique de quelques équations paraboliques avec conditions aux limites non-linéaires</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Quelques propriétés du problème continu . . . . .	15
1.3 Étude du problème semi-discret . . . . .	15
1.3.1 Construction du schéma semi-discret . . . . .	15
1.3.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret	17
1.3.3 Convergence de la solution du problème semi-discret . . . . .	18
1.3.4 Quelques propriétés du problème semi-discret . . . . .	22
1.3.5 Explosion et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret . . . . .	25
1.3.6 Estimation de la vitesse d'explosion de la solution du problème semi-discret . . . . .	30
1.4 Résultats numériques . . . . .	32
<b>2 Étude numérique d'une équation parabolique semi-linéaire avec deux sources de singularités de même nature</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Étude du problème continu . . . . .	41
2.2.1 Existence et unicité de la solution du problème continu . . . . .	41

2.2.2	Quelques propriétés de la solution du problème continu . . .	41
2.2.3	Extinction en temps fini sous les conditions 2.7 & 2.6 . . . . .	44
2.2.4	Estimation de la vitesse d'extinction sous les conditions 2.7 & 2.6 . . . . .	47
2.3	Étude du problème semi-discret . . . . .	49
2.3.1	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret	50
2.3.2	Convergence de la solution du problème semi-discret . . . . .	50
2.3.3	Quelques propriétés du problème semi-discret . . . . .	51
2.3.4	Extinction et convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret sous la condition 2.8 . . . . .	54
2.3.5	Estimation de la vitesse d'extinction de la solution du problème semi-discret sous la condition 2.8 . . . . .	57
2.3.6	Extinction et convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret sous la condition 2.9 . . . . .	60
2.3.7	Estimation de la vitesse d'extinction numérique sous la condition 2.9 . . . . .	63
2.4	Résultats numériques . . . . .	64
2.4.1	Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (2.19) vérifie la condition 2.8 . . . . .	65
2.4.2	Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (2.19) vérifie la condition 2.9 . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Étude numérique d'une équation parabolique semi-linéaire avec deux sources de singularités de natures différentes</b>	<b>76</b>
3.1	Introduction . . . . .	76
3.2	Étude du problème continu . . . . .	79
3.2.1	Existence et unicité de la solution du problème continu . . . . .	79
3.2.2	Propriétés qualitatives du problème continu . . . . .	79
3.3	Étude du problème semi-discret . . . . .	80
3.3.1	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret	80
3.3.2	Convergence de la solution du problème semi-discret . . . . .	81
3.3.3	Quelques propriétés du problème semi-discret . . . . .	81
3.3.4	Explosion et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret . . . . .	83
3.3.5	Estimation de la vitesse d'explosion de la solution du problème semi-discret . . . . .	86
3.3.6	Extinction et convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret . . . . .	89
3.3.7	Estimation de la vitesse d'extinction de la solution du problème semi-discret . . . . .	91
3.4	Résultats numériques . . . . .	93
3.4.1	Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (3.9) vérifie la condition 3.11 . . . . .	94
3.4.2	Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (3.9) vérifie la condition 3.16 . . . . .	102

<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>108</b>
<b>Annexes</b>	<b>111</b>
<b>A Principes de comparaison et du maximum</b>	<b>111</b>
A.1 Principe de comparaison . . . . .	111
A.2 Lemme de Hopf et principe du maximum . . . . .	113
<b>B Existence et unicité de la solution de certaines EDO &amp; EDP</b>	<b>115</b>
B.1 Existence et unicité de la solution de certaines EDP paraboliques . .	115
B.2 Existence et unicité de la solution de certaines EDO . . . . .	116
<b>C Algorithmes</b>	<b>118</b>
C.1 Suite linéairement convergente du temps d'explosion . . . . .	118
C.2 Algorithme . . . . .	119
<b>D Articles publiés</b>	<b>121</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>163</b>

# Liste des tableaux

1.1	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 2,1, k = 14$ . . . . .	34
1.2	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 2,5, k = 7$ . . . . .	34
1.3	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 3, k = 6$ . . . . .	34
2.1	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/4, q = 1/4, k = 12$ . . . . .	66
2.2	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/4, q = 1/2, k = 12$ . . . . .	66
2.3	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/2, q = 1/4, k = 12$ . . . . .	67
2.4	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/2, q = 1/2, k = 12$ . . . . .	67
2.5	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/4, q = 1/4, k = 20$ . . . . .	71
2.6	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/4, q = 1/8, k = 20$ . . . . .	72
2.7	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/8, q = 1/4, k = 20$ . . . . .	72
2.8	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/8, q = 1/8, k = 22$ . . . . .	72
3.1	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 1,1, q = 0,9, k = 53$ . . . . .	95
3.2	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 1,5, q = 0,9, k = 53$ . . . . .	95
3.3	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 1,5, q = 0,5, k = 87$ . . . . .	95
3.4	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour $p = 1,5, q = 0,5, k = 70$ . . . . .	96
3.5	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/2, q = 1, k = 7$ . . . . .	103
3.6	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1/2, q = 1/2, k = 7$ . . . . .	104



3.7	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1, q = 1/2, k = 7$ . . . . .	104
3.8	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour $p = 1, q = 1, k = 7$ . . . . .	104

# Liste des figures

1.1	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 2,1$ .	35
1.2	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 2,5$ .	35
1.3	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 3$ .	36
1.4	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 2,1$ .	36
1.5	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 2,5$ .	37
1.6	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 3$ .	37
1.7	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 2,1$ .	37
1.8	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 2,5$ .	38
1.9	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 3$ .	38
2.1	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 1/4, q = 1/4$ .	68
2.2	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 1/4, q = 1/2$ .	68
2.3	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction l'espace, $p = 1/4, q = 1/4$ .	69
2.4	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 1/4, q = 1/2$ .	69
2.5	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 1/4, q = 1/4$ .	70
2.6	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 1/4, q = 1/2$ .	70
2.7	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 1/4, q = 1/8$ .	73
2.8	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 1/8, q = 1/4$ .	73
2.9	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 1/4, q = 1/8$ .	74
2.10	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 1/8, q = 1/4$ .	74
2.11	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 1/4, q = 1/8$ .	75

2.12	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 1/8, q = 1/4$ . . . . .	75
3.1	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $\varphi_i = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,5$ . . . . .	96
3.2	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon), \varepsilon = 6,28, q = 0,5, p = 1,5$ . . . . .	97
3.3	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $\varphi_i = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,1$ . . . . .	97
3.4	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon), \varepsilon = 3,28, q = 0,5, p = 1,5$ . . . . .	98
3.5	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $\varphi_i = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,5$ . . . . .	98
3.6	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon), \varepsilon = 6,28, q = 0,5, p = 1,5$ . . . . .	99
3.7	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $\varphi_i = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,1$ . . . . .	99
3.8	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon), \varepsilon = 3,28, q = 0,5, p = 1,5$ . . . . .	100
3.9	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $\varphi_i = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,5$ . . . . .	100
3.10	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon), \varepsilon = 6,28, q = 0,5, p = 1,5$ . . . . .	101
3.11	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $\varphi_i = \varepsilon^{-\frac{1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,1$ . . . . .	101
3.12	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon), \varepsilon = 3,28, q = 0,5, p = 1,5$ . . . . .	102
3.13	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 1/2, q = 1/2$ . . . . .	105
3.14	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace et du temps, $p = 1, q = 1/2$ . . . . .	105
3.15	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 1/2, q = 1/2$ . . . . .	106
3.16	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction de l'espace, $p = 1, q = 1/2$ . . . . .	106
3.17	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 1/2, q = 1/2$ . . . . .	107
3.18	Évolution de la solution numérique $U_h$ en fonction du temps, $p = 1, q = 1/2$ . . . . .	107

# Liste des notations et définitions

Tout au long de cette thèse, nous utilisons les notations et définitions suivantes :

- $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ , désignera l'espace vectoriel euclidien de dimension  $N$  sur  $\mathbb{R}$ . Un élément  $(x_1, \dots, x_N)$  de  $\mathbb{R}^N$  sera noté  $x$ ;
- $X^T$  désigne la transposée du vecteur  $X \in \mathbb{R}^n$ ;
- $\nabla u(x)$  désigne le gradient de  $u$  en  $x$  : le vecteur  $\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^T$ ;
- $D^\alpha u$  la dérivée d'ordre  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  définie par :  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ , avec  $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$  un multi-indice;
- $\Omega$  désigne un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^N$ .  $\bar{\Omega}$  désigne l'adhérence de  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  sa frontière;
- $\mathcal{C}^0(\Omega)$  : Ensemble des fonctions définies et continues sur  $\Omega$ ;
- $\mathcal{C}^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\Omega)\}$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$  : Ensemble des fonctions infiniment dérivables sur  $\Omega$ ;
- $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  : Espace des fonctions  $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  qui sont prolongeables de manière continues à  $\bar{\Omega}$ , ainsi que tous les  $D^\alpha u$  d'ordre  $|\alpha| \leq k$ ;
- $\mathcal{C}^{0,a}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^a} < \infty \right\}$ ,  $a \in (0,1]$ ;
- $\mathcal{C}^{k,a}(\bar{\Omega})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) désigne l'espace de Hölder défini par :  $\mathcal{C}^{k,a}(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in \mathcal{C}^{0,a}(\bar{\Omega})\}$ ;
- $\mathcal{C}^{m+\alpha}(\Omega)$  : Ensemble des fonctions  $u \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ , telles que  $D^\beta u \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ ,  $|\beta| \leq m$ ;
- $\mathcal{C}^k([0,T], X)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  : Espace des fonctions  $k$ -fois continûment dérivables de  $[0,T]$  à valeurs dans  $X$ ;
- $x_i$  : Abscisse du  $i + 1$ -ième point de la subdivision de l'intervalle  $[0,1]$ ,  $i = 0, \dots, I$ ;

- $h$  : Taille du pas d'espace;
- $\tau = \Delta t_n$  : Taille du pas de temps;
- *EDO* : Équation différentielles ordinaires;
- *EDP* : Équation aux dérivées partielles;
- $u_t$  : Dérivée partielle première de  $u$  par rapport à  $t$ ;
- $u_x$  : Dérivée partielle première de  $u$  par rapport à  $x$ ;
- $\frac{d}{dt}U$  : Dérivée première de  $U$  par rapport à  $t$ ;
- $u_{xx}$  : Dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $x$ ;
- $U_i(\cdot)$  : Approximation semi-discrète de  $u(x_{i,\cdot})$ ,  $i = 0, \dots, I$ ;
- $\delta^2$  : Opérateur discret de dérivation du second ordre en espace;
- $\delta^0$  : Opérateur discret de dérivation centrée du premier ordre en espace;
- $\Delta$  : Opérateur laplacien;
- $T_b$  : Temps d'explosion du problème continu;
- $T_b^h$  : Temps d'explosion du problème semi-discrét en espace;
- $T_q$  : Temps d'extinction du problème continu;
- $T_q^h$  : Temps d'extinction du problème semi-discrét en espace;
- $T_{max}$  : Temps maximal d'existence de la solution  $u$ ;
- $p_h$  : Vitesse d'explosion ou d'extinction numérique.

*À mon père, à ma mère, mes plus  
beaux repères . . .*

La valeur d'un homme tient  
dans sa capacité à donner et  
non dans sa capacité à recevoir.

---

Albert Einstein

# Remerciements

« *La reconnaissance est la mémoire du cœur.* »

**Hans Christian Andersen**

La réalisation de cette thèse a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

J'aimerais tout d'abord remercier mon Co-Directeur de thèse, Monsieur Augustin Kidjegbo TOURÉ, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY, pour sa patience, sa disponibilité et surtout pour m'avoir appris à être "moins bon élève" et plus autonome tout au long de ce travail de recherche. Sa lecture méticuleuse de chacun des chapitres de mon travail m'a sans aucun doute permis d'exprimer mes idées.

De même, je tiens à remercier grandement mon Co-Directeur, Monsieur Gozo YORO, Maître de Conférences à l'Université Nangui-Abrogoua d'Abobo Adjamé, pour toute son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller tout au long cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Yaya SORO, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Monsieur Adama COULIBALY, Maître de Conférences à l'Université Félix HOUPHOUËT-BOIGNY et Monsieur Marc Delphin MONSIA, Professeur Titulaire à l'Université d'Abomey Calavi m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, ils ont consacré de leur temps à la lecture de ce mémoire, à m'écouter et à discuter avec moi. Leurs remarques m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle. Pour tout cela je les remercie.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Kablan Jérôme ADOU, Professeur Titulaire à



l'Université Félix HOUPHOUËT-BOIGNY qui a bien voulu prendre de son temps et accepter de participer à mon jury de thèse en qualité d'examinateur.

Je remercie sincèrement Monsieur KOFFI N'Guessan, Directeur Général de l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY et toute son équipe pour m'avoir accepté dans cet illustre établissement.

Je tiens à remercier profondément Monsieur Benjamin Kouassi YAO, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY, Directeur de l'École Doctorale Polytechnique et toute son équipe pour les moyens tant humains que matériels mis à ma disposition.

J'associe à ces remerciements Monsieur Ouagnina HILL, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY, Directeur de l'UMRI Mathématiques et Nouvelles Technologies de l'Information, pour l'accueil et les conditions de travail privilégiées qui m'ont été offerts. Ce travail est le fruit d'une coopération de plus de trois années avec lui.

Je remercie affectueusement tous les membres de l'UMRI Mathématiques et Nouvelles Technologies de l'Information, " apprentis chercheurs " comme moi qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail et permis d'être dans d'aussi bonnes conditions.

Je remercie particulièrement, Monsieur Mathurin TAHA "c'est pas du jeu", Maître Assistant à l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY, pour sa gentillesse, son appui tant financier que matériel et son amour de " l'Homme ".

Je tiens à remercier spécialement, Monsieur Koffi N'GUESSAN, Maître Assistant à l'Université Allasane Ouattara de Bouaké pour m'avoir prodigué de sages conseils et m'avoir encouragé dans cette voie de la recherche, depuis notre première rencontre à Abidjan et durant tout le déroulement de cette thèse ici à Yamoussoukro.

Un grand merci à ceux que j'appelle "mes compagnons de lutte", mes amis et condisciples depuis le Master 2 à l'Université Nangui-Abrogoua d'Abobo Adjamé, Adou, Bamba, Edja, Ganon, Kanga, ... pour leurs conseils et leurs aides.

Enfin je ne saurais terminer cette partie sans un mot à ceux sans qui cette thèse n'aurait jamais pu être possible, ceux qui ont cru en moi, qui étaient présents à toutes les étapes de ce travail : Papa, maman, sœurs et frères, sans oublier Scheki, Bob et Gorbi, merci pour leur soutien et leur patience.

# Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP). Ces équations apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux problèmes en chimie, en physique, en biologie, en économie ou ailleurs. Sur de nombreux points, elles semblent généraliser au contexte multi-dimensionnel les équations différentielles ordinaires (EDO). La résolution des EDP occupe une place importante dans les recherches effectuées depuis plusieurs décennies, des avancées considérables sont à noter dans ce domaine : il est possible de trouver des solutions explicites à certaines équations, mais elles ne sont pas nombreuses. En effet, beaucoup de problèmes modélisés par des EDP restent toujours ouverts, tels que les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides qui constituent l'un des sept problèmes du millénaire : prix créé en 2000 par la fondation « The Clay Mathematics Institute of Cambridge ». La plupart des recherches effectuées sur les EDP ont porté sur des études plus théoriques qui permettaient de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité par exemple) sans les connaître explicitement, ni même être capable de résoudre analytiquement certaines EDO et EDP classiques.

Dans l'univers infini de toutes les EDP imaginables, seul un petit nombre retient vraiment notre attention, et un nombre restreint de catégories d'EDP et de phénomènes apparaît. L'étude du comportement spécialisé des équations aux dérivées partielles paraboliques non-linéaires est un domaine de recherche très actif depuis plusieurs décennies. Plus récemment, deux types de comportement spécialisés, l'explosion de la solution et l'extinction de la solution, ont été d'un intérêt particulier.

Considérons l'équation de la chaleur suivante

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u, \Delta_x u). \quad (1)$$

Dans l'équation (1), la variable  $u$  peut être considérée comme la température dans une réaction chimique, la fonction positive  $f$  qui est non-linéaire représente une source de chaleur (le terme source) qui peut être à la fois dans l'équation princi-

pale et à la frontière, et la dérivée de second ordre représente la diffusion. Ce genre d'équation est appelée équation de réaction-diffusion. Dans le cas où le terme source est à la frontière, nous avons le système suivant

$$u_t - \Delta u = 0, \quad \text{dans } \Omega_T \times (0, T), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f, \quad \text{dans } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (4)$$

où  $n$  est le vecteur normal unitaire extérieur.

Dans les équations (1) et (2)-(4), il peut arriver que  $f \rightarrow \infty$  quand  $u \rightarrow \infty$ , par exemple pour  $f(u) = u^p$ ,  $p > 1$  ou  $f(u) = \exp(u)$ , etc ... Ces problèmes sont beaucoup utilisés dans la théorie de la combustion, dans la génétique des populations ou encore dans la dynamique des populations ... Leur intérêt principal est la possibilité qu'il existe des solutions qui peuvent tendre vers l'infini en temps fini. un phénomène connu sous le nom d'explosion.

L'explosion se produit sous une forme élémentaire dans la théorie des équations différentielles ordinaires. Leur étude fournit des outils et des intuitions de base pour toute la théorie de l'explosion et plus généralement, l'étude des singularités. Comme exemple, considérons le problème aux valeurs initiales pour une fonction scalaire  $u = u(t)$  suivant :

$$u_t = u^2, \quad t > 0, \quad u(0) = a. \quad (5)$$

Pour  $a > 0$ , il est évident qu'une solution de (5) existe et est unique dans un intervalle  $0 < t < T$  avec  $T = \frac{1}{a}$ . Comme donnée par la formule  $u(t) = \frac{1}{T-t}$ , on voit que  $u$  est assez régulière pour  $t < T$  et aussi que  $u(t) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow T^-$ . On dit alors que la solution  $u(t)$  explose à  $t = T$ . De ce fait, le concept d'explosion sera généralisé comme étant le phénomène par lequel les solutions cessent d'exister globalement dans le temps en raison de la croissance infinie des variables décrivant le processus d'évolution. De manière générale, on peut réécrire l'équation (5) comme suit :

$$u_t = f(u),$$

où  $f$  est positive et continue telle que

$$\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty.$$

Cette condition, dite d'Osgood, est nécessaire et suffisante pour l'apparition de l'explosion en temps fini pour toute solution dont les données initiales sont positives

( [54; 75; 89] ). En plus des EDO, le phénomène d'explosion se produit dans divers types d'équations d'évolution non-linéaires. Par exemple, il se produit dans les équations de Schrödinger, les équations hyperboliques ( [40; 21] ), ainsi que dans les équations paraboliques.

Dans l'équation (1), que se passera-t-il, dans une situation où une température plus élevée accélérera la réaction chimique, et que cette dernière générera de la chaleur? À moins que l'énergie thermique ne se dissipe par diffusion, la température deviendra probablement très élevée. Par ailleurs, même sous sa forme la plus simple, où la source de chaleur  $f$  ne dépend que de la variable  $u$  et est positive, il existe une concurrence entre la diffusion et la source de chaleur. Toutefois il n'est pas clair que la température deviendra illimitée en un temps fini. Ce qui peut être physiquement interprété comme une augmentation spectaculaire de la température qui conduit à l'inflammation. Certaines questions se posent alors :

- L'explosion se produira-t-elle en temps fini?
- Si l'explosion se produit en temps fini, où sont localisés les points d'explosion? L'explosion peut-elle se produire dans une région?
- Quel est le comportement asymptotique de la solution proche du temps d'explosion?

Depuis les travaux pionniers de Fujita ( [38] ) et Kaplan ( [56] ), bon nombre ont essayé de répondre à ces questions. On peut citer entre autres résultats, les travaux de Payne ( [79] ), Bebernes et Eberly ( [13] ), Samarski et al ( [84] ), Fila et Filo ( [32] ), Bandle et Brunner ( [12] ), Galaktionov ( [39] ) et Quittner et Souplet ( [80] ) qui peuvent être utiles pour obtenir un aperçu des efforts déployés d'un point de vue analytique dans l'étude de l'explosion.

Il existe un autre type de comportement d'explosion qui affecte la solution des problèmes paraboliques non-linéaires. Au lieu de la solution, c'est la dérivée  $u_t$  par rapport à la variable  $t$  qui devient non bornée (explose) en temps fini. Ce type de phénomène est appelé "quenching" ou dans un cas particulier "extinction". Pour ce type de comportement, nous avons le terme de réaction qui satisfait  $f \rightarrow \infty$  quand  $u \rightarrow \lambda$  pour une constante positive  $\lambda$ , par exemple  $f(u) = \frac{1}{u}$  ou  $f(u) = \frac{1}{1-u}$ . Le processus d'évolution le plus simple sur lequel les problèmes d'extinction sont modélisés peut être donné par l'EDO suivante ( [41] ) :

$$u_t = -f(u), \quad f(u) = u^p,$$

où  $u > 0$  est l'inconnue, et  $u_0 = a > 0$  la condition initiale à lui imposer. On remarque que pour  $p \geq 1$  on obtient une courbe  $t \mapsto u(t)$ , laquelle est définie et à valeur positive pour tout  $t > 0$ , alors que pour  $p < 1$  l'évolution est décrite par la règle  $u(t) = [a^{1-p} - (1-p)t]^{\frac{1}{1-p}}$ , qui tient jusqu'à un instant  $T = \frac{a^{1-p}}{1-p}$ , moment où la solution disparaît. On constate que pour  $p < 0$ , la dérivée  $u_t$  explose quand  $t \rightarrow T^-$  et la singularité au point d'extinction est inévitable.

Le terme "quenching" trouve son origine dans l'étude des transitoires de courant électrique dans les conducteurs ioniques polarisés ([57; 92]), et dans la théorie de la super-conductivité ([43]). C'est en 1975 que Kawarada ([57]) introduit le premier, le concept de quenching, qui a un sens plus général que celui de l'explosion. Pour cela, il a considéré le problème aux limites suivant

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, l), \quad (6)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (8)$$

où  $0 < T \leq \infty$  et  $l$  est une constante positive. Il a montré que si  $u$  existe pour tout  $0 < t < (T = \infty)$ , nous avons le cas de l'existence globale. Si, au contraire,  $T < \infty$ ,  $l \geq 2\sqrt{2}$ , la solution  $u$  de (6)-(8) vérifie les deux conditions suivantes :

1.  $\sup_{0 \leq x \leq l} u$  tend vers 1, quand  $t \rightarrow T^-$  ;
2. la dérivée  $u_t$  devient non bornée.

Alors, la solution  $u$  ne peut plus prendre d'autres valeurs que celle obtenue au temps  $t = T$ , c'est-à-dire la solution s'éteint. Le temps  $T$  où un tel effet se produit est appelé le temps d'extinction, et le(s) point(s) où il se produit est(sont) appelé(s) point(s) d'extinction. Naturellement, la raison d'un tel comportement est le fait que le terme non-linéaire en (6) devienne singulier pour  $u = 1$ . Malheureusement, ces méthodes ne semblent pas s'étendre facilement à des cas plus généraux. C'est pourquoi une définition plus faible a été donnée dans ([4; 63]), où les auteurs affirment que la solution  $u$  s'éteint uniquement si la première condition de la définition susmentionnée est vérifiée. Ce qui a permis plus tard, la généralisation des résultats de Kawarada par certains auteurs ([5; 4; 91]).

L'extinction est généralement causée par une singularité, soit dans l'équation elle-même ([5; 4]), soit à la frontière, lorsque la solution atteint une certaine valeur critique ([60; 62]). Pour quelques résultats remarquables sur le phénomène d'extinction se référer à ([4; 15; 22; 45; 46; 60; 61; 63; 65; 78; 84; 16; 39]). Dans ([15]), Chan

et Kwong remarquent que la preuve de Kawarada est incomplète en son deuxième point (concernant l'explosion de la dérivée par rapport à la variable  $t$ ). Ils proposent alors une nouvelle preuve, en utilisant des arguments élémentaires, pour une classe de non-linéarité plus générale, qui inclut celle de la forme  $(1 - u)^{-\beta}$  pour  $\beta \geq 1$ . En outre, Guo ([45]) a montré que si  $\beta \geq 3$ , alors le comportement de la solution  $u$  au point d'extinction est asymptotiquement le même que la solution d'un problème aux valeurs initiales de la forme  $y' = (1 - y)^{-\beta}$ ,  $y(0) = 0$  dans  $(0, T)$ . Résultats qu'il a étendu à une solution dans une boule de  $\mathbb{R}^n$  centrée en zéro ([46]). Par ailleurs, en 1981, Chang et Levine ([16]) ont étendu le concept d'extinction parabolique à un premier problème aux valeurs initiales, pour une équation d'onde semi-linéaire (une EDP de type hyperbolique). Il est à noter que très peu de résultats ont été obtenus sur l'extinction des solutions des équations hyperboliques. Cela est dû à la différence (sur le principe du maximum) entre les équations paraboliques et celles hyperboliques. Un peu plus tard, Levine ([60]) a montré que l'extinction peut aussi survenir en fonction des conditions aux limites pour des problèmes paraboliques linéaires.

Comme pour le phénomène d'explosion, si l'on considère le problème d'extinction, il y a principalement trois questions : Quand, comment, et où se produit le phénomène d'extinction? Il s'avère qu'à bien des égards, le phénomène d'extinction ressemble à une situation d'explosion. Cependant, en raison de la non-linéarité différente, le phénomène d'extinction est beaucoup plus compliqué et plus difficile à étudier ([39; 93]).

En somme, lorsqu'on parle d'explosion, on fait très souvent référence à l'apparition d'une singularité qui se développe simultanément pour la solution, ou ses dérivées. La notion d'explosion sera utilisée ici dans le sens où la solution elle-même devient illimitée en un temps fini. Alors que l'extinction, quant à elle, sera utilisée dans le sens où la solution reste bornée en temps fini sans que sa dérivée par rapport à la variable  $t$  ne devienne nécessairement non bornée en ce temps.

Nous sommes d'avis que le niveau de compréhension des processus physiques, des phénomènes et même des propriétés des solutions d'un problème évolutif abstrait, atteint grâce à des expériences numériques, ne peut être égalé par une analyse purement théorique. De ce fait, les problèmes d'évolution non-linéaires qui admettent des solutions non limitées ne peuvent être résolus globalement (dans le temps) : les solutions se développant sans limite dans des intervalles de temps finis.

Bien qu'ils existent de nombreuses méthodes mathématiques utilisées pour établir l'explosion et l'extinction des solutions des problèmes d'évolution, nous mettrons

l'accent sur les méthodes et techniques numériques d'étude de ces phénomènes dans ce mémoire.

L'étude numérique des problèmes d'explosion et d'extinction peut être vue sous deux angles.

- (I) Si l'on sait déjà que la solution de certaines EDP d'évolution explose ou s'éteint en un temps fini, comment calculer la solution proche des temps d'extinction ou d'explosion et comment calculer une valeur approximative de ces différents temps? Chaque question présente un intérêt particulier, puisque la solution perd de sa fluidité en ces temps. Plus souvent, nous n'avons aucune information sur ces temps à partir des résultats d'analyse, à part leurs existences ou parfois une limite inférieure ou supérieure. Par ailleurs, de telles études peuvent nous permettre de comprendre le comportement de la solution avant qu'elle n'atteigne le moment de l'extinction ou de l'explosion de manière plus précise.
- (II) Dans le cas où nous n'avons aucune information sur l'extinction (éventuellement l'explosion) ou pas de la solution, il est naturel de se demander : Pouvons nous à partir des résultats des calculs savoir si oui ou non il y-a extinction (éventuellement explosion) de la solution?

On constate qu'il est très difficile de simuler numériquement les phénomènes d'explosion ou d'extinction avec précision. D'une part, il faut composer avec des données numériques qui augmentent indéfiniment à l'approche du temps d'explosion, ce qui n'est pas aisé. D'autre part, et plus important encore, il n'est pas du tout clair que les caractéristiques d'un phénomène aussi primitif que celui de l'explosion, puissent être bien reflétées dans les équations discrétisées sensées être une approximation de l'équation d'origine. En effet, la plupart des estimations d'erreur standard deviennent inutiles lorsqu'on se rapproche du temps d'explosion.

Par ailleurs, certaines méthodes et techniques numériques ont été conçues afin de saisir numériquement certaines caractéristiques du phénomène d'explosion. C'est le cas de Nakagawa ( [72] ) qui a considéré un schéma numérique en différence finie, avec un maillage uniforme pour l'espace et un autre adaptatif pour le temps. Pour ce faire, il a étudié l'équation (1) pour le cas où  $f(u) = u^2$  et proposé le schéma avec un incrément temporel adaptatif suivant :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t_n} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + (U_j^n)^2,$$

où  $\Delta x$  est le pas de discrétisation de l'espace, et les  $x_j$  représentent les points de discrétisation de l'espace. Le pas du temps est défini de manière adaptative par

$$\Delta t_n = \tau \cdot \min \left\{ 1, \frac{1}{\|U^n\|_2} \right\},$$

où  $t_n = t_{n-1} + \Delta t_{n-1}$  et  $t_0 = 0$ , est la discrétisation temporelle. Le paramètre  $\tau$  est donné tel que  $\tau = \lambda(\Delta x)^2$  avec  $\lambda \leq 1/2$ . Il montre que la solution numérique converge vers la solution réelle et que le temps d'explosion numérique calculé comme suit

$$T(\tau, \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta t_n \quad (9)$$

est fini et converge vers le temps d'explosion réel. Ce qui semble être le premier algorithme capable de calculer numériquement le temps d'explosion. Ces résultats ont été étendus à  $f(u) = u^p$  pour  $p > 1$  en 1987 par Chen ([17]). Un peu plus tard, Nakagawa et Ushijima ([73]) ont établi un analogue en éléments finis des travaux précédant de Nakagawa.

Récemment, Abia et al. ([2]) ont considéré le même problème que Nakagawa. Ils ont obtenu un problème semi-discret défini par un système d'équations différentielles ordinaires, grâce à une discrétisation de l'espace par la méthode des différences finies. Ils ont par la suite, montré l'explosion de la solution en un temps fini pour la norme  $L^\infty$  et prouvé la convergence de ce temps d'explosion numérique. Ce qui est une généralisation des résultats de Nakagawa sur la convergence du temps d'explosion. Cependant, cette méthode proposée par Nakagawa ([72]) et vulgarisée par Abia et al. ([1; 2]), Boni et al. ([68]), Touré et al. ([87; 69; 70; 71]), peut ne pas fonctionner correctement lors du calcul d'un temps d'explosion numérique comme défini par (9) à cause de la somme infinie. Ce qui oblige parfois à déterminer quand arrêter les calculs de manière aléatoire. C'est ainsi que, Cho et al. ([19; 18]), ont introduit une méthode de calcul du temps d'explosion numérique différente de celle proposée par Nakagawa. Ils ont considéré un schéma avec un pas de temps uniforme ( $\Delta t_n = \tau$ ). Pour un  $\tau$  donné, l'algorithme proposé arrête le calcul à une certaine étape  $n_\tau$  quand la solution numérique atteint une certaine largesse et définit,  $T(\tau) = \tau n_\tau$ , comme étant le temps d'explosion numérique. Ils ont aussi montré que ce temps d'explosion numérique calculé,  $T(\tau)$ , converge vers le temps d'explosion réel. C'est dans la même optique que Hirota et Ozawa ([49]) ont proposé une méthode numérique, différente de celles proposées par Nakagawa et Cho respectivement, pour estimer le temps d'explosion et la vitesse d'explosion de la solution



d'une EDO quand la solution diverge en un temps fini. L'idée de cette méthode est de transformer l'EDO considérée en une forme plus maniable à l'aide de la technique de transformation de la longueur d'arc ([67; 55]). Ce qui leur a permis de générer une suite linéairement convergente qui sera par la suite accélérée par l'algorithme  $\Delta^2$  d'Aitken ([10]).

Ushijima ([88]) quant à lui, a discuté de l'approximation du phénomène d'explosion dans les équations paraboliques non-linéaires de manière générale en établissant des conditions suffisantes garantissant la convergence des temps d'explosion. Pour ce faire, il a considéré le problème à la valeur initiale pour l'EDP parabolique non-linéaire suivante

$$\begin{cases} u_t = F(t, x, u, \nabla u, \Delta u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ Bu(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (10)$$

où  $B$  représente la condition à la limite. Tout en supposant que le problème (10) possède une unique solution locale  $u(., t)$  dans un espace de fonction  $X$  et que cette solution explose en un temps fini  $T$ , il a, à l'aide d'une semi-discrétisation en espace obtenu le système d'équations suivant

$$\begin{cases} u_t^h = F_h(t, x_h, u^h, \nabla_h u^h, \Delta_h u^h), & x_h \in \Omega_h, t > 0, \\ u^h(x_h, 0) = u_0^h(x_h), & x \in \Omega_h, \\ B_h u^h(x_h, t) = 0, & x \in \partial\Omega_h, t > 0, \end{cases}$$

dans lequel le paramètre  $h$ , le pas de maillage de l'espace, indique la précision de l'approximation, laquelle devient meilleure quand  $h$  tend vers 0. Ce qui lui a permis par la suite d'établir quatre conditions suffisantes d'explosion et de convergence du temps d'explosion du problème ci-dessus vers celui du problème général (10). L'extinction étant une forme d'explosion, l'auteur a par ailleurs étendu ces résultats au problème d'extinction.

Notre travail de recherche porte sur l'étude numérique de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires, qui se fera après adaptation de quelques résultats existants à l'aperçu de l'étude théorique. Comme exemples remarquables de travaux sur l'étude numérique des EDP paraboliques on peut citer entre autres Touré et al. ([42; 29; 8; 9]), Abia et al. ([2; 1; 3]). Ce travail sera essentiellement basé sur l'étude de l'extinction des problèmes paraboliques présentant deux sources

de singularités qu'elles soient de même nature ou de natures différentes. L'extinction étant une forme d'explosion, notre premier chapitre sera consacré à l'étude d'un problème d'explosion auquel nous appliquerons les différentes méthodes et techniques que nous utiliserons dans notre travail. Ces méthodes étant à l'origine développées pour des problèmes d'explosion, elles seront dans le cas échéant adaptées aux problèmes d'extinction.

Dans cette thèse, nous considérons de manière générale le problème aux limites et aux valeurs initiales suivant

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad \text{dans } \Omega_T \equiv \Omega \times (0, T), \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(u) \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (13)$$

où  $n$  est le vecteur normal unitaire,  $\Omega$  un domaine borné.

Tout d'abord au chapitre 1, nous nous intéressons à l'équation (11)-(13) en dimension 1 après avoir posé  $f(u) = 0$  et  $g(u) = u^p$ . Ce qui nous ramène au problème de conduction de chaleur dans des matériaux (avec des sources de chaleur non-linéaires prescrites à la frontière de ce matériau) suivant :

$$u_t = \Delta u \quad \text{dans } \Omega_T \equiv (0, 1) \times (0, T), \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(u) \quad \text{sur } \{0, 1\} \times (0, T), \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (16)$$

Des résultats d'existence et d'unicité de ce genre de problème peuvent être trouvés dans la littérature. L'étude théorique de ce genre de problème ayant été largement faite, nous passerons directement à l'étude numérique après un bref rappel de quelques propriétés qualitatives. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du schéma numérique construit à l'aide de la méthode des différences finies dont le principe consiste à : écrire l'équation aux dérivées partielles (14) aux points de discrétisation  $x_i$ , puis à approcher l'opérateur différentielle ( $\Delta u$ ) par un quotient différentiel, de sorte à en déduire un système d'équations en fonctions d'inconnues discrètes sensées représenter des approximations de  $u$  aux points de discrétisation. Nous donnerons un résultat d'existence et d'unicité de notre schéma numérique et quelques propriétés qualitatives de ce schéma par la suite. Des études antérieures du problème (14)-(16), nous savons que sa solution positive explose en temps fini pour  $p > 1$ . Dans la partie 3, nous montrons l'explosion de la solution de

notre schéma numérique en un temps fini sous certaines conditions et prouvons par la suite la convergence de ce temps d'explosion numérique vers celui du problème continu en utilisant l'une des conditions élaborée par Ushijima ( Théorème 1.3, [88] ). Dans la quatrième partie, sous des hypothèses semblables à celles de l'explosion, on donne une estimation de la vitesse d'explosion de notre schéma numérique différente de celle du problème continu. Nous terminons ce chapitre par des résultats numériques en appliquant la technique de la transformation de la longueur d'arc à notre système d'EDO (schéma numérique) obtenu lors de la semi-discrétisation. Laquelle transformation, qui comme un changement de variable éliminant les singularités, transformera notre EDO en une forme plus maniable ( [67; 55] ). Nous appliquerons par la suite au résultat de cette transformation les algorithmes proposés par Hirota et Ozawa ( [49] ) pour estimer les temps et vitesse d'explosion numérique. L'intégration de l'EDO se fera à l'aide du DOP54 ( [48] ) qui est un code écrit par Hairer et Warner, basé sur la méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 de Dormund et Prince ( [27] ).

Le second chapitre de notre thèse quant à lui sera consacré à l'étude numérique de l'extinction d'un problème parabolique semi-linéaire avec deux sources de singularités de même nature (deux sources d'extinction), à savoir une source de singularité dans le terme source et une autre dans des conditions aux limites de type Neumann. Considérons l'équation (14)-(16) pour  $f(u) = h(x)(1 - u)^{-p}$  et  $g(u) = u^{-q}$  suivante

$$u_t = \Delta u + f(x)(1 - u)^{-p} \quad \text{dans } \Omega_T \equiv (0,1) \times (0,T), \quad (17)$$

$$u_x(0,t) = u^{-q}(0,t) \quad t \in (0,T), \quad (18)$$

$$u_x(1,t) = 0 \quad t \in (0,T), \quad (19)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1]. \quad (20)$$

Ce problème représente un modèle de conduction de la chaleur intégrant des effets d'une réaction non-linéaire et d'un flux sortant non-linéaire. L'étude théorique de ce genre de problème étant partiellement réalisée, nous commençons ce chapitre par une étude théorique indispensable avant tout. Des résultats d'existence et d'unicité pouvant être trouvés dans la littérature existante, nous nous contentons de les énumérer. Dans la troisième partie de ce chapitre, nous nous adonnons à l'étude de l'extinction de la solution du problème (17)-(20). Nous prouvons sous certaines conditions, que la solution de notre problème s'éteint en un temps fini, pour la singularité dans le terme source uniquement. Ce qui est primordial, car on ne peut

juger lequel des deux termes deviendra singulier en premier, ou quel sera le comportement de la solution, si les deux termes deviennent singuliers simultanément. L'extinction pour la deuxième singularité étant déjà prouvée pour des conditions différentes ([95; 94]). Par la suite, nous donnons quelques résultats sur le comportement asymptotique de la solution proche de l'extinction. L'étude numérique étant le but principal de ce travail, les quatrième, cinquième et sixième parties de ce chapitre y seront pleinement consacrées. Après avoir construit notre schéma numérique de la même manière que dans le premier chapitre de cette thèse, nous énonçons d'abord un résultat d'existence et d'unicité des solutions de ce schéma numérique. Quelques propriétés y seront aussi données. Nous prouvons par la suite sous des conditions différentes mais similaires à celles de l'étude théorique, l'extinction des solutions de notre schéma numérique en un temps fini pour chacune des deux singularités, à savoir : l'extinction pour la singularité dans le terme source et l'extinction pour celle se trouvant dans les conditions aux limites de type Neumann. Enfin, nous donnons quelques résultats sur le comportement asymptotique des solutions de notre schéma numérique proche des différents temps d'extinction numérique, comportement similaire à celui du continu pour l'un et différent du continu pour l'autre. Nous terminons, ce chapitre par des résultats numériques en utilisant la méthode détaillée dans le précédent chapitre. Cette méthode étant mise en place pour des problèmes d'explosion, nous procédons à un changement de fonction inconnue dans le but de transformer notre problème d'extinction en un problème d'explosion. L'équivalence, entre les problèmes d'extinction et d'explosion étant connue ([83; 77; 33; 25; 53; 39] et les références qui y sont citées).

Le chapitre 3 de cette thèse concerne l'étude numérique du problème parabolique suivant

$$u_t = u_{xx} + u^p \quad \text{dans } \Omega_T \equiv (0,1) \times (0,T), \quad (21)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad (22)$$

$$u_x(1,t) = -u^{-q}(1,t), \quad t \in (0,T), \quad (23)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \quad (24)$$

dans lequel les fonctions  $f(u)$  et  $g(u)$  du problème (11)-(24) ont été respectivement remplacées par  $u^p$  et  $-u^{-q}$ . Dans ce problème nous avons deux sources de singularités de natures différentes, à savoir une source d'explosion à l'intérieur du domaine, et une autre source mais cette fois ci d'extinction dans les conditions aux limites de type Neumann. Nous commençons ce chapitre par donner un résultat d'existence

et d'unicité des solutions de notre problème continu et quelques propriétés qualitatives. La troisième partie de ce chapitre quant à elle sera consacrer à la mise en place de notre schéma numérique comme précédemment, puis à l'élaboration d'un résultat d'existence et d'unicité et quelques propriétés des solutions de ce schéma numérique. D'après les résultats de Deng et Zhao ( [25] ), la solution positive de (21)-(24) explose en temps fini pour  $p > 1$  et  $0 < q < 1$ , tandis qu'elle s'éteint en un autre temps fini pour  $p > 0$  et  $q > 0$ . Dans les parties 4 et 5, nous montrons que la solution de notre problème semi-discret s'éteint et explose en un temps fini sous les mêmes hypothèses que ceux de l'étude continue . Comme dans les travaux précédents, des résultats sur le comportement asymptotique de la solution proche des temps d'explosion et d'extinction numérique respectifs y sont donnés. Nous terminons ce chapitre par des résultats numériques en utilisant les mêmes techniques et méthodes que celles énoncées plus haut.

Finalemnt, en annexe nous rappelons quelques notions telles que les Théorèmes de comparaison et principe du maximum que nous utiliserons tout au long de notre thèse. Les annexes contiennent aussi les Théorèmes d'existence et d'unicité des problèmes des chapitres 2 et 3, et les algorithmes utilisés pour réaliser les différentes simulations.

La thèse se compose de cet aperçu et des articles suivants :

**Article 1 :** C. K. N'dri, K. A. Touré, G. Yoro, Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions, *Int. J. Numer. Methods Appl.*, 17(3-4) : 141-160, 2018.

**Article 2 :** K. C. N'dri, K. A. Touré, G. Yoro, Numerical quenching versus blow-up for a nonlinear parabolic equation with nonlinear boundary outflux, *Adv. Math., Sci. J.*, 9(1) : 151-171, 2020.

# Chapitre 1

## Étude numérique de quelques équations paraboliques avec conditions aux limites non-linéaires

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème parabolique suivant avec un flux non-linéaire aux limites :

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u^p, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (1.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.3)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine régulier, borné dans  $\mathbb{R}^N$ , avec pour frontière  $\partial\Omega$ ,  $n$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega$ ,  $p > 1$ , et  $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  est strictement positive et vérifie la condition de compatibilité  $\frac{\partial u_0}{\partial n} = u_0^p$ . Physiquement, le problème (1.1)-(1.3) peut être considéré comme un problème de conduction de chaleur avec une loi de rayonnement non-linéaire prescrite à la frontière du corps matériel. Ce genre de problème a été longuement analysé d'un point de vue mathématique dans plusieurs articles ([32; 34; 44; 52; 53; 82; 90]). En particulier, il est bien connu que si  $p > 1$ , chaque solution positive devient non bornée en un temps fini ([31; 44; 52; 82; 90; 64]). De plus, si on remplace  $u^p$  par une fonction non-linéaire  $f(u)$ , une condition nécessaire et suffisante (à savoir  $f$  satisfait  $\int \frac{1}{f} < \infty$ ) a été trouvée dans ([44; 82; 90]) pour que les solutions positives du problème (1.1)-(1.3) explosent en un temps fini.

Des résultats sur l'existence locale et le caractère unique de la solution du problème (1.1)-(1.3) ont été déjà établis ([44; 90]).

Dans ce travail, nous nous limitons au cas unidimensionnel. Ce qui conduit au problème suivant :

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \quad (1.4)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$u_x(1,t) = u^p(1,t), \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \quad (1.7)$$

où  $p > 1$ . Dans notre problème, le terme de réaction à la limite est de type puissance, et si  $p > 1$ , ce phénomène d'explosion se produit dans le sens où il existe un temps fini  $T_b$  tel que  $\lim_{t \rightarrow T_b^-} u(1,t) = +\infty$  ([53; 82]). L'ensemble d'explosion (l'ensemble des points  $x \in [0,1]$ , où la solution  $u$  devient non bornée)  $\mathcal{B}(u)$ , est localisé à la frontière par un unique point d'explosion, c'est-à-dire,  $\mathcal{B}(u) = \{1\}$  ([53; 82]).

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'approximation numérique de (1.4)-(1.7). Quelques résultats concernant l'approximation numérique des problèmes d'explosion peuvent être trouvés dans la littérature ([1; 2; 6; 7; 28; 30; 87; 88; 42; 8; 29; 87]). Duran et al. ([28]) ont analysé une semi-discrétisation du problème (1.4)-(1.7). Ils ont considéré, dans le cas unidimensionnel, un schéma par éléments finis avec un maillage uniforme pour l'espace. Une condition suffisante et nécessaire d'explosion a été trouvée. Les auteurs ont aussi prouvé la convergence du temps d'explosion du problème semi-discret vers le temps continu quand le pas de discrétisation tend vers zéro. Plus tard, une analogie pour le cas multi-dimensionnel a été considérée par Acosta et al. ([6]).

Nous considérons ici une semi-discrétisation du problème (1.4)-(1.7) à l'aide de la méthode des différences finies avec un pas de maillage uniforme de l'espace (il est bien connu que cette discrétisation de l'espace coïncide avec le schéma de second ordre obtenu par éléments finis). Dans la suite, nous prouvons sous certaines conditions, que la solution du schéma semi-discret obtenu explose en un temps fini avec une vitesse d'explosion différente (plus grande) de celle de la solution du problème continu. Nous montrons aussi, la convergence de ce temps d'explosion semi-discret vers celui de la solution du problème continu, quand le pas de discrétisation tend vers zéro.

Notre travail est organisé de la manière suivante : Dans la section suivante, nous donnons quelques propriétés du problème continu. Dans la section 3, nous nous

adonnons à une étude de notre schéma semi-discret après l'avoir mis en place. Nous prouvons en premier que notre problème semi-discret est bien posé et donnons quelques propriétés. Par la suite, sous certaines conditions, nous prouvons que la solution de cette forme semi-discrète explose en un temps fini et étudions la convergence du temps d'explosion semi-discret vers celui du continu. Une étude du comportement asymptotique de la solution de notre problème semi-discret (une estimation de la vitesse d'explosion numérique) sera faite pour terminer cette section. Finalement, dans la dernière section, nous donnons quelques expériences numériques.

## 1.2 Quelques propriétés du problème continu

L'objectif dans cette section est d'établir quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu. Les résultats suivants ont été prouvés par Hu ([51]) et Gómez et al. ([44]).

**Lemme 1.1.** *Soit  $T > 0$ , soient  $v$  et  $w$  deux fonctions de  $\mathcal{C}([0,1] \times [0,T]) \cap \mathcal{C}^{2,1}((0,1) \times (0,T))$ , telles que*

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &\leq w_t - w_{xx}, & \text{dans } [0,1] \times (0,T), \\ v_x - v^p &\leq w_x - w^p, & \text{sur } \{0,1\} \times (0,T), \\ v(.,0) &\leq w(.,0), & \text{dans } [0,1]. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$v \leq w \quad \text{dans } [0,1] \times (0,T).$$

**Lemme 1.2.** *Soient  $u_0 \in \mathcal{C}^1([0,1])$ ,  $u$  la solution du problème continu (1.4)-(1.7) et  $T_{\max}$  son temps d'existence maximal. Si  $u_0 \geq 0$  dans  $(0,1)$ , alors  $u > 0$  dans  $[0,1] \times [0, T_{\max})$ .*

## 1.3 Étude du problème semi-discret

### 1.3.1 Construction du schéma semi-discret

Considérons une subdivision  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < x_I = 1$  de l'intervalle  $[0,1]$ , avec  $I \geq 3$  un entier. Pour  $i = 0, \dots, I-1$ , on définit le pas constant de discrétisation par  $h = h_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{I}$ . On obtient par la suite  $x_{i+1} = x_i + h$ . Ce qui implique que  $x_i = ih$  pour  $i = 0, \dots, I$ .



Soit  $T$  un réel strictement positif tel que  $[0, T]$  soit l'intervalle sur lequel la solution  $u$  du problème (1.4)-(1.7) est définie. Le problème (1.4)-(1.7) devient alors pour  $t \in [0, T]$

$$u_t(x_i, t) = u_{xx}(x_i, t), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (1.8)$$

$$u_x(x_0, t) = 0, \quad u_x(x_I, t) = u^p(x_I, t), \quad (1.9)$$

$$u(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, I. \quad (1.10)$$

Supposons  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$ , alors la solution  $u$  du problème (1.4)-(1.7) admet un développement limité d'ordre 3 en espace sous la forme

$$u(x_{i+1}, t) = u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + O(h^3), \quad i = 0, \dots, I-1, t \in [0, T],$$

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + O(h^3), \quad i = 1, \dots, I, t \in [0, T].$$

En faisant la soustraction des deux précédentes équations, on obtient

$$u_x(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_{i-1}, t)}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T].$$

Pour  $h$  suffisamment petit, on a

$$u_x(x_i, t) \approx \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_{i-1}, t)}{2h}, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T].$$

La solution  $u$  du problème (1.4)-(1.7) admet un développement limité d'ordre 4 en espace sous la forme

$$u(x_{i+1}, t) = u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_i, t) + O(h^4), \quad i = 0, \dots, I-1, t \in [0, T],$$

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_i, t) + O(h^4), \quad i = 1, \dots, I, t \in [0, T].$$

En additionnant les égalités au-dessus, on obtient

$$u_{xx}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T].$$

Pour  $h$  suffisamment petit, on a

$$u_{xx}(x_i, t) \approx \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T].$$

On introduit les points fictifs  $x_{-1}$  et  $x_{I+1}$  en élargissant l'ensemble des indices de  $\{0, \dots, I\}$  à  $\{-1, \dots, I+1\}$  ([66]). En utilisant les égalités (1.5) et (1.6), on obtient

$$u(x_{-1}, t) = u(x_1, t) \quad \text{et} \quad u(x_{I+1}, t) = 2hu^p(x_I, t) + u(x_{I-1}, t), \quad t \in [0, T].$$

Des égalités au dessus, on obtient pour  $h$  suffisamment petit

$$u_{xx}(x_0, t) \approx \frac{2u(x_1, t) - 2u(x_0, t)}{h^2}, \quad t \in [0, T],$$

$$u_{xx}(x_I, t) \approx \frac{2u(x_{I-1}, t) - 2u(x_I, t)}{h^2} + \frac{2}{h}u^p(x_I, t), \quad t \in [0, T].$$

Notons  $U_i$  et  $\varphi_i$  les approximations respectives de  $u$  et  $u_0$  au nœud  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, I$ . Nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{d}{dt}U_i = \delta^2 U_i, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T], \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt}U_0 = \delta^2 U_0, \quad t \in [0, T], \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt}U_I = \delta^2 U_I + \frac{2}{h}U_I^p, \quad t \in [0, T], \quad (1.13)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (1.14)$$

où  $p > 1$ ,

$$\varphi_i \simeq u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, I,$$

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2 U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2},$$

$$\delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}.$$

### 1.3.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret

Dans cette partie, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14) à partir d'un système différentiel non-linéaire autonome du premier degré.

**Théorème 1.3.** *Pour chaque pas  $h$  fixé, le problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14) admet une unique solution maximale  $\left([0, T^h], U_h(\cdot)\right)$ , où  $T^h > 0$  désigne le temps d'existence maximal de la solution maximale  $U_h$ .*

*Démonstration.* Considérons le problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14), on a alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X = H(X), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

où  $X_0 = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$ . Considérons la fonction  $H$  de la variable  $X(t) = (X_0(t), \dots, X_I(t))$  définie sur  $\mathbb{R}^{I+1}$  par

$$H(X(t)) = \left( H_0(X(t)), \dots, H_I(X(t)) \right),$$

où

$$\begin{aligned} H_0(X(t)) &= \frac{2X_1(t) - 2X_0(t)}{h^2}, \\ H_i(X(t)) &= \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ H_I(X(t)) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h}X_I^p(t). \end{aligned}$$

Comme  $H$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{I+1}$ , on obtient le résultat souhaité par le Théorème B.7 (Annexe B.2).  $\square$

### 1.3.3 Convergence de la solution du problème semi-discret

Dans cette partie, nous prouvons la convergence de la solution de notre problème semi-discret vers celle du problème continu.

Nous commençons cette partie par le résultat suivant qui est une forme semi-discrète du principe du maximum et sera un outil important dans l'étude des problèmes semi-discrets.

**Lemme 1.4.** Soient  $a_h(t) \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  et  $V_h(t) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telles que

$$\frac{d}{dt}V_i - \delta^2 V_i + a_i V_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T], \quad (1.15)$$

$$V_i(0) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (1.16)$$

alors on a  $V_i(t) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Définissons le vecteur  $Z_h(t) = e^{\lambda t} V_h(t)$  où  $\lambda$  est tel que

$$a_i(t) - \lambda > 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T].$$

Soit  $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T} Z_i(t)$ . Puisque pour  $i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $Z_i$  est une fonction continue sur le segment  $[0, T]$ , il existe  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$  et  $t_0 \in [0, T]$  tels que  $m = Z_{i_0}(t_0)$ . Les égalités suivantes sont alors vérifiées :

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \quad (1.17)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \quad (1.18)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 0, \quad (1.19)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = I. \quad (1.20)$$

En utilisant (1.15), on a

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + (a_{i_0}(t_0) - \lambda) Z_{i_0}(t_0) \geq 0. \quad (1.21)$$

Il résulte des égalités (1.17)-(1.20) que  $(a_{i_0}(t_0) - \lambda) Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ . Ce qui implique que  $Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ . On en déduit que  $V_h(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, T]$ . Ce qui complète la preuve.  $\square$

Les deux Lemmes suivants sont d'autres formes du principe du maximum semi-discret et seront appelés "Lemme de comparaison pour les équations semi-discrètes".

**Lemme 1.5.** Soient  $g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $W_h$  et  $V_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  tels que

$$\frac{d}{dt} V_i - \delta^2 V_i + g(V_i) < \frac{d}{dt} W_i - \delta^2 W_i + g(W_i), \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T], \quad (1.22)$$

$$V_i(0) < W_i(0), \quad i = 0, \dots, I. \quad (1.23)$$

Alors,  $V_i(t) < W_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Soit le vecteur  $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ ,  $i = 0, \dots, I$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . On constate que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + g(W_{i_0}(t_0)) - g(V_{i_0}(t_0)) \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I,$$

qui contredit (1.22) et complète notre preuve.  $\square$

**Lemme 1.6.** Soient  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $W_h, V_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  tels que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i - \delta^2 V_i + g(V_i) &\leq \frac{d}{dt}W_i - \delta^2 W_i + g(W_i), \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T], \\ V_i(0) &\leq W_i(0), i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Alors  $V_i(t) \leq W_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Analogue au Lemme 1.5.  $\square$

Le Théorème suivant établi que, pour chaque intervalle de temps fixé  $[0, T]$  sur lequel la solution  $u$  du problème (1.4)-(1.7) est définie, la solution du problème semi-discret (1.11)-(1.14) converge vers celle du problème continu  $u$ , quand le pas de discrétisation  $h$  tend vers 0. Ce résultat sera utilisé dans l'étude de la convergence du temps d'explosion du problème semi-discret.

Dans toute cette thèse, nous utiliserons les notations suivantes :

Si  $V \in \mathbb{R}^{I+1}$ , on a

$$\|V\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |V_i|, \quad \|V\|_{inf} = \min_{0 \leq i \leq I} |V_i|.$$

**Théorème 1.7.** Supposons que le problème continu (1.4)-(1.7) a une solution  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  et que la condition initiale  $\varphi_h$  en (1.14) satisfait :

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \text{quand } h \rightarrow 0, \quad (1.24)$$

où  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ ,  $t \in [0, T]$ . Alors pour  $h$  suffisamment petit, le problème semi-discret (1.11)-(1.14) a une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telle que

$$\max_{t \in [0, T]} (\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty) = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Soit  $K > 0$  un réel strictement positif tel que

$$\|u\|_\infty \leq K.$$

Grâce au Théorème 1.3, pour tout  $h$ , le problème semi-discret (1.11)-(1.14) a une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1((0,T],\mathbb{R}^{I+1})$ . Soit  $t(h)$  la plus grande valeur de  $t > 0$  telle que

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1, \quad t \in (0,t(h)). \quad (1.25)$$

La relation (1.24) nous assure la positivité de  $t(h) > 0$  pour  $h$  suffisamment petit. Posons  $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$ . En utilisant l'inégalité triangulaire nous obtenons

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, \quad t \in (0, t^*(h)).$$

Ce qui nous donne

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + K, \quad t \in (0, t^*(h)). \quad (1.26)$$

Soit  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  l'erreur de discrétisation. Un développement de Taylor nous permet d'avoir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_i &= \delta^2 e_i + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\theta_i, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t) \right), \quad i = 1, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}e_0 &= \delta^2 e_0 + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\theta_0, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_0, t) \right), \\ \frac{d}{dt}e_I &= \delta^2 e_I + \frac{2p}{h} \mu_I^{p-1} e_I + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\theta_I, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_I, t) \right), \end{aligned}$$

où

$\mu_I$  une valeur intermédiaire entre  $U_I(t)$  et  $u(x_I, t)$ ,

$\theta_i$  une valeur intermédiaire entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, I-1$ ,

$\xi_i$  une valeur intermédiaire entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ ,

$\theta_0$  et  $\xi_0$  deux valeurs intermédiaires entre  $x_0$  et  $x_1$ ,

$\theta_I$  et  $\xi_I$  deux valeurs intermédiaires entre  $x_{I-1}$  et  $x_I$ .

De l'inégalité (1.26), il existe une constante  $\lambda > 0$  telle que

$$\frac{d}{dt}e_i - \delta^2 e_i \leq \lambda h^2, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (1.27)$$

$$\frac{d}{dt}e_0 - \delta^2 e_0 \leq \lambda h^2, \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt}e_I - \delta^2 e_I \leq \lambda |e_I| + \lambda h^2. \quad (1.29)$$

Considérons le vecteur  $Z_h$  tel que

$$Z_i(t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2) \exp((\lambda + 1)t), \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T].$$

Quelques calculs nous permettent d'avoir

$$\frac{d}{dt}Z_i - \delta^2 Z_i > \lambda h^2, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (1.30)$$

$$\frac{d}{dt}Z_0 - \delta^2 Z_0 > \lambda h^2, \quad (1.31)$$

$$\frac{d}{dt}Z_I - \delta^2 Z_I > \lambda Z_I + \lambda h^2, \quad (1.32)$$

$$Z_i(0) = \|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2. \quad (1.33)$$

En utilisant le Lemme 1.5 et les inégalités (1.27)-(1.29), on obtient de (1.30)-(1.33) que  $Z_i(t) > e_i(t)$  pour  $t \in (0, t^*(h))$ ,  $i = 0, \dots, I$ . De même, on montre que  $Z_i(t) > -e_i(t)$  pour  $t \in (0, t^*(h))$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Ce qui implique que  $Z_i(t) > |e_i(t)|$  pour  $t \in (0, t^*(h))$ ,  $i = 0, \dots, I$ . On en déduit que

$$\|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2) \exp((\lambda + 1)t), \quad t \in (0, t^*(h)).$$

Reste à montrer que  $t^*(h) = T$ . Pour cela nous Supposons  $T > t(h)$ . De l'égalité (1.24) on obtient

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2) \exp((\lambda + 1)T). \quad (1.34)$$

Puisque  $(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2) \exp((\lambda + 1)T) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ , on déduit de (1.34) que  $1 \leq 0$ , ce qui est impossible.  $\square$

### 1.3.4 Quelques propriétés du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous présentons quelques propriétés du problème semi-discret (1.11)-(1.14).

**Définition 1.8.** Soit  $V_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ .

1) On dit que  $V_h$  est une sur-solution du problème (1.11)-(1.14) si :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i - \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_0 - \frac{2V_1 - 2V_0}{h^2} &\geq 0, \quad t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_I - \frac{2V_{I-1} - 2V_I}{h^2} - \frac{2}{h}V_I^p &\geq 0, \quad t \in [0, T], \\ V_i(0) &\geq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

II) On dit que  $V_h$  est une sous-solution du problème (1.11)-(1.14) si :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_i - \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} &\leq 0, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt} V_0 - \frac{2V_1 - 2V_0}{h^2} &\leq 0, \quad t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt} V_I - \frac{2V_{I-1} - 2V_I}{h^2} - \frac{2}{h} V_I^p &\leq 0, \quad t \in [0, T], \\ V_i(0) &\leq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Le Lemme suivant nous montre que la solution de notre schéma semi-discret est définie par une suite positive. Il nous assure aussi la croissance en temps de cette solution.

**Lemme 1.9.** Soient  $T > 0$  et  $U_h$  une solution du problème semi-discret (1.11)-(1.14) telle que  $\delta^2 \varphi_h \geq 0$ . Alors nous avons :

1.  $U_i(t) \geq \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .
2.  $\frac{d}{dt} U_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* 1.  $\varphi_h$  étant une sous-solution strictement positive de (1.11)-(1.14), on obtient de la Définition 1.8 que

$$\begin{aligned} - \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} &\leq 0, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ - \frac{2\varphi_1 - 2\varphi_0}{h^2} &\leq 0, \\ - \frac{2\varphi_{I-1} - 2\varphi_I}{h^2} - \frac{2}{h} \varphi_I^p &\leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} - \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} &\leq \frac{d}{dt} U_i - \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T], \\ - \frac{2\varphi_1 - 2\varphi_0}{h^2} &\leq \frac{d}{dt} U_0 - \frac{2U_1 - 2U_0}{h^2}, \quad t \in [0, T], \\ - \frac{2\varphi_{I-1} - 2\varphi_I}{h^2} - \frac{2}{h} \varphi_I^p &\leq \frac{d}{dt} U_I - \frac{2U_{I-1} - 2U_I}{h^2} - \frac{2}{h} U_I^p, \quad t \in [0, T], \\ 0 &< \varphi_i \leq U_i(0), \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

On conclut du Lemme 1.6 que  $U_h \geq \varphi_h > 0$ .

2. Introduisons le vecteur  $Z_h$  défini par  $Z_i(t) = \frac{d}{dt} U_i, i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un



certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité au dessus. on constate que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I.\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &< 0, \quad i_0 = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}Z_I(t_0) - \delta^2 Z_I(t_0) - \frac{2}{h} p U_I^{p-1}(t_0) Z_I(t_0) &< 0.\end{aligned}$$

Ce qui contredit (1.11)-(1.13) et complète la preuve. □

Le Lemme suivant nous permet d'affirmer que la solution de notre schéma semi-discret est définie par une suite croissante.

**Lemme 1.10.** *Soient  $T > 0$  et  $U_h$  la solution du problème semi-discret (1.11)-(1.14). Alors nous avons*

$$U_i(t) > U_{i-1}(t), \quad i = 1, \dots, I, t \in [0, T].$$

*Démonstration.* Introduisons le vecteur  $Z_h$  défini par  $Z_i(t) = U_i(t) - U_{i-1}(t)$ ,  $i = 1, \dots, I$ ,  $t \in (0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  vérifiant  $Z_i(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  pour un certain  $i_0 \in \{1, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'inégalité au-dessus. Nous observons que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 2, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_2(t_0) - 3Z_1(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-1}(t_0) - 3Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I.\end{aligned}$$

Nous obtenons après calculs

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &< 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt} Z_I(t_0) - \delta^2 Z_I(t_0) - \frac{2}{h} U_I^p(t_0) &< 0. \end{aligned}$$

□

### 1.3.5 Explosion et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous montrons sous certaines conditions que la solution  $U_h$  du problème semi-discret (1.11)-(1.14) explose en un temps fini, et prouvons la convergence de ce temps d'explosion vers celui du continu. Nous commençons cette sous-section par la Définition suivante qui est l'œuvre de Abia et al. ([1]).

**Définition 1.11.** Soit  $U_h$  la solution du problème semi-discret (1.11)-(1.14). On dit que  $U_h$  explose en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_b^h$  tel que :

- (i)  $\|U_h(t)\|_\infty < \infty$ , pour  $t \in [0, T_b^h)$ ,
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow T_b^h-} \|U_h(t)\|_\infty = \infty$ .

Le temps  $T_b^h$  est appelé temps d'explosion numérique de la solution  $U_h$ .

Si un tel temps  $T_b^h$  existe, alors  $T_b^h = T^h$  où  $T^h$  est le temps d'existence maximal de la solution défini en Sect 1.3.2.

**Théorème 1.12.** Soit  $T_b$  le temps d'explosion de la solution du problème continu (1.1)-(1.3). Supposons que  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$ , quand  $h \rightarrow 0$ . Alors pour  $h$  assez petit, la solution  $U_h$  du problème semi-discret (1.11)-(1.14) explose en un temps fini  $T_b^h$ . De plus, si  $p > 2$  et  $\delta^2 u_h(0) > 0$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_b^h = T_b.$$

*Démonstration.* Soit  $u$  la solution du problème continu (1.4)-(1.7). Introduisons la fonctionnelle  $J$  et son approximation semi-discrète  $J_h$  comme suit : soit  $t \in [0, T_b)$ , on a

$$J(t) = \int_0^1 u^2 dx \quad \text{et} \quad J_h(t) = \sum_{i=0}^I h U_i^2. \quad (1.35)$$

Supposons que les données initiales en (1.4) et (1.14) satisfont respectivement

$$(u_0)_{xx} \geq \beta > 0 \quad \text{et} \quad \delta^2 \varphi_h \geq 0. \quad (1.36)$$

Ce qui conduit à  $(u)_{xx} \geq \beta > 0$  dans  $[0,1] \times [0, T_b)$  ([44]).

Définissons l'énergie  $I$  par

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} u^{p+1}(1,t). \quad (1.37)$$

Pour toute solution  $u$  de (1.4)-(1.7), l'énergie  $I$  est une fonction monotone et décroissante en fonction de  $t$ . En effet, on montre que  $\frac{d}{dt} I = - \int_0^1 u_t^2 dx < 0$ .

De l'équation (1.37), on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= -4I + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(1,t) \\ &\geq -4I(0) + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(1,t). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow T_b} \frac{d}{dt} J = \infty$ , car  $\lim_{t \rightarrow T_b} u(1,t) = \infty$  ([53; 82]).

Par ailleurs, on sait que

$$2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(1,t) = 2(p-1) \int_0^1 u^p u_x dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0,t).$$

Ce qui nous donne

$$\frac{d}{dt} J \geq -4I(0) + 2(p-1) \int_0^1 u^p u_x dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0,t).$$

Par le premier Théorème de la valeur moyenne pour les intégrales définies, il existe  $\xi \in (0,1)$  telle que

$$\frac{d}{dt} J \geq -4I(0) + 2(p-1) u_x(\xi,t) \int_0^1 u^p dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0,t).$$

Comme  $u_x(\xi,t) = \int_0^\xi u_{xx} dx$ , on obtient de la condition 1.36 que

$$\frac{d}{dt} J \geq -4I(0) + 2(p-1) \xi \beta \int_0^1 u^p dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0,t).$$

De l'inégalité de Jensen's, on obtient pour  $p > 2$

$$\frac{d}{dt} J \geq -4I(0) + 2(p-1) \xi \beta \left( \int_0^1 u^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0,t).$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}J \geq 2(p-1)\xi\beta\left(\int_0^1 u^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} + \eta, \quad (1.38)$$

avec  $\eta = -4I(0) + 2\frac{p-1}{p+1}u^{p+1}(0,t)$ . Ce qui donne

$$\frac{d}{dt}J \geq 2(p-1)\xi\beta J^{\frac{p}{2}} + \eta.$$

En prenant  $G(s) = 2(p-1)\xi\beta s^{\frac{p}{2}}$ , on montre pour  $p > 2$  que  $\int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty$ , avec  $s > R_0$ .

Soit  $I_h$  la forme semi-discrète de l'énergie définie par

$$I_h(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - \frac{1}{p+1} U_I^{p+1}. \quad (1.39)$$

On constate que  $I_h$  est une fonctionnelle décroissante par rapport à la variable  $t$ . En effet, en multipliant de part et d'autre de l'égalité (1.11) par  $h \frac{d}{dt} U_i$  et en faisant la somme pour  $i = 0, \dots, I$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^I h \left( \frac{d}{dt} U_i \right)^2 &= h \left( \frac{d}{dt} U_0 \right)^2 + h \left( \frac{d}{dt} U_I \right)^2 + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h} \frac{d}{dt} U_i \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \frac{d}{dt} U_i + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i-1} - U_i}{h} \frac{d}{dt} U_i \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \frac{d}{dt} U_i - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \frac{d}{dt} U_{i+1} + U_I^p \frac{d}{dt} U_I \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - \frac{1}{p+1} U_I^{p+1} \right). \end{aligned}$$

Multipliant cette fois ci les deux côtés de l'égalité (1.11) par  $hU_i$  et faisons la somme pour  $i = 0, \dots, I$ , on obtient après calcul

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^I hU_i \frac{d}{dt} U_i &= hU_0 \frac{d}{dt} U_0 + hU_I \frac{d}{dt} U_I + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h} U_i \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} U_i - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} U_{i+1} + U_I^{p+1} \\ &= -\sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} U_i + U_I^p. \end{aligned}$$

On obtient après utilisation de l'expression (1.39) que  $\sum_{i=0}^I hU_i \frac{d}{dt} U_i = -2I_h + \frac{p-1}{p+1} U_I^{p+1}$ ,  
d'ou l'égalité

$$\frac{d}{dt} J_h = -4I_h + 2 \frac{p-1}{p+1} U_I^{p+1}. \quad (1.40)$$

Par un raisonnement analogue, on montre que comme la fonctionnelle  $J$ , son approximation semi-discrète  $J_h$  vérifie l'inégalité

$$\frac{d}{dt} J_h \geq 2(p-1)\xi\beta \left( \sum_{i=0}^I hU_i^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \eta_h,$$

où  $\eta_h = -4I_h(0) + 2 \frac{p-1}{p+1} U_0^{p+1}$  et  $\beta$  une constante strictement positive.

En dérivant chacune des expressions de chaque côté de l'égalité (1.40) par rapport à la variable  $t$ , on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h = -4 \frac{d}{dt} I_h + 2(p-1) U_I^p dU_I.$$

$I_h$  étant décroissante par rapport à  $t$ , on déduit qu'il existe une constante positive  $\lambda$  telle que

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h \geq -\lambda \frac{d}{dt} J_h.$$

On montre par la suite que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0$ .

En effet, on a pour  $\varepsilon > 0$  et  $t \in [0, T_b - \varepsilon]$ ,

$$|J(t) - J_h(t)| = \left| \int_0^1 u^2 dx - \sum_{i=0}^I hU_i^2 \right|.$$

Ce qui implique après utilisation de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} |J(t) - J_h(t)| &\leq \left| \int_0^1 u^2 dx - \sum_{i=0}^I hu^2(x_i, t) \right| + \left| \sum_{i=0}^I hu^2(x_i, t) - \sum_{i=0}^I hU_i^2 \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 u^2 dx - \sum_{i=0}^I hu^2(x_i, t) \right| + \left| \sum_{i=0}^I h(u^2(x_i, t) - U_i^2) \right|. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème des accroissements finis on obtient

$$|J(t) - J_h(t)| \leq \left| \int_0^1 u^2 dx - \sum_{i=0}^I hu^2(x_i, t) \right| + \left| \sum_{i=0}^I 2h\zeta_i(t)(u(x_i, t) - U_i) \right|,$$

où  $\zeta_i$  est une valeur intermédiaire entre  $u(x_i, t)$  et  $U_i(t)$ . D'après le Théorème 1.7, il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\begin{aligned} |J(t) - J_h(t)| &\leq \left| \sum_{i=1}^I \left( hu^2(x_i, t) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^2 dx \right) + hu^2(x_0, t) \right| + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^I \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^2(x_i, t) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u^2 dx \right) + hu^2(x_0, t) \right| + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u^2(x_i, t) - u^2| dx + hu^2(x_0, t) + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2). \end{aligned}$$

Comme la fonction  $u^2$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , elle l'est sur chaque intervalle de la forme  $[x_{i-1}, x_i]$ , en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange on obtient

$$\begin{aligned} |J(t) - J_h(t)| &\leq \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x_i - x| \sup_{[x_{i-1}, x_i]} |2uu_x| dx + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sup_{[0, 1]} |2uu_x| \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x_i - x| dx + hu^2(x_0, t) + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sup_{[0, 1]} |uu_x| \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1})^2 + hu^2(x_0, t) + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sup_{[0, 1]} |uu_x| \times h + hu^2(x_0, t) + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2). \end{aligned}$$

Posons  $\Gamma(t) = \sup_{[0, 1]} |uu_x|$ , on obtient

$$|J(t) - J_h(t)| \leq h\Gamma(t) + hu^2(x_0, t) + 2 \sum_{i=0}^I h\zeta_i c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2).$$

Ce qui conduit à

$$\sup_{t \in [0, T_b - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| \leq h\eta_\varepsilon(t) + 2h\zeta c (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2),$$

avec  $\eta_\varepsilon(t) = hu^2(x_0, t) + \sup_{t \in [0, T_b - \varepsilon]} \Gamma(t)$  et  $\sum_{i=0}^I h\zeta_i = \zeta$ .

On obtient alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0.$$

D'où le résultat souhaité ([88]). □

### 1.3.6 Estimation de la vitesse d'explosion de la solution du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique (vitesse d'explosion) de la solution de notre problème semi-discret.

Le résultat suivant nous donne une propriété de l'opérateur  $\delta^2$  et sera un important outil dans l'étude du comportement asymptotique des solutions semi-discrètes proche des temps d'explosion et d'extinction.

**Lemme 1.13.** Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  une fonction convexe de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $U_h \in \mathbb{R}^{I+1}$  telle que  $U_h \geq 0$ . Alors, on a

$$\delta^2 f(U_i) \geq f'(U_i) \delta^2 U_i, \quad i = 0, \dots, I.$$

*Démonstration.* D'un développement limité de type Taylor-Lagrange on obtient

$$\begin{aligned} \delta^2 f(U_0) &= f'(U_0) \delta^2 U_0 + \frac{(U_1 - U_0)^2}{h^2} f''(\zeta_0), \\ \delta^2 f(U_I) &= f'(U_I) \delta^2 U_I + \frac{(U_{I-1} - U_I)^2}{h^2} f''(\zeta_I), \\ \delta^2 f(U_i) &= f'(U_i) \delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\eta_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, I-1. \end{aligned}$$

où  $\eta_i$  est une valeur intermédiaire entre  $U_i$  et  $U_{i+1}$  et  $\zeta_i$  celle entre  $U_i$  et  $U_{i-1}$ . Le résultat est obtenu en tenant compte de la convexité de  $f$  et du fait que  $U_h \geq 0$ .  $\square$

**Théorème 1.14.** Soit  $U_h$  la solution de (1.11)-(1.14). Supposons que pour  $p > 2$ ,  $U_h$  explose en un temps fini  $T_b^h$ . Alors

$$\max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \sim (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}},$$

en ce sens qu'ils existent deux constantes positives  $K_1, K_2$  telles que

$$K_1 (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}} \leq \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \leq K_2 (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

*Démonstration.* Définissons le vecteur  $J_h$  comme suit

$$J_i = \frac{d}{dt} U_i - \varepsilon U_i^p, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_b^h), \quad (1.41)$$

avec  $\varepsilon$  une constante strictement positive à définir plus tard. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt} U_i - \varepsilon U_i^p \right] - \delta^2 \left[ \frac{d}{dt} U_i - \varepsilon U_i^p \right], \quad i = 0, \dots, I \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt} U_i - \delta^2 U_i \right] - \varepsilon p U_i^{p-1} \frac{d}{dt} U_i + \varepsilon \delta^2 U_i^p, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.13, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right] - \varepsilon p U_i^{p-1} \frac{d}{dt}U_i + \varepsilon p U_i^{p-1} \delta^2 U_i, \quad i = 0, \dots, I \\ &\geq \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right] - \varepsilon p U_i^{p-1} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right], \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Cela nous conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq 0, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\geq \frac{d}{dt} \left[ \frac{2}{h} U_I^p \right] - \varepsilon p U_I^{p-1} \left[ \frac{2}{h} U_I^p \right]. \end{aligned}$$

De l'égalité (1.41), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq 0, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I - \frac{2}{h} p U_I^{p-1} J_I &\geq 0. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, on obtient en utilisant la condition 1.36, que  $J_h(0) \geq 0$ . On déduit du Lemme 1.4 (principe du maximum pour les équations semi-discrètes) que  $J_h \geq 0$  pour  $t \in (0, T_b^h)$ . Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}U_i \geq \varepsilon U_i^p, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_b^h).$$

Nous obtenons après réécriture

$$U_i^{-p} dU_i \geq \varepsilon dt, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_b^h).$$

En intégrant l'inégalité au-dessus de  $t$  à  $T_b^h$ , on obtient

$$\frac{1}{p-1} U_i^{-p+1} \geq \varepsilon (T_b^h - t), \quad i = 0, \dots, I.$$

Ce qui implique que pour  $p > 1$ ,

$$U_i(t) \geq \left[ \varepsilon (p-1) \right]^{\frac{-1}{p-1}} (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

On en déduit que

$$\max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \geq \left[ \varepsilon (p-1) \right]^{\frac{-1}{p-1}} (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

**Remarque 1.15.** Puisque  $U_h$  atteint son maximum au dernier nœud (Lemme 1.10), on a

$$U_I(t) = \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t).$$



Établissons maintenant la borne supérieure de cette vitesse d'explosion.

Soit  $i_0$  tel que  $U_{i_0}(t) = \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$  pour  $t \in (0, T_b^h)$ . On observe que

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{U_{i_0+1}(t) - 2U_{i_0}(t) + U_{i_0-1}(t)}{h^2} \leq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \leq 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \leq 0, \quad i_0 = I.\end{aligned}$$

Des expressions au-dessus et des égalités (1.11)-(1.13) on obtient

$$\frac{d}{dt} U_I \leq \frac{2}{h} U_I^p,$$

qui après intégration de  $t$  à  $T_b^h$  donne

$$\frac{1}{p-1} U_I^{-p+1} \leq \frac{2}{h} (T_b^h - t).$$

Ce qui implique que

$$U_I(t) \leq \left[ \frac{2}{h} (p-1) \right]^{\frac{-1}{p-1}} (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

D'où le résultat recherché. □

**Remarque 1.16.** Notons que la vitesse d'explosion numérique obtenue avec notre schéma semi-discret,  $(T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}$  ([6; 7]), ne coïncide pas (est plus grande) avec celle obtenue pour le problème continu ([34; 53]). On observe par ailleurs que cette différence apparaît lors de l'approximation numérique d'un problème continu avec condition aux limites de type Neumann à l'aide d'une méthode d'approximation à pas de discrétisation fixe. C'est au vue de cela que, Ferreira et al. ([30]), ont décrit une méthode numérique adaptative qui ajoute des points de discrétisation au fur et à mesure que l'on s'approche du point d'explosion, de manière à récupérer la vitesse d'explosion du problème continu.

## 1.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques approximations numériques du temps d'explosion de la solution du problème (1.4)-(1.7). Nous discutons aussi du lieu et de la vitesse d'explosion proche du temps d'explosion. Ces approximations numériques sont obtenues en intégrant numériquement le problème semi-discret (1.11)-(1.14).

Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons que  $T^h$  est le temps d'explosion numérique.

Considérons le problème (1.4)-(1.7) pour  $u_0(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2}{5}$ . Nous approxi-  
mons la solution  $u$  du problème (1.4)-(1.7) par la solution  $U_h$  du système d'équations  
différentielles

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{I-1} \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{I-1} \\ U_I \end{pmatrix} + \frac{2}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_I^p \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = f(U), & 0 < t < T^h, \\ U(0) = \varphi, \end{cases}$$

avec  $f = (f_0, \dots, f_I)$ ,  $U = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$  et  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$ . Soit  $\eta$  la longueur  
d'arc de la solution  $U_h$ . On obtient le système d'EDO suivant

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}}, & 0 < t < T^h, \\ \frac{d}{dt}U_i = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}}, & i = 0, \dots, I, \\ t(0) = 0, \quad U(0) = \varphi, & i = 0, \dots, I, \\ 0 < \eta < \infty, \end{cases}$$

où les variables  $t$  et  $U_i$  sont fonctions de la longueur d'arc  $\eta$  avec  $d\eta^2 = dt^2 + dU_0^2 + \dots + dU_I^2$ .

Tout au long de cette thèse, nous utilisons les données suivantes pour nos différentes  
simulations numériques. Le DOP54 ([48]) sera utilisé comme code d'intégration des  
EDO avec comme paramètres  $InitialStep = 0$  et  $AbsTol = RelTol = 1.d - 15$ .

Dans les différents tableaux suivants, en colonnes, nous présentons le temps d'explo-  
sion numérique  $T^h$ , le nombre d'itérations nécessaires pour l'explosion numérique  
 $n$  et la vitesse d'explosion  $p_h$ , correspondants aux maillages de 16, 32, 64, 128, 256 et  
512.

Soient les suites  $\{\eta_l\}$  et  $t(\eta_l)$  définies par le Théorème C.2 ( Annexe C.1 ).

Nous prenons ici  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ) et nous appliquons l'algorithme  $\Delta^2$  d'Aitken ( Annexe C.2 ).

TABLEAU 1.1 – Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour  $p = 2,1, k = 14$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,322351178	5597	0,90
32	0,317306206	9258	0,90
64	0,315728634	16422	0,90
128	0,315254971	30561	0,90
256	0,315116726	59702	0,90
512	0,315077206	137666	0,90

TABLEAU 1.2 – Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour  $p = 2,5, k = 7$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,22728625	4035	0,66
32	0,22290555	6838	0,66
64	0,22152340	12292	0,66
128	0,22110600	23005	0,66
256	0,22098368	44858	0,66
512	0,22094860	100824	0,66

TABLEAU 1.3 – Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et vitesse d'explosion numérique obtenus pour  $p = 3, k = 6$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,163046885	3092	0,50
32	0,159129671	5263	0,50
64	0,157882816	9478	0,50
128	0,157504250	17729	0,50
256	0,157392901	34421	0,50
512	0,157360889	75433	0,50

**Remarque 1.17.** Des différents tableaux, nous observons la relation entre le temps d'explosion numérique et le flux à la frontière. En effet, quand le flux à la frontière croît de 2,1 à 3, l'explosion se produit plus vite avec une convergence plus lente. On conclut que le flux à la frontière favorise l'explosion de la solution de notre schéma numérique. Par ailleurs, on

constate la relation inverse entre le flux à la frontière et la vitesse d'explosion. En effet, quand le flux à la frontière croît de 2,1 à 3, la vitesse d'explosion décroît de 0,90 à 0,5.

Pour d'autres illustrations, dans ce qui suit, nous donnons quelques graphiques. Des FIGURE 1.2 - FIGURE 1.9 réalisées pour  $I = 128$ , et pour  $p = 2,1 : 3$ , on observe le comportement de croissance rapide de la solution et l'explosion de celle ci au dernier nœud. Tout ceci à travers la représentation de la solution par rapport à l'espace et au temps.

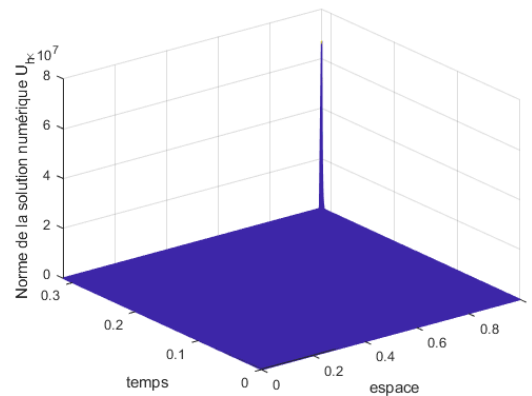


FIGURE 1.1 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 2,1$ .

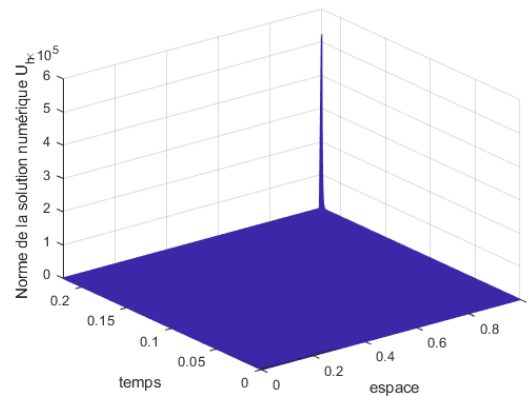


FIGURE 1.2 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 2,5$ .

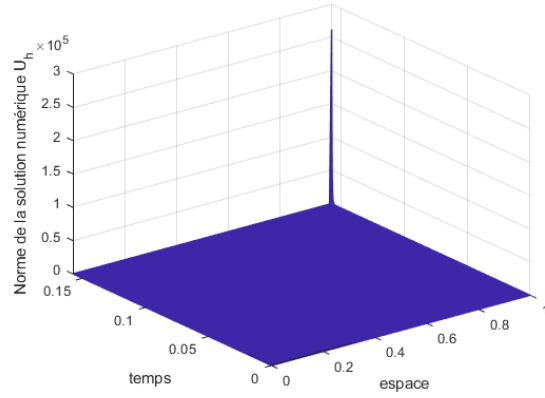


FIGURE 1.3 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 3$ .

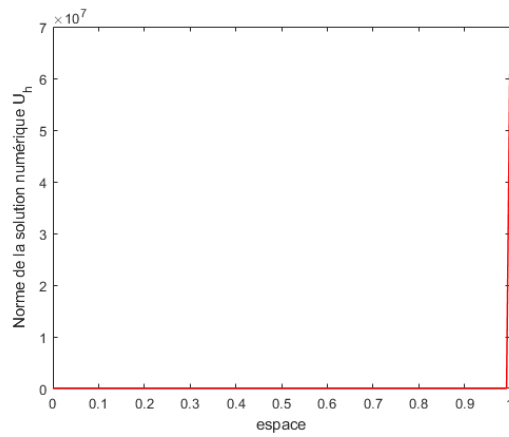


FIGURE 1.4 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 2,1$ .

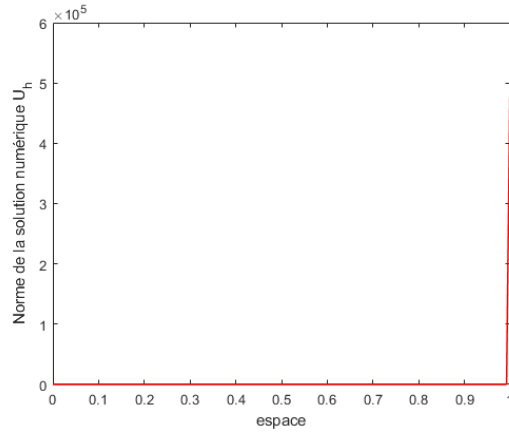


FIGURE 1.5 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 2,5$ .

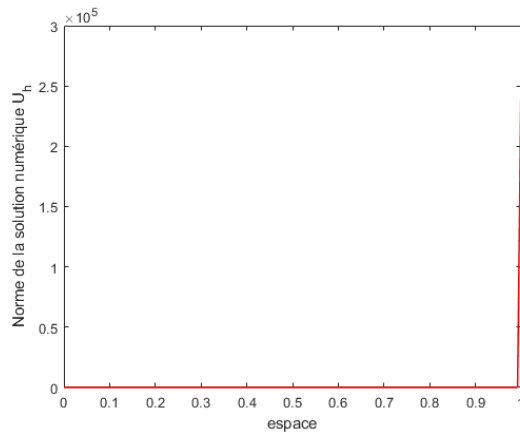


FIGURE 1.6 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 3$ .

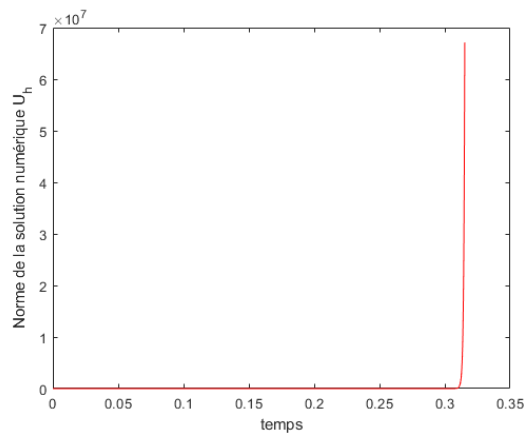


FIGURE 1.7 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 2,1$ .

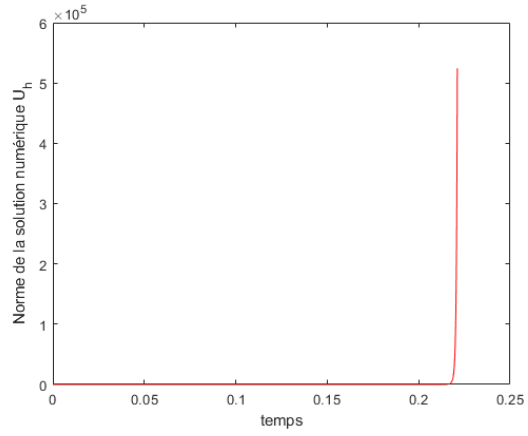


FIGURE 1.8 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 2,5$ .

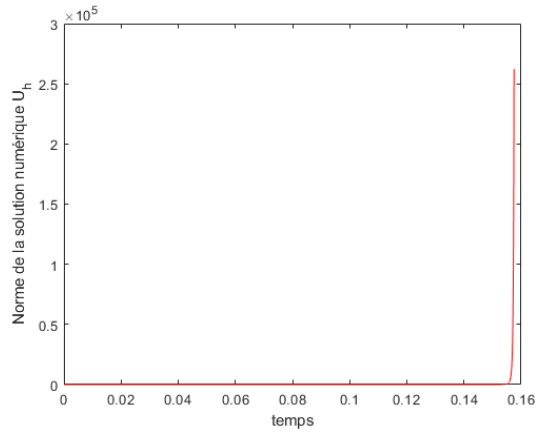


FIGURE 1.9 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 3$ .

# Chapitre 2

## Étude numérique d'une équation parabolique semi-linéaire avec deux sources de singularités de même nature

### 2.1 Introduction

Considérons l'équation parabolique semi-linéaire suivante avec un flux sortant non-linéaire à la frontière :

$$u_t = u_{xx} + f(x)(1 - u)^{-p}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (2.1)$$

$$u_x(0,t) = u^{-q}(0,t), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.4)$$

où  $p, q$  sont des constantes strictement positives, la donnée initiale  $u_0 : [0,1] \rightarrow (0,1)$  est assez régulière et satisfait la condition de compatibilité à la frontière, et la fonction  $f$  est positive. Ce problème peut être considéré comme un modèle de conduction de chaleur intégrant des effets d'une réaction non-linéaire (source) et d'un flux sortant non-linéaire à la frontière (émission) ([94; 95]).

Dans notre problème nous avons deux sources de singularités. Nous observons que le terme source non-linéaire  $f(x)(1 - u)^{-p}$  peut devenir singulier si  $u(x,t) \rightarrow 1$  quand  $(x,t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t})$ , où  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  est un point de  $[0,1] \times (0,T)$ . D'autre part, le flux à la frontière  $u^{-q}(0,t)$  peut tout aussi devenir singulier en un temps fini si  $u(x,t) \rightarrow 0$



quand  $(x,t) \rightarrow (\tilde{x},\tilde{t})$ , avec  $(\tilde{x},\tilde{t})$  un point de  $[0,1] \times (0,T)$ .

Si ces deux cas peuvent avoir lieu, il sera certainement très difficile de travailler avec les deux en même temps, car cela suppose certaines questions à savoir : lequel des deux termes deviendra singulier en premier, quel sera le comportement de la solution dans le cas où ces deux termes deviennent simultanément singuliers ? Les problèmes d'extinction avec à la fois un terme d'extinction non-linéaire à la source et un autre à la frontière ont été très peu étudiés, cependant on peut trouver quelques traces d'études dans la littérature ([76; 85; 94; 95]). Dans ([85]), Selcuk et Ozalp ont étudié le comportement de l'extinction de la solution d'une équation de la chaleur semi-linéaire avec un flux sortant à la frontière. Ils ont prouvé sous certaines conditions l'extinction en temps fini de la solution du problème considéré en un unique point à la frontière, et montré que sa dérivée par rapport au temps explose aussi en ce point d'extinction. Concernant la solution du problème (2.1)-(2.4), Zhi ([94]) a montré que si la donnée initiale satisfait

$$u_0'' + f(x)(1 - u_0(x))^{-p} \leq 0 \quad \text{sans être identiquement égal à } 0, x \in (0,1), \quad (2.5)$$

$$u_0'(x) \geq 0, \quad (2.6)$$

alors la solution classique  $u$  du problème (2.1)-(2.4) s'éteint en un fini temps  $T_q$  au point  $x = 0$ , et a estimé la vitesse d'extinction comme suit  $u(0,t) \sim (T_q - t)^{\frac{1}{2(q+1)}}$ . Un peu plutôt Zhi et Mu ([95]) avait étudié le même problème (2.1)-(2.4) tout en fixant  $f(x)$  à 1 et avait obtenu les mêmes résultats que ceux obtenus plus tard dans ([94]). Ce qui a incité Zhi à affirmer que la fonction  $f$  (dans le terme source) n'a aucun impact sur le comportement de l'extinction du problème (2.1)-(2.4).

Contrairement à l'étude théorique, il est à noter, qu'aucun travail concernant l'étude numérique des problèmes paraboliques avec deux sources de singularités (deux sources d'extinction), à savoir le terme source d'un côté et le flux à la frontière de l'autre côté, n'a jusqu'à ce jour été rencontré dans la littérature.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude numérique du problème (2.1)-(2.4). Nous commençons cette étude par une analyse du problème continu (2.1)-(2.4). Ce qui conduit, dans la section 2, à donner quelques propriétés qualitatives de la solution de ce problème, et à étudier le comportement de l'extinction de cette solution pour une donnée initiale  $u_0$  satisfaisant les inégalités

$$u_0'' + f(x)(1 - u_0(x))^{-p} \geq 0 \quad \text{sans être identiquement égal à } 0, x \in (0,1), \quad (2.7)$$

$$u_0'(x) \geq 0.$$

Dans la section 3, après avoir prouvé que notre problème semi-discret mis en place (d'une manière similaire à celle de la Sect 1.3.1) est bien posé, et énoncé quelques-unes de ces propriétés, nous montrons sous certaines conditions sur la donnée initiale que la solution de ce schéma semi-discret s'éteint en deux différents temps finis, et prouvons la convergence de ces temps d'extinction semi-discrets vers ceux du continu. Par ailleurs, nous montrons que la vitesse d'extinction numérique est soit différente (plus grande), soit égale à celle du problème continu en fonction du lieu d'extinction. Pour ce faire, nous supposerons les hypothèses de monotonie suivantes :

$$\delta^2 \varphi_i + f_i(1 - \varphi_i)^{-p} \leq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (2.8)$$

$$\delta^2 \varphi_i + f_i(1 - \varphi_i)^{-p} \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (2.9)$$

$$f_{i+1} \geq f_i, \quad i = 0, \dots, I. \quad (2.10)$$

Pour finir ce chapitre, nous donnons dans la dernière section, quelques expériences numériques pour illustrer notre analyse.

## 2.2 Étude du problème continu

Dans cette section, nous donnons quelques propriétés de la solution notre problème continu indispensables pour son étude.

### 2.2.1 Existence et unicité de la solution du problème continu

Des résultats concernant l'existence locale et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.4) sont à trouver en Annexe A.1 et B.1, à l'aide des Corollaire A.3 et Théorème B.2. En outre, quelques discussions les concernant sont également répertoriées dans la théorie classique des équations paraboliques ([58]).

Dans la suite de ce chapitre, le temps  $T_{\max}$  désigne le temps d'existence maximale de la solution  $u$  du problème continu (2.1)-(2.4).

### 2.2.2 Quelques propriétés de la solution du problème continu

Pour commencer cette sous section, nous définissons les notions de sur et sous-solution.

**Définition 2.1.** Soit  $v$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  sur  $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ .

$v$  est appelée une sous-solution du problème (2.1)-(2.4) si  $v$  satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &\leq f(x)(1-v)^{-p}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T_{\max}, \\ v_x(0,t) &\leq v^{-q}(0,t), v_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T_{\max}, \\ v(x,0) &\leq u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous disons que  $v$  est une sur-solution quand les inégalités ci-dessus sont renversées.

Le Lemme de comparaison suivant est une conséquence du principe du maximum (Annexe A.1).

**Lemme 2.2.** Soient  $u$  et  $v$  respectivement solution et sous-solution du problème (2.1)-(2.4) dans  $[0,1] \times [0, T_{\max})$ . Alors  $u \geq v$  dans  $[0,1] \times [0, T_{\max})$ .

*Démonstration.* Nous donnons la preuve suivant la démarche utilisée dans ([37; 85; 86]).

Posons  $v(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} v_t &\geq v_{xx} + pf(x)(1-\eta)^{-p-1}v, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T_{\max}, \\ v_x(0,t) &\geq -q\zeta^{-q-1}(0,t)v(0,t), \quad v_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T_{\max}, \\ v(x,0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

où

$\eta$  est une valeur intermédiaire entre  $u(x,t)$  et  $v(x,t)$ ,  $0 < x < 1, 0 < t < T_{\max}$ ,

$\zeta(0,t)$  est une valeur intermédiaire entre  $u(0,t)$  et  $v(0,t)$ ,  $0 < t < T_{\max}$ .

Soit  $\tau \in (0, T_q)$ , soit encore la fonctionnelle  $w$  définie par  $w(x,t) = e^{-Mt-L(x-1)^2}v(x,t)$ .

En posant  $L = \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} \frac{1}{2}q\zeta^{-q-1}$  et  $M = 2L + 4L^2 + \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} pf(x)(1-\eta)^{-p-1}$ , les résultats suivants s'obtiennent après plusieurs calculs

$$\begin{aligned} w_t &\geq w_{xx} + 4L(x-1)w_x + cw, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq \tau, \\ w_x(0,t) &\geq d(t)w(0,t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ w_x(1,t) &= 0, \quad 0 < t \leq \tau, \\ w(x,0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

où

$$c = c(x,t) = 4L^2[(x-1)^2 - 1] + pf(x)(1-\eta)^{-p-1} - \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} pf(x)(1-\eta)^{-p-1} \leq 0,$$

et

$$d(t) = \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (q\zeta^{-q-1}(x,t)) - q\zeta^{-q-1}(0,t) \leq 0.$$

Par le principe du maximum (Corollaire A.3, Annexe A.1), on obtient  $w \geq 0$  dans  $[0,1] \times [0,\tau]$ . On en déduit que  $u \geq v$  dans  $[0,1] \times [0,T_{\max}]$ .  $\square$

**Lemme 2.3.** Soient  $u$  et  $v$  respectivement solution et sur-solution du problème (2.1)-(2.4) dans  $[0,1] \times [0,T_{\max}]$ . Alors  $u \leq v$  dans  $[0,1] \times [0,T_{\max}]$ .

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle du Lemme 2.2 et a été donc omise.  $\square$

**Lemme 2.4.** Si la donnée initiale  $u_0$  en (2.4) satisfait la condition 2.5, alors

$$u_x > 0, \quad \text{dans } (0,1) \times (0,T_{\max}).$$

*Démonstration.* Si  $u_0$  satisfait la condition 2.5, alors nous obtenons  $u_t < 0$  dans  $(0,1) \times (0,T_{\max})$  par le principe du maximum (Annexe A.1). Ce qui implique que  $u_{xx} < 0$  dans  $(0,1) \times (0,T_{\max})$ . On en déduit que  $u_x$  est une fonction strictement décroissante, donc  $u_x > 0$  dans  $(0,1) \times (0,T_{\max})$ , car  $u_x(1,t) = 0$ .  $\square$

**Lemme 2.5.** Soit  $u$  une solution du problème continu (2.1)-(2.4) dans  $[0,1] \times [0,T_{\max}]$ . Si la donnée initiale  $u_0$  en (2.4) satisfait la condition 2.5, alors on a

$$0 < u(x,t) < 1 \quad \text{dans } [0,1] \times [0,T_{\max}].$$

*Démonstration.* Si  $u_0$  satisfait la condition 2.5, on obtient de la Définition 2.1 que  $u_0$  est une sur solution du problème (2.1)-(2.4). L'utilisation du Lemme 2.3 nous permet d'avoir  $0 < u(x,t) \leq u_0(x)$  dans  $[0,1] \times [0,T_{\max}]$ .  $\square$

Ces dernières propriétés sont importantes pour le modèle physique. Supposons par exemple que  $u$  représente une fraction massique. Par définition de la fraction massique, celle-ci est toujours comprise entre 0 et 1. La proposition précédente nous dit que la quantité  $u$  donnée par le modèle mathématique, supposée représenter la fraction massique d'une espèce qui diffuse dans un milieu, par exemple, est aussi comprise entre 0 et 1, dès que la fraction massique initiale  $u_0$  est dans l'intervalle  $[0,1]$ . Ce qui est plutôt une bonne nouvelle : le modèle mathématique respectant les bornes de la physique. Mais, on ne peut en général calculer la solution de (2.1)-(2.4) de manière analytique.

### 2.2.3 Extinction en temps fini sous les conditions 2.7 & 2.6

Notons que l'étude de l'extinction du problème continu (2.1)-(2.4) sous les conditions 2.5 & 2.6 a été déjà réalisée ([94; 95]).

**Définition 2.6.** On dit que la solution  $u$  du problème (2.1)-(2.4) s'éteint en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_q$  tel que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

- (I) Pour  $t \in [0, T_q)$ ,  $\min_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) > 0$ , mais  $\lim_{t \rightarrow T_q^-} \min_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) = 0$ .
- (II) Pour  $t \in [0, T_q)$ ,  $\max_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) < 1$ , mais  $\lim_{t \rightarrow T_q^-} \max_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) = 1$ .

Si un tel temps  $T_q$  existe, on a  $T_q = T_{\max}$ .

Notons que dans la Définition 2.6, le premier cas ne peut se produire sous les conditions 2.7 & 2.6.

**Remarque 2.7.** Le fait d'avoir  $u_x \geq 0$  dans  $[0, 1] \times (0, T_{\max})$  nous permet d'affirmer que la solution  $u$  de (2.1)-(2.4) atteint sa valeur maximale au dernier point, c'est-à-dire

$$\text{pour } t \in (0, T_{\max}), \quad \max_{0 \leq x \leq 1} u = u(1, t).$$

**Lemme 2.8.** Si  $u_0$  satisfait (2.7), alors

- (i)  $u(x, t) > 0$ ,  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T_{\max})$ .
- (ii)  $u_t \geq 0$  dans  $[0, 1] \times [0, T_{\max})$ .

*Démonstration.* (i) Puisque la condition 2.7 est satisfaite, on obtient de la Définition 2.1 que  $u_0$  est une sous-solution du problème (2.1)-(2.4). Ce qui nous permet de conclure grâce au Lemme 2.2 que  $0 < u_0 \leq u$ .

(ii) Posons  $v = u_t$ . On remarque que  $v$  satisfait

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + pf(x)(1-u)^{-p-1}v, \quad x \in (0, 1), 0 < t < T_{\max}, \\ v_x(0, t) &= -qu^{-q-1}(0, t)v(0, t), \quad 0 < t < T_{\max}, \\ v_x(1, t) &= 0, \quad 0 < t < T_{\max}, \\ v(x, 0) &= u_{xx}(x, 0) + f(x)(1-v(x, 0))^{-p} \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Soit  $\tau \in (0, T_{\max})$ , introduisons la fonctionnelle  $w$  telle que

$$w(x, t) = e^{-Mt - L(x-1)^2} v(x, t),$$

avec  $L = \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} \frac{1}{2} q u^{-q-1}$  et  $M = 2L + 4L^2 + \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} p f(x)(1-u)^{-p-1}$ .  
 On vérifie par un calcul que  $w$  satisfait

$$\begin{aligned} w_t &= w_{xx} + 4L(x-1)w_x + cw, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq \tau, \\ w_x(0,t) &= d(t)w(0,t), \quad 0 < t \leq \tau, \\ w_x(1,t) &= 0, \quad 0 < t \leq \tau, \\ w(x,0) &\geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

avec

$$c = c(x,t) = 4L^2[(x-1)^2 - 1] + p f(x)(1-u)^{-p-1} - \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (p f(x)(1-u)^{-p-1}) \leq 0$$

et

$$d(t) = \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau} (q u^{-q-1}(x,t)) - q u^{-q-1}(0,t) \leq 0.$$

En utilisant le principe du maximum et le Lemme de Hopf ( Annexe A.1 et A.2 ), on obtient  $w \geq 0$  dans  $[0,1] \times [0,\tau]$ . On en déduit que  $u_t \geq 0$  dans  $[0,1] \times [0, T_{\max})$ .

□

**Théorème 2.9.** *Supposons que la donnée initiale en (2.4) vérifie la condition 2.7. Alors, il existe un temps fini  $T_q$  telle que la solution  $u$  du problème (2.1)-(2.4) s'éteint en ce temps.*

*Démonstration.* Nous prouvons ce résultat par l'absurde. Pour ce faire nous supposons que la solution  $u$  du problème continu (2.1)-(2.4) ne peut s'éteindre en tout temps.

Supposons que  $u_0$  vérifie la condition 2.7. On obtient après intégration par parties

$$\gamma = -u_0^{-q}(0) + \int_0^1 f(x)(1-u_0(x))^{-p} dx > 0.$$

Introduisons la fonctionnelle  $J(t) = \int_0^1 (1-u) dx$ ,  $0 < t < T_q$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= - \int_0^1 u_t dx \\ &= u^{-q}(0,t) - \int_0^1 f(x)(1-u)^{-p} dx, \end{aligned}$$

du Lemme 2.8 on obtient

$$\frac{d}{dt} J \leq u_0^{-q}(0) - \int_0^1 f(x)(1-u_0(x))^{-p} dx = -\gamma.$$

En intégrant de part et d'autre de l'inégalité au dessus on obtient

$$J(t) \leq J(0) - \gamma t,$$

d'où la contradiction. Ce qui complète la preuve.  $\square$

**Remarque 2.10.** *D'autres méthodes peuvent être utilisées pour étudier l'extinction de la solution des problèmes paraboliques. On peut citer entre autres, la méthode de concavité ( [12; 52] ), un outil assez puissant pouvant être appliquée à de nombreux autres types d'équations paraboliques du second ordre, ainsi qu'à d'autres types d'équations d'évolution. Cette méthode ne fait pas intervenir le principe du maximum.*

**Théorème 2.11.** *Supposons que la donnée initiale  $u_0$  en (2.4) satisfait les conditions 2.7 & 2.6, et que  $f'(x) \geq 0$  dans  $(0,1)$ . Alors, l'extinction se produit uniquement au point  $x = 1$  en un temps fini  $T_q$ .*

*Démonstration.* Soit la fonctionnelle  $J$  telle que

$$J(x,t) = u_x - \varepsilon(x - b_1), \quad (x,t) \in [b_1, b_2] \times [\tau, T_q),$$

avec  $b_1 \in [0,1)$ ,  $b_2 \in (b_1, 1)$ ,  $\tau \in (0, T_q)$ , et  $\varepsilon$  une constante strictement positive à définir plus tard.

On obtient après calcul que pour  $(x,t) \in (b_1, b_2) \times (\tau, T_q)$

$$J_t - J_{xx} = f'(x)(1-u)^{-p} + pf(x)(1-u)^{-p-1}u_x > 0,$$

puisque  $u_x > 0$  dans  $[0,1) \times [0, T_q)$  et  $f'(x) \geq 0$ . Ainsi par le principe du maximum ( Théorème A.4, Annexe A.1),  $J$  ne peut atteindre un minimum négatif à l'intérieur. De plus, si  $\varepsilon$  est assez petit,  $J(x, \tau) > 0$ , car  $u_x > 0$  dans  $[0,1) \times [0, T_q)$ . Par ailleurs, pour  $\varepsilon$  assez petit et  $t \in (\tau, T_q)$  on remarque que

$$J(b_1, t) = u_x(b_1, t) > 0,$$

$$J(b_2, t) = u_x(b_2, t) - \varepsilon(b_2 - b_1) > 0.$$

On déduit du principe du maximum ( Corollaire A.3, Annexe A.1 ) que

$$J(x,t) > 0, \quad (x,t) \in [b_1, b_2] \times [\tau, T_q).$$

Ce qui implique que

$$u_x > \varepsilon(x - b_1), \quad (x,t) \in [b_1, b_2] \times [\tau, T_q).$$

En intégrant l'inégalité au-dessus selon  $x$  de  $b_1$  à  $b_2$ , on obtient

$$u(b_1, t) < u(b_2, t) - \varepsilon \frac{(b_1 - b_2)^2}{2} < 1 - \varepsilon \frac{(b_1 - b_2)^2}{2}.$$

On conclut alors que  $u$  ne peut s'éteindre dans  $[0, 1)$ . Ce qui termine notre preuve.  $\square$

## 2.2.4 Estimation de la vitesse d'extinction sous les conditions 2.7 & 2.6

Dans cette sous section, nous établissons une estimation de la vitesse d'extinction pour la solution du problème (2.1)-(2.4). Plusieurs techniques ont été mises en place au fil des années permettant d'estimer la vitesse d'extinction de la solution des problèmes paraboliques non-linéaires ([34; 36; 24]). Nous nous intéressons ici à celle énoncée dans ([36; 24; 76; 47]). Méthode qui consiste à établir les bornes supérieure et inférieure pour la solution  $u$  du problème considéré proche du temps  $T_q$  d'extinction.

Le Théorème suivant nous permet d'obtenir la borne inférieure de la vitesse d'extinction.

**Théorème 2.12.** *Si la donnée initiale  $u_0$  en (2.4) vérifie les hypothèses du Théorème 2.9, alors il existe une constante positive  $\Gamma_1$  telle que*

$$\max_{0 \leq x \leq 1} u \geq 1 - \Gamma_1 (T_q - t)^{\frac{1}{p+1}}, \quad \text{pour } t \in (0, T_q).$$

*Démonstration.* Posons  $\psi(t) = \max_{0 \leq x \leq 1} u$ . Soit un indice  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $\psi(t_i) = u(x_i, t_i)$ . On a pour  $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t_2) - \psi(t_1)}{t_2 - t_1} &= \frac{u(x_2, t_2) - u(x_1, t_1)}{t_2 - t_1} \\ &\leq \frac{u(x_2, t_2) - u(x_2, t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= u_t(x_2, t_2) + o(1) \\ &= u_{xx}(x_2, t_2) + f(x_2)(1 - u(x_2, t_2))^{-p} + o(1) \\ &\leq u_{xx}(x_2, t_2) + f(x_2)(1 - \psi(t_2))^{-p} + o(1). \end{aligned}$$

Puisque  $u_{xx}(x_2, t_2) \leq 0$ , en faisant tendre  $t_2 \rightarrow t_1$ , on obtient  $\psi'(t) \leq f(x)(1 - \psi(t))^{-p}$  presque partout dans  $(0, T_q)$ . Ce qui nous donne

$$\psi'(t)(1 - \psi(t))^p \leq f(x), \quad \text{presque partout dans } (0, T_q). \quad (2.11)$$



En intégrant l'inégalité (2.11) de  $t$  à  $T_q$  et tenant compte du fait que  $\psi(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow T_q$  ( Définition 2.6 ), on obtient

$$\max_{0 \leq x \leq 1} u \geq 1 - ((p+1)f(x))^{\frac{1}{p+1}} (T_q - t)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (2.12)$$

En prenant  $\Gamma_1 = ((p+1)f(x))^{\frac{1}{p+1}}$  on a le résultat désiré.  $\square$

Par la suite nous établissons la borne supérieure de la vitesse d'extinction.

Dans la suite de cette sous-section, nous supposons

$$u_x(x,0) \geq (x-1)^2 u^{-q}(x,0), \quad 0 < x < 1, \quad (2.13)$$

$$u_t(1,t) = u_{xx}(1,t) + f(1)(1-u(1,t))^{-p}. \quad (2.14)$$

**Théorème 2.13.** *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.11 soient vérifiées. Alors, il existe une constante positive  $\Gamma_2$  telle que*

$$u(1,t) \leq 1 - \Gamma_2 (T_q - t)^{\frac{1}{p+1}}, \quad \text{pour } t \in (0, T_q),$$

*Démonstration.* Soit la fonctionnelle  $\Phi$  définie par

$$\Phi(x,t) = u_x - (x-1)^2 u^{-q}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T_q]. \quad (2.15)$$

On obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned} \Phi_t - \Phi_{xx} - pf(x)(1-u)^{-p-1}\Phi &= f'(x)(1-u)^{-p} + f(x)(x-1)^2 u^{-q}(1-u)^{-p}(p(1-u)^{-1} + qu^{-1}) + \\ & \quad 2u^{-q} - 4q(x-1)u^{-q-1}u_x + q(q+1)(x-1)^2 u_x^2, \end{aligned}$$

puisque  $u_x > 0$  dans  $(0,1) \times (0,T_q)$  ( Lemme 2.4 ) et  $f'(x) \geq 0$ ,  $\Phi$  ne peut atteindre un minimum négatif intérieur. D'autre part, on obtient  $\Phi(x,0) \geq 0$  de l'inégalité (2.13) et on a

$$\Phi(0,t) = 0, \quad \Phi(1,t) = 0,$$

pour  $t \in (0, T_q)$ . Il en résulte du principe du maximum ( Corollaire A.3, Annexe A.1 ) que

$$\Phi(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T_q].$$

Ce qui implique

$$\Phi_x(1,t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(1,t) - \Phi(1-h,t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\Phi(1-h,t)}{h} \geq 0.$$

On obtient de (2.14)

$$\begin{aligned}\Phi_x(1,t) &= u_{xx}(1,t) \\ &= u_t(1,t) - f(1)(1 - u(1,t))^{-p} \geq 0.\end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité au dessus de  $t$  à  $T_q$ , on obtient

$$u(1,t) \leq 1 - (f(1)(p+1))^{\frac{1}{p+1}} (T_q - t)^{\frac{1}{p+1}},$$

d'où le résultat souhaité. □

**Corollaire 2.14.** *Supposons que les hypothèses des Théorèmes 2.12 et 2.13 soient vérifiées. Alors, proche du temps d'extinction  $T_q$ , la solution  $u$  du problème continu (2.1)-(2.4) a une vitesse d'extinction estimée comme suit :*

$$\max_{0 \leq x \leq 1} u \sim (T_q - t)^{\frac{1}{p+1}}.$$

**Remarque 2.15.** *Si les hypothèses du Théorème 2.11 sont vérifiées, alors la solution  $u$  du problème (2.1)-(2.4) admet  $u(1,t) \sim (T_q - t)^{\frac{1}{p+1}}$  comme estimation de sa vitesse d'extinction.*

## 2.3 Étude du problème semi-discret

Dans cette partie, d'une manière similaire à celle de la Sect 1.3.1, nous approximations la solution  $u$  du problème (2.1)-(2.4) par la solution  $U_h = (U_0, \dots, U_I)^T$  des équations semi-discrètes suivantes

$$\frac{d}{dt} U_i = \delta^2 U_i + f_i(1 - U_i)^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} U_0 = \delta^2 U_0 - \frac{2}{h} U_0^{-q} + f_0(1 - U_0)^{-p}, \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} U_I = \delta^2 U_I + f_I(1 - U_I)^{-p}, \quad (2.18)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (2.19)$$

où

$$\varphi_i \simeq u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, I,$$

$$f_i \simeq f(x_i), \quad i = 0, \dots, I,$$

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2 U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}.$$

### 2.3.1 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret en espace (2.16)-(2.19) à partir d'un système différentiel non-linéaire autonome du premier degré.

**Théorème 2.16.** *Pour chaque pas  $h$  fixé, le problème semi-discret en espace (2.16)-(2.19) admet une unique solution maximale  $([0, T^h], U_h(\cdot))$ , où  $T^h > 0$  désigne le temps d'existence maximal de la solution maximale  $U_h$ .*

*Démonstration.* Soit le problème semi-discret en espace (2.16)-(2.19), on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X = G(X), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

où  $X_0 = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$ . Considérant la fonction  $G$  de la variable  $X = (X_0(t), \dots, X_I(t))$  définie sur  $\mathbb{R}^{I+1}$  par

$$G(X) = (G_0(X), \dots, G_I(X)),$$

où

$$\begin{aligned} G_0(X(t)) &= \frac{2X_1(t) - 2X_0(t)}{h^2} - \frac{2}{h}X_0^{-q}(t) + f_0(1 - X_0(t))^{-p}, \\ G_i(X(t)) &= \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2} + f_i(1 - X_i(t))^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ G_I(X(t)) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} + f_I(1 - X_I(t))^{-p}. \end{aligned}$$

Comme  $G$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{I+1}$ , on obtient le résultat souhaité par le Théorème B.7 (Annexe B.2). □

### 2.3.2 Convergence de la solution du problème semi-discret

Nous prouvons le résultat de convergence suivant.

**Théorème 2.17.** *Supposons que le problème continu (2.1)-(2.4) a une solution  $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T])$  telle que  $\inf_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \alpha$  et la donnée initiale en (2.19) vérifie*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \text{quand } h \rightarrow 0, \quad (2.20)$$

où  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ ,  $t \in [0, T]$ . Alors pour  $h$  assez petit, le problème semi-discret (2.16)-(2.19) a une unique solution  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telle que

$$\max_{t \in [0, T]} (\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty) = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Pour chaque  $h$ , le problème semi-discret (2.16)-(2.19) a une unique solution  $U_h \in C^1((0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ . Soit  $t(h)$  la plus grande valeur de  $t > 0$  telle que

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour } t \in (0, t(h)). \quad (2.21)$$

De la relation (2.20) on tire que  $t(h) > 0$  pour  $h$  assez petit. Soit  $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$ , l'inégalité triangulaire nous permet d'avoir

$$\|U_h(t)\|_{\inf} \geq \|u(\cdot, t)\|_{\inf} - \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, \quad t \in (0, t^*(h)),$$

ce qui conduit à

$$\|U_h(t)\|_{\inf} \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{pour } t \in (0, t^*(h)). \quad (2.22)$$

Soient l'erreur de discrétisation  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  et le vecteur  $Z_h$  défini par

$$Z_i(t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Lh^2) \exp((K+1)(t - x^2 + 2x)), \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in (0, t^*(h)).$$

L'utilisation du Lemme 1.5 nous permet d'obtenir  $z_i(t) > |e_i(t)|$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in (0, t^*(h))$ . Ce qui nous conduit à

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq \exp((K+1)(t - x^2 + 2x)) (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Lh^2), \quad t \in (0, t^*(h)).$$

Supposons que  $T > t(h)$ , de l'égalité (2.21) on obtient

$$\frac{\alpha}{2} = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Lh^2) \exp((K+1)(T - x^2 + 2x)).$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, le terme de droite de l'expression au-dessus tend vers 0, ce qui nous permet d'en déduire que  $\frac{\alpha}{2} \leq 0$ . Ce qui est impossible.  $\square$

### 2.3.3 Quelques propriétés du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous donnons quelques propriétés de notre problème semi-discret qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 2.18.** Soit  $V_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ .

I)  $V_h$  est appelée sur-solution du problème semi-discret (2.16)-(2.19) si

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i - \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} &\geq f_i(1 - V_i)^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_0 - \frac{2V_1 - 2V_0}{h^2} + \frac{2}{h}V_0^{-q} &\geq f_0(1 - V_0)^{-p}, \quad t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_I - \frac{2V_{I-1} - 2V_I}{h^2} &\geq f_I(1 - V_I)^{-p}, \quad t \in [0, T], \\ V_i(0) &\geq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

II)  $V_h$  est appelée sous-solution du problème semi-discret (2.16)-(2.19) si

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i - \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} &\leq f_i(1 - V_i)^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1, t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_0 - \frac{2V_1 - 2V_0}{h^2} + \frac{2}{h}V_0^{-q} &\leq f_0(1 - V_0)^{-p}, \quad t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_I - \frac{2V_{I-1} - 2V_I}{h^2} &\leq f_I(1 - V_I)^{-p}, \quad t \in [0, T], \\ V_i(0) &\leq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

**Lemme 2.19.** Soit  $U_h$  la solution de (2.16)-(2.19). Supposons la condition 2.10, et que la donnée initiale en (2.19) vérifie

$$\varphi_i < \varphi_{i+1}, \quad i = 0, \dots, I-1,$$

avec  $\varphi_h$  une sous-solution strictement positive. Alors, on a

$$(I) \quad 0 < \varphi_i \leq U_i(t), \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T];$$

$$(II) \quad U_i(t) < U_{i+1}(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad t \in [0, T].$$

*Démonstration.* (I)  $\varphi_h$  étant une sous-solution de (2.16)-(2.19), la Définition 2.18 nous donne

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} - f_i(1 - \varphi_i)^{-p} &= -\delta^2\varphi_i - f_i(1 - \varphi_i)^{-p} \leq 0, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ -\frac{2\varphi_1 - 2\varphi_0}{h^2} + \frac{2}{h}\varphi_0^{-q} - f_0(1 - \varphi_0)^{-p} &= -\delta^2\varphi_0 + \frac{2}{h}\varphi_0^{-q} - f_0(1 - \varphi_0)^{-p} \leq 0, \\ -\frac{2\varphi_{I-1} - 2\varphi_I}{h^2} - f_I(1 - \varphi_I)^{-p} &= -\delta^2\varphi_I - f_I(1 - \varphi_I)^{-p} \leq 0. \end{aligned}$$

On obtient après calculs

$$\begin{aligned}
-\delta^2\varphi_i - f_i(1 - \varphi_i)^{-p} &\leq \frac{d}{dt}U_i - \delta^2U_i - f_i(1 - U_i)^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\
-\delta^2\varphi_0 + \frac{2}{h}\varphi_0^{-q} - f_0(1 - \varphi_0)^{-p} &\leq \frac{d}{dt}U_0 - \delta^2U_0 + \frac{2}{h}U_0^{-q} - f_0(1 - U_0)^{-p}, \\
-\delta^2\varphi_I - f_I(1 - \varphi_I)^{-p} &\leq \frac{d}{dt}U_I - \delta^2U_I - f_I(1 - U_I)^{-p}, \\
0 < \varphi_i &\leq U_i(0), \quad i = 0, \dots, I.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.6, on obtient  $U_i(t) \geq \varphi_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in [0, T]$ .

(II) Introduisons le vecteur  $Z_h$  tel que  $Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, I-1$ ,  $t \in [0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I-1\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité au dessus. On constate que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I-1, \\
\delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-2, \\
\delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\
\delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I-1.
\end{aligned}$$

On obtient après calculs

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - f_{i_0+1}(1 - U_{i_0+1}(t_0))^{-p} + f_{i_0}(1 - U_{i_0}(t_0))^{-p} &< 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\
\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - f_{i_0+1}(1 - U_{i_0+1}(t_0))^{-p} + f_{i_0}(1 - U_{i_0}(t_0))^{-p} - \frac{2}{h}U_{i_0}^{-q}(t_0) &< 0, \quad i_0 = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui est contraire à (2.16)-(2.18) et complète notre preuve.

□

**Remarque 2.20.** *Le résultat précédent assure que le minimum (maximum) de chaque composante de notre solution est atteint au premier (dernier) nœud correspondant au point  $x = 0$  ( $x = 1$ ).*

Dans la sous-section suivante, nous prouvons sous certaines conditions sur la donnée initiale que la solution de notre problème semi-discret (2.1)-(2.4) s'éteint en un temps fini, puis nous montrons la convergence de ce temps d'extinction semi-discret

vers celui du problème continu considéré. Une estimation des différentes vitesses d'extinction y sera proposée.

Avant tout, introduisons les deux Définitions suivantes.

**Définition 2.21.** On dit que la solution  $U_h$  de (2.16)-(2.19) s'éteint en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_q^h$  tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

- (I)  $\min_{0 \leq i \leq I} U_i > 0$  pour  $t \in [0, T_q^h)$ , mais  $\lim_{t \rightarrow T_q^h} \min_{0 \leq i \leq I} U_i = 0$ .
- (II)  $0 < \max_{0 \leq i \leq I} U_i < 1$  pour  $t \in [0, T_q^h)$ , mais  $\lim_{t \rightarrow T_q^h} \max_{0 \leq i \leq I} U_i = 1$ .

### 2.3.4 Extinction et convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret sous la condition 2.8

Dans cette sous-section, nous prouvons l'extinction et la convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret (2.16)-(2.19) sous la condition 2.8.

**Lemme 2.22.** Soit  $U_h$  la solution de (2.16)-(2.19). Supposons que la donnée initiale en (2.19) satisfait la condition 2.8 . Alors,

$$\frac{d}{dt} U_i < 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T].$$

*Démonstration.* Considérons le vecteur  $Z_h$  défini par  $Z_i(t) = \frac{d}{dt} U_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in (0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) < 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité au dessus. On constate que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \geq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - p f_{i_0} (1 - U_{i_0}(t_0))^{-p-1} Z_{i_0}(t_0) &> 0, \quad i_0 = 1, \dots, I, \\ \frac{d}{dt} Z_0(t_0) - \delta^2 Z_0(t_0) - \left( \frac{2}{h} q U_0^{-q-1}(t_0) + p f_0 (1 - U_0(t_0))^{-p-1} \right) Z_0(t_0) &> 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction des égalités (2.16)-(2.18), d'où le résultat souhaité.  $\square$

Établissons maintenant le résultat principal de cette sous section.

**Théorème 2.23.** Soit  $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0,T_q))$ , la solution de (2.1)-(2.4) qui s'éteint en un temps fini  $T_q$ . Supposons que la donnée initiale en (2.19) satisfait la condition 2.8 et que l'erreur de la donnée initiale est d'ordre  $o(1)$ . Alors pour  $h$  assez petit, la solution approximative  $U_h$  s'éteint en un temps fini  $T_q^h$  pour  $p > 0$ ,  $q > 0$  et nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_q^h = T_q.$$

*Démonstration.* Introduisons maintenant la fonctionnelle  $J$  et son approximation numérique  $J_h$  comme suit : Pour  $t \in [0, T_q)$

$$J(t) = \int_0^1 u \, dx \quad \text{et} \quad J_h(t) = \sum_{i=0}^I h U_i. \quad (2.23)$$

Comme  $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T_q))$ , on a

$$\frac{d}{dt} J = \int_0^1 u_t \, dx.$$

En utilisant (2.1)-(2.3), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= \int_0^1 \left( u_{xx} + f(x)(1-u)^{-p} \right) dx, \\ \frac{d}{dt} J &= -u^{-q}(0,t) + \int_0^1 f(x)(1-u)^{-p} dx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Il est bien connu que si la donnée initiale en (2.4) vérifie les conditions 2.5 & 2.6 alors, la solution  $u$  du problème (2.1)-(2.4) s'éteint en un temps fini  $T_q$  de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow T_q^-} u(0,t) = 0 \quad ([94]).$$

La condition 2.5 sur la donnée initiale implique que  $u_t \leq 0$  pour  $x \in [0,1]$ . En posant

$$0 < \zeta = \frac{\int_0^1 f(x)(1-u_0)^{-p} dx}{u_0^{-q}(0)} < 1, \text{ l'égalité (2.24) devient alors}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &\leq -u^{-q}(0,t) + \int_0^1 f(x)(1-u_0)^{-p} dx \\ &\leq -u^{-q}(0,t) + \zeta u^{-q}(0,t) \\ &\leq (\zeta - 1)u^{-q}(0,t). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\lim_{t \rightarrow T_q^-} \frac{d}{dt} J = -\infty.$$



Multiplions les deux côtés de (2.16) par  $h$  et faisons la somme pour  $i$  allant de 0 à  $I$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^I h \frac{d}{dt} U_i &= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h} + \sum_{i=1}^{I-1} h f_i (1 - U_i)^{-p} + h \frac{d}{dt} U_0 + h \frac{d}{dt} U_I \\
&= \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \sum_{i=0}^{I-2} \frac{U_i - U_{i+1}}{h} + \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p} \\
&= \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p} - U_0^{-q} \\
&= \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p} - U_0^{-q}.
\end{aligned}$$

On obtient de (2.23) que

$$\frac{d}{dt} J_h = \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p} - U_0^{-q}. \quad (2.25)$$

Par la suite on observe que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} J_h &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p} - U_0^{-q} \right) \\
&= \sum_{i=0}^I h p f_i (1 - U_i)^{-p-1} \frac{d}{dt} U_i + q U_0^{-q-1} \frac{d}{dt} U_0.
\end{aligned}$$

On déduit du Lemme 2.19 que

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h \leq 0.$$

On peut alors trouver une constante strictement positive  $\mu$  telle que

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h \leq -\mu \frac{d}{dt} J_h.$$

Reste à montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a pour tout  $t \in [0, T_q - \varepsilon]$

$$|J(t) - J_h(t)| = \left| \int_0^1 u \, dx - \sum_{i=0}^I h U_i \right|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$|J(t) - J_h(t)| \leq \left| \int_0^1 u \, dx - \sum_{i=0}^I h u(x_i, t) \right| + \left| \sum_{i=0}^I h u(x_i, t) - \sum_{i=0}^I h U_i \right|.$$

D'après le Théorème 2.17, il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\begin{aligned}
|J(t) - J_h(t)| &\leq \left| \sum_{i=0}^{I-1} \left( hu(x_i, t) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u \, dx \right) + hu(x_I, t) \right| + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\
&\leq \left| \sum_{i=0}^{I-1} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x_i, t) \, dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u \, dx \right) + hu(x_I, t) \right| + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\
&\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x_i, t) - u| \, dx + hu(x_I, t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2).
\end{aligned}$$

Comme la fonction  $u$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0,1]$ , elle l'est sur chaque intervalle de la forme  $[x_i, x_{i+1}]$ , on applique alors l'inégalité de Taylor-Lagrange. Ce qui donne

$$\begin{aligned}
|J(t) - J_h(t)| &\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_i - x| \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |u_x| \, dx + hu(x_I, t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\
&\leq \sup_{[0,1]} |u_x| \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_i - x| \, dx + hu(x_I, t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\
&\leq \sup_{[0,1]} |u_x| \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + hu(x_I, t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\
&\leq \sup_{[0,1]} |u_x| \times \frac{h}{2} + hu(x_I, t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2).
\end{aligned}$$

Posons  $\Gamma(t) = \frac{1}{2} \sup_{[0,1]} |u_x|$ , on obtient

$$|J(t) - J_h(t)| \leq h\Gamma(t) + hu(x_I, t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2).$$

Ce qui nous donne

$$\sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| \leq h\eta_\varepsilon(t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2),$$

avec  $\eta_\varepsilon(t) = \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} \Gamma(t)$ . On obtient alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0$ .

Ce qui complète la preuve ([88]). □

### 2.3.5 Estimation de la vitesse d'extinction de la solution du problème semi-discret sous la condition 2.8

Dans cette sous-section, nous déterminons la vitesse d'extinction de la solution  $U_h$  de notre schéma semi-discret. Nous montrons aussi que l'estimation de la vitesse

d'extinction obtenue pour notre schéma semi-discret proche du temps d'extinction numérique est différente de celle du continu.

Déterminons maintenant les limites supérieure et inférieure de la vitesse d'extinction.

**Théorème 2.24.** *Supposons que la condition 2.10 soit satisfaite et que la donnée initiale en (2.19) vérifie*

$$\delta^2 \varphi_i + f_i(1 - \varphi_i)^{-p} \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.26)$$

$$\delta^2 \varphi_0 + f_0(1 - \varphi_0)^{-p} - \frac{2}{h} \varphi_0^{-q} + \epsilon \varphi_0^{-q} \leq 0, \quad (2.27)$$

pour une certaine constante  $\epsilon \in (0, 1]$ . Alors, proche du temps d'extinction numérique  $T_q^h$ , la solution  $U_h$  du problème (2.16)-(2.19) a comme estimation de sa vitesse d'extinction l'expression suivante

$$U_0(t) \sim (T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}},$$

en ce sens qu'ils existent deux constantes positives  $C_1, C_2$  telles que

$$C_1(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}} \leq U_0(t) \leq C_2(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}, \quad \text{pour } t \in (0, T_q^h). \quad (2.28)$$

*Démonstration.* Soit le vecteur  $J_h$  défini de la manière suivante

$$J_i(t) = \frac{d}{dt} U_i, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$J_0(t) = \frac{d}{dt} U_0 + \epsilon U_0^{-q}.$$

On obtient après calcul

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} U_i - \delta^2 U_i \right), \quad i = 1, \dots, I, \\ \frac{d}{dt} J_0 - \delta^2 J_0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} U_0 - \delta^2 U_0 \right) - \epsilon q U_0^{-q-1} \frac{d}{dt} U_0 - \epsilon \delta^2 U_0^{-q}. \end{aligned}$$

Du Lemme 1.13 et des égalités (2.16)-(2.18) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i &= p f_i (1 - U_i)^{-p-1} J_i, \quad i = 1, \dots, I, \\ \frac{d}{dt} J_0 - \delta^2 J_0 &\leq \left( \frac{2}{h} q U_0^{-q-1} + p f_0 (1 - U_0)^{-p-1} \right) J_0 - \epsilon p U_0^{-q} f_0 (1 - U_0)^{-p-1} - \epsilon q U_0^{-q} f_0 (1 - U_0)^{-p}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i &= p f_i (1 - U_i)^{-p-1} J_i, \quad i = 1, \dots, I, \\ \frac{d}{dt} J_0 - \delta^2 J_0 &\leq \left( \frac{2q}{h} U_0^{-q-1} + p f_0 (1 - U_0)^{-p-1} \right) J_0. \end{aligned}$$

En posant  $t = 0$ , on observe des inégalités (2.26)-(2.27) que

$$\begin{aligned} J_i(0) &= \delta^2 \varphi_i + f_i(1 - \varphi_i)^{-p} \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, \\ J_0(0) &= \delta^2 \varphi_0 + f_0(1 - \varphi_0)^{-p} - \frac{2}{h} \varphi_0^{-q} + \varepsilon \varphi_0^{-q} \leq 0. \end{aligned}$$

Il en résulte du Lemme 1.4 que  $J_i(t) \leq 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in (0, T_q^h)$ . Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt} U_0 + \varepsilon U_0^{-q} \leq 0, \quad \text{pour } t \in (0, T_q^h).$$

En intégrant l'inégalité au dessus sur l'intervalle  $(t, T_q^h)$ , on obtient

$$U_0(t) \geq (\varepsilon(q+1))^{\frac{1}{q+1}} (T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}, \quad (2.29)$$

qui est la borne inférieure recherchée.

**Remarque 2.25.** On constate du Lemme 2.19 que  $U_0(t) = \min_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$ ,  $t \in (0, T_q^h)$ .

Établissons maintenant la borne supérieure de (2.28).

Soit l'indice  $i_0$  tel que  $U_{i_0}(t) = \min_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$ ,  $t \in (0, T_q^h)$ . On remarque que

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{U_{i_0+1}(t) - 2U_{i_0}(t) + U_{i_0-1}(t)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \geq 0, \\ \delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \geq 0. \end{aligned}$$

De ce qui précède on obtient  $\frac{d}{dt} U_0(t) \geq -\frac{2}{h} U_0^{-q}(t)$ . En intégrant de part et d'autre de l'inégalité précédente sur l'intervalle  $(t, T_q^h)$  on obtient

$$U_0(t) \leq \left( \frac{2(q+1)}{h} \right)^{\frac{1}{q+1}} (T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}.$$

D'où le résultat souhaité. □

**Remarque 2.26.** Précisons que la vitesse d'extinction numérique obtenue avec notre schéma semi-discret,  $(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}$ , est différente (plus grande) de celle obtenue pour le problème continu qui est estimée comme suit,  $(T_q - t)^{\frac{1}{2(q+1)}}$  ([94; 95]).

### 2.3.6 Extinction et convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret sous la condition 2.9

Nous prouvons ici l'extinction et la convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret (2.16)-(2.19) sous la condition 2.9.

**Lemme 2.27.** *Soit  $U_h$  la solution du problème semi-discret (2.16)-(2.19). Supposons que la donnée initiale en (2.19) satisfait la condition 2.9. Alors,*

$$\frac{d}{dt}U_i > 0, \quad \text{pour } i = 0, \dots, I, t \in [0, T].$$

*Démonstration.* Considérons le vecteur  $Z_h$  défini par  $Z_i(t) = \frac{d}{dt}U_i, t \in (0, T], i = 0, \dots, I$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) > 0$ , pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité au dessus. On constate que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - pf_{i_0}(1 - U_{i_0}(t_0))^{-p-1}Z_{i_0}(t_0) &< 0, \quad i_0 = 1, \dots, I, \\ \frac{d}{dt}Z_0(t_0) - \delta^2 Z_0(t_0) - \left(\frac{2}{h}qU_0^{-q-1}(t_0) + pf_0(1 - U_0(t_0))^{-p-1}\right)Z_0(t_0) &< 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction des égalités (2.16)-(2.18), d'où le résultat souhaité.  $\square$

Soit  $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T_q))$ , pour toute variable  $t \in [0, T_q)$ , définissons la fonctionnelle  $J$  par

$$J(t) = \int_0^1 (1 - u) dx. \quad (2.30)$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J &= - \int_0^1 u_t dx \\
&= - \int_0^1 u_{xx} dx - \int_0^1 f(x)(1-u)^{-p} dx \\
&= u^{-q}(0,t) - \int_0^1 f(x)(1-u)^{-p} dx.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

On sait que la condition 2.7 sur la donnée initiale implique que  $u_t \geq 0$  pour  $x \in [0,1]$

et  $t \in [0, T_q)$ . Posons  $0 < \zeta = \frac{u_0^{-q}(0)}{\int_0^1 f(x)(1-u_0)^{-p}} < 1$ , l'égalité (2.31) devient alors

$$\frac{d}{dt}J \leq u_0^{-q}(0) - \int_0^1 f(x)(1-u)^{-p} dx \tag{2.32}$$

$$\leq (\zeta - 1) \int_0^1 f(x)(1-u)^{-p} dx. \tag{2.33}$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow T_q^-} \max_{x \in [0,1]} u(x,t) = 1$  (Sect 2.2.3), on a  $\lim_{t \rightarrow T_q^-} \frac{d}{dt}J = -\infty$ .

Soit  $J_h$  telle que  $J_h(t) = \sum_{i=0}^I h(1 - U_i)$ ,  $t \in [0, T_q)$ , l'approximation numérique de la fonctionnelle  $J$  définie en (2.30). En multipliant les deux côtés de (2.16)-(2.19) par  $-h$  et en sommant de 0 à  $I$  en fonction de  $i$ , on obtient par une démarche similaire à celle de la Sect 2.3.4

$$- \sum_{i=0}^I h \frac{d}{dt} U_i = U_0^{-q} - \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p}.$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} J_h &= \frac{d}{dt} \left( U_0^{-q} - \sum_{i=0}^I h f_i (1 - U_i)^{-p} \right) \\
&= -q U_0^{-q-1} \frac{d}{dt} U_0 + \sum_{i=0}^I h p f_i (1 - U_i)^{-p-1} \frac{d}{dt} U_i.
\end{aligned}$$

On déduit du Lemme 2.27 que

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h \leq 0.$$

On peut donc trouver une constante  $\lambda$  strictement positive telle que

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h \leq -\lambda \frac{d}{dt} J_h.$$

Montrons maintenant que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J_h(t) - J(t)| = 0$ .

On sait que pour  $\varepsilon > 0$  et  $t \in [0, T_q - \varepsilon]$ , on a

$$\begin{aligned} |J_h(t) - J(t)| &= \left| \int_0^1 (1-u) dx - \sum_{i=0}^I h(1-U_i) \right| \\ &= \left| - \int_0^1 u dx - (I+1)h + \sum_{i=0}^I hU_i \right|, \end{aligned}$$

on obtient après utilisation de l'inégalité triangulaire

$$|J_h(t) - J(t)| \leq \left| \sum_{i=0}^I hu(x_i, t) - \int_0^1 u dx - (I+1)h \right| + \left| \sum_{i=0}^I h(u(x_i, t) - U_i) \right|.$$

D'après le Théorème 2.17, il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\begin{aligned} |J(t) - J_h(t)| &\leq \left| \sum_{i=0}^{I-1} \left( hu(x_i, t) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u dx \right) + h(u(x_I, t) - I - 1) \right| + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^{I-1} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x_i, t) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u dx \right) + h(u(x_I, t) - I - 1) \right| + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x_i, t) - u| dx + h(u(x_I, t) - I - 1) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2). \end{aligned}$$

Comme la fonction  $u$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , elle l'est sur chaque intervalle de la forme  $[x_i, x_{i+1}]$ . En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange on obtient :

$$\begin{aligned} |J(t) - J_h(t)| &\leq \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_i - x| \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |u_x| dx + h(u(x_I, t) - I - 1) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sup_{[0, 1]} |u_x| \sum_{i=0}^{I-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_i - x| dx + h(u(x_I, t) - I - 1) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sup_{[0, 1]} |u_x| \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + h(u(x_I, t) - I - 1) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \\ &\leq \sup_{[0, 1]} |u_x| \times \frac{h}{2} + h(u(x_I, t) - I - 1) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2). \end{aligned}$$

Posons  $\Gamma(t) = \frac{1}{2} \sup_{[0, 1]} |u_x|$  on obtient

$$|J(t) - J_h(t)| \leq h(\Gamma(t) + u(x_I, t) - I - 1) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2),$$

ce qui nous donne

$$\sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| \leq h\eta_\varepsilon(t) + c(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2)$$

$$\text{avec } \eta_\varepsilon(t) = \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} \Gamma(t) + u(x_I, t) - I - 1.$$

On obtient alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0$ . On vient ici de prouver le résultat suivant ([88]).

**Théorème 2.28.** *Soit  $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T_q])$ , la solution de (2.1)-(2.4) qui s'éteint en un temps fini  $T_q$ . Supposons que la donnée initiale en (2.19) satisfait la condition 2.9 et que l'erreur de la donnée initiale est d'ordre  $\circ(1)$ . Alors pour  $h$  assez petit, la solution approximative  $U_h$  s'éteint en un temps fini  $T_q^h$  pour  $p > 0$ ,  $q > 0$  et nous avons*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_q^h = T_q.$$

### 2.3.7 Estimation de la vitesse d'extinction numérique sous la condition 2.9

**Théorème 2.29.** *Supposons que pour  $p > 0$  et  $q > 0$ , la solution  $U_h$  du problème semi-discret (2.16)-(2.19) s'éteint en temps fini  $T_q^h$  sous la condition 2.9. Alors proche de ce temps d'extinction semi-discret ils existent deux constantes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telles que*

$$1 - \Gamma_1(T_q^h - t)^{\frac{1}{p+1}} \leq \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \leq 1 - \Gamma_2(T_q^h - t)^{\frac{1}{p+1}}.$$

*Démonstration.* Soit la fonctionnelle  $J_h$  telle que

$$J_i(t) = \frac{d}{dt} U_i - \varepsilon(1 - U_i)^{-p}, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T_q^h),$$

où  $\varepsilon$  est une constante strictement positive à préciser plus-tard. On obtient après plusieurs calculs

$$\frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} U_i - \delta^2 U_i \right) - \varepsilon p (1 - U_i)^{-p-1} \frac{d}{dt} U_i + \varepsilon \delta^2 (1 - U_i), \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_q^h).$$

En utilisant le Lemme 1.13 on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i &\geq \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} U_i - \delta^2 U_i \right) - \varepsilon p (1 - U_i)^{-p-1} \left( \frac{d}{dt} U_i - \delta^2 U_i \right), \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_q^h) \\ &\geq p f_i (1 - U_i)^{-p-1} J_i, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_q^h). \end{aligned}$$



On en déduit que

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i - p f_i (1 - U_i)^{-p-1} J_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_q^h).$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, on observe que  $J_h(0) \geq 0$ . On déduit du Lemme 1.4 que  $J_h(t) \geq 0$  pour  $t \in (0, T_q^h)$ . Ce qui implique que

$$(1 - U_i)^p dU_i \geq \varepsilon dt.$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus de  $t$  à  $T_q^h$  on obtient

$$\max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \leq 1 - (\varepsilon(p+1))^{\frac{1}{p+1}} (T_q^h - t)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Reste maintenant à établir la borne inférieure de la vitesse d'extinction.

Posons  $U_{i_0}(t) = \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$  pour  $t \in (0, T_q^h)$ . On observe que

$$\frac{d}{dt}U_{i_0} \leq f_{i_0} (1 - U_{i_0})^{-p},$$

ce qui conduit à

$$(1 - U_{i_0})^p dU_{i_0} \leq f_{i_0} dt.$$

En intégrant l'inégalité précédente de  $t$  à  $T_q^h$  on obtient

$$\max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \geq 1 - (f_{i_0}(p+1))^{\frac{1}{p+1}} (T_q^h - t)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Et la preuve est complète. □

**Remarque 2.30.** *Contrairement à l'estimation de la vitesse d'extinction numérique proche du temps d'extinction donnée sous la condition 2.8, on constate ici que la vitesse donnée est similaire à celle du problème continu ( Sect 2.2.4 ).*

## 2.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous illustrons nos résultats précédents (temps d'extinction, lieux et vitesses d'extinction proche des temps d'extinction, ...) par quelques expériences numériques. Nous traitons d'abord le cas où la donnée initiale satisfait la condition 2.8, et par la suite le cas où elle satisfait la condition 2.9. Dans les différents cas, nous transformons le problème semi-discret (2.16)-(2.19) en deux différents problèmes d'explosion, et cela, grâce à deux changements de fonctions inconnues. Dans toute la suite de ce chapitre  $T^h$  représente le temps d'extinction numérique.

### 2.4.1 Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (2.19) vérifie la condition 2.8

Les résultats numériques dans cette partie sont présentés dans le cas où le problème semi-discret (2.16)-(2.19) s'éteint en un temps fini  $T^h$  sous la condition 2.8. Pour ces différentes expériences, nous utilisons,  $u_0(x) = -x^\varepsilon + \varepsilon x + \varepsilon^{\frac{-1}{q}}$ , avec  $0 < p \leq 1$ ,  $0 < q \leq \frac{1}{2}$  et  $\varepsilon = \frac{101}{100}$ , et  $f(x) = \frac{1}{1000}$ . Avant tout, transformons le problème semi-discret (2.16)-(2.19) en posant  $V_i(t) = \frac{1}{U_i(t)}$ . On obtient un nouveau problème semi-discret comme suit :

$$\frac{d}{dt} V_i = \frac{1}{h^2} \left( 2V_i - \frac{V_i^2}{V_{i-1}} - \frac{V_i^2}{V_{i+1}} \right) - f_i V_i^{p+2} (V_i - 1)^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} V_0 = \frac{2}{h^2} \left( V_0 - \frac{V_0^2}{V_1} \right) + \frac{2}{h} V_0^{2+q} - f_0 V_0^{2+p} (V_0 - 1)^{-p}, \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dt} V_I = \frac{2}{h^2} \left( V_I - \frac{V_I^2}{V_{I-1}} \right) - f_I V_I^{p+2} (V_I - 1)^{-p}, \quad (2.36)$$

$$V_i(0) = (\varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I. \quad (2.37)$$

Des équations semi-discrètes (2.34)-(2.37), nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V = g(V), & 0 < t < T^h, \\ V(0) = \varphi^{-1}, \end{cases}$$

avec  $V = (V_0(t), \dots, V_I(t))^T$  et  $g = (g_0, \dots, g_I)$  définie par

$$g_0 = \frac{2}{h^2} \left( V_0 - \frac{V_0^2}{V_1} \right) + \frac{2}{h} V_0^{2+q} - f_0 V_0^{2+p} (V_0 - 1)^{-p},$$

$$g_i = \frac{1}{h^2} \left( 2V_i - \frac{V_i^2}{V_{i-1}} - \frac{V_i^2}{V_{i+1}} \right) - f_i V_i^{p+2} (V_i - 1)^{-p}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$g_I = \frac{2}{h^2} \left( V_I - \frac{V_I^2}{V_{I-1}} \right) - f_I V_I^{p+2} (V_I - 1)^{-p},$$

$$V_i(0) = (\varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I.$$

Les variables  $t$  et  $V_i$  sont considérées comme des fonctions de la longueur d'arc  $\eta$  telles que  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} t(\eta) = T^h$  et  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \|V_h(\eta)\|_\infty = \infty$  (Théorème C.2, Annexe C.1). Puisque  $d\eta^2 = dt^2 + dV_0^2 + \dots + dV_I^2$ , les variables  $t(\eta)$  et  $V_i(\eta)$  satisfont l'équation

différentielle

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} t \\ V_0 \\ \vdots \\ V_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I g_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ g_0 \\ \vdots \\ g_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \eta < \infty,$$

$$t(0) = 0, \quad V_i(0) = \varphi_i^{-1} > 0, \quad i = 0, \dots, I.$$

Soient les suites  $\{\eta_l\}$  et  $t(\eta_l)$  comme définies par le Théorème C.2 ( Annexe C.1 ). Posons  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ) et appliquons l'algorithme  $\Delta^2$  d'Aitken ( Annexe C.2).

TABLEAU 2.1 – Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour  $p = 1/4, q = 1/4, k = 12$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,320236408	6304	0,79
32	0,318644976	12122	0,79
64	0,318150680	23261	0,79
128	0,318001392	44785	0,79
256	0,317957379	87402	0,79
512	0,317944663	178187	0,79

TABLEAU 2.2 – Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour  $p = 1/4, q = 1/2, k = 12$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,200847014	4490	0,67
32	0,198905750	8498	0,67
64	0,198304689	16154	0,67
128	0,198124110	30905	0,67
256	0,198071185	59982	0,67
512	0,198055981	120646	0,67

TABLEAU 2.3 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1/2, q = 1/4, k = 12$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,320475664	6306	0,79
32	0,318883760	12127	0,79
64	0,318389339	23270	0,79
128	0,318240017	44802	0,79
256	0,318195997	87437	0,79
512	0,318183278	178267	0,79

TABLEAU 2.4 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1/2, q = 1/2, k = 12$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,201026888	4492	0,67
32	0,199084652	8502	0,67
64	0,198483334	16161	0,67
128	0,198302688	30920	0,67
256	0,198249747	60011	0,67
512	0,198234539	120710	0,67

**Remarque 2.31.** Les tableaux ci-dessus nous présentent quelques résultats numériques obtenus pour l’extinction de notre problème semi-discret sous la condition 2.8. Ces résultats montrent que lorsque l’exposant  $p$  de la source à l’intérieur du domaine change, le temps d’extinction et la vitesse d’extinction reste inchangés. Par contre, lorsque l’exposant du flux à la frontière varie (croît) de  $1/4$  à  $1/2$ , le temps d’extinction et la vitesse d’extinction diminuent respectivement de  $0,32$  à  $0,20$  et de  $0,79$  à  $0,67$ . Ce qui nous permet d’affirmer que le terme source n’a aucun effet sur l’extinction de la solution sous la condition 2.8.

En d’autres illustrations, dans ce qui suit, nous donnons quelques graphiques pour illustrer notre analyse. Les FIGURE 2.1 - FIGURE 2.6 ont été réalisées pour  $I = 128$  et  $p = 1/4$ . On observe à travers ces différentes figures l’évolution de la solution semi-discrète en fonction du temps et de l’espace. Nous remarquons ici l’extinction de la solution de notre schéma semi-discret en un seul point au bord gauche (point 0).

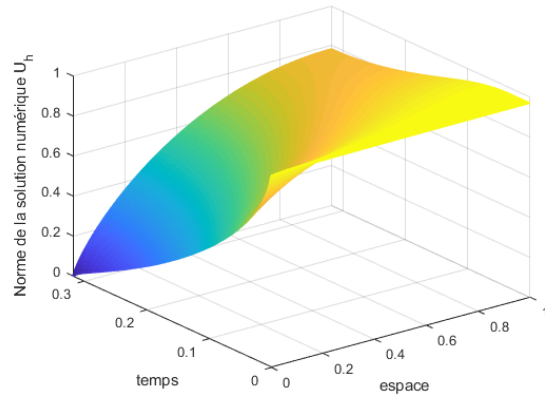


FIGURE 2.1 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 1/4, q = 1/4$ .

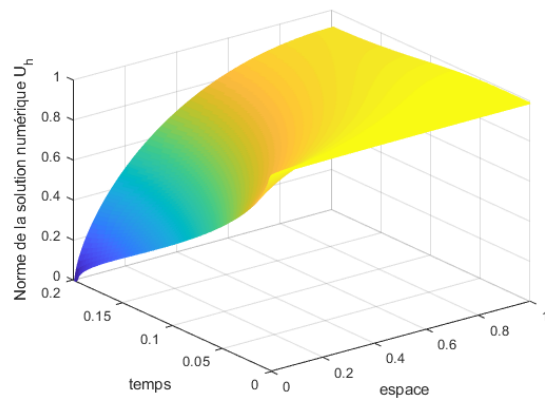


FIGURE 2.2 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 1/4, q = 1/2$ .

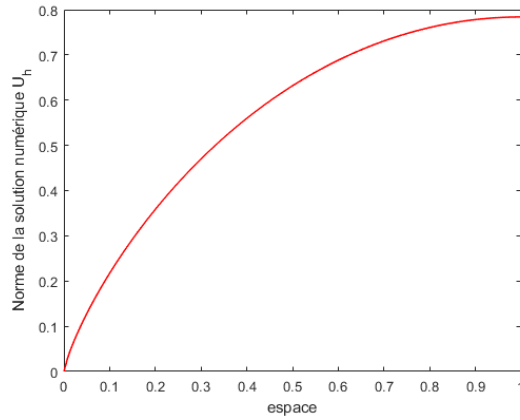


FIGURE 2.3 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction l'espace,  $p = 1/4$ ,  $q = 1/4$ .

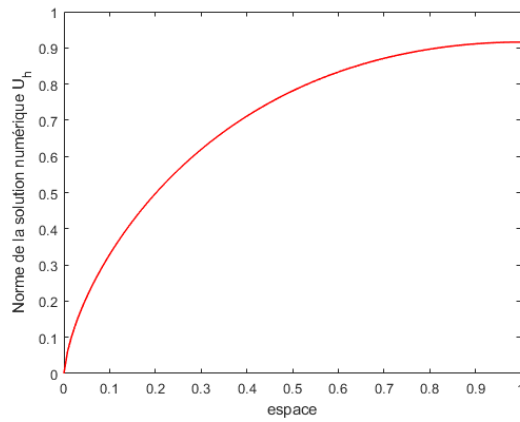


FIGURE 2.4 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 1/4$ ,  $q = 1/2$ .

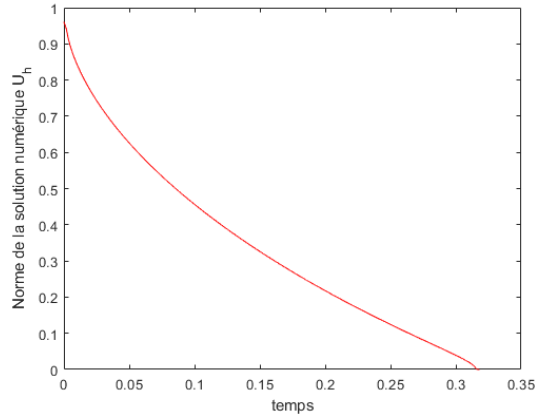


FIGURE 2.5 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 1/4$ ,  $q = 1/4$ .

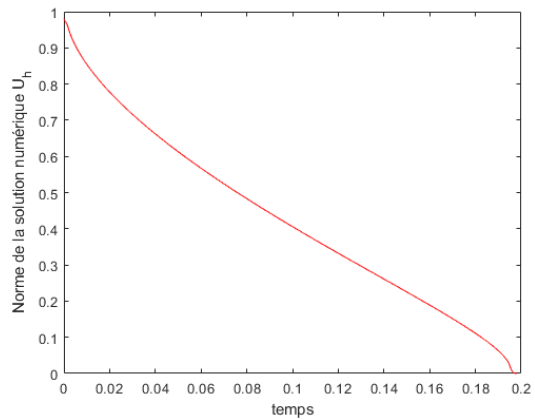


FIGURE 2.6 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 1/4$ ,  $q = 1/2$ .

## 2.4.2 Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (2.19) vérifie la condition 2.9

Nous présentons ici quelques approximations numériques du temps d'extinction, du lieu et de la vitesse d'extinction du problème (2.1)-(2.4), pour  $u_0(x) = \frac{-\varepsilon}{2}x^2 + \varepsilon x + \varepsilon^{\frac{-1}{q}}$ ,  $q \leq 1/4$ ,  $f = 6$  et  $\varepsilon = 3/2$ . Tout d'abord, nous transformons le schéma semi-discret (2.16)-(2.19) en un nouveau schéma semi-discret en posant  $V_i(t) = \frac{1}{1 - U_i(t)}$ .

On obtient alors

$$\frac{d}{dt}V_i = \frac{1}{h^2} \left( 2V_i - \frac{V_i^2}{V_{i-1}} - \frac{V_i^2}{V_{i+1}} \right) + f_i V_i^{p+2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt}V_0 = \frac{2}{h^2} \left( V_0 - \frac{V_0^2}{V_1} \right) - \frac{2}{h} (V_0 - 1)^{-q} V_0^{q+2} + f_0 V_0^{p+2}, \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt}V_I = \frac{2}{h^2} \left( V_I - \frac{V_I^2}{V_{I-1}} \right) + f_I V_I^{p+2}, \quad (2.40)$$

$$V_i(0) = (1 - \varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I. \quad (2.41)$$

Comme dans la sous-section précédente, on obtient le système suivant à l'aide de la méthode de la transformation de la longueur d'arc  $\eta$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} t \\ V_0 \\ \vdots \\ V_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I g_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ g_0 \\ \vdots \\ g_I \end{pmatrix}, & 0 < \eta < \infty, \\ t(0) = 0, \quad V_i(0) = (1 - \varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I, \end{cases} \quad (2.42)$$

où

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{2}{h^2} \left( V_0 - \frac{V_0^2}{V_1} \right) - \frac{2}{h} (V_0 - 1)^{-q} V_0^{q+2} + f_0 V_0^{p+2}, \\ g_i &= \frac{1}{h^2} \left( 2V_i - \frac{V_i^2}{V_{i-1}} - \frac{V_i^2}{V_{i+1}} \right) + f_i V_i^{p+2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ g_I &= \frac{2}{h^2} \left( V_I - \frac{V_I^2}{V_{I-1}} \right) + f_I V_I^{p+2}, \\ V_i(0) &= (1 - \varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Nous définissons ici la suite  $\{\eta_l\}$  par  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l, l = (0, \dots, 10)$ .

TABLEAU 2.5 – Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour  $p = 1/4, q = 1/4, k = 20$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,003793517	1464	0,80
32	0,003798056	1749	0,80
64	0,003799551	2009	0,80
128	0,003800008	2320	0,80
256	0,003800142	2885	0,80
512	0,003800180	4025	0,80



TABLEAU 2.6 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1/4, q = 1/8, k = 20$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,022908678	1917	0,80
32	0,022920034	2334	0,80
64	0,022923418	3022	0,80
128	0,022924390	4362	0,80
256	0,022924662	7005	0,80
512	0,022924737	12813	0,80

TABLEAU 2.7 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1/8, q = 1/4, k = 20$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,006489225	1586	0,89
32	0,006494783	1887	0,89
64	0,006496564	2163	0,89
128	0,006497102	2579	0,89
256	0,006497258	3343	0,89
512	0,006497302	5008	0,89

TABLEAU 2.8 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1/8, q = 1/8, k = 22$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,032355048	2091	0,89
32	0,032365714	2598	0,89
64	0,032368852	3555	0,89
128	0,032369749	5372	0,89
256	0,032370000	8981	0,89
512	0,032370070	16917	0,89

**Remarque 2.32.** Des Tableaux ci-dessus, on remarque la relation entre le flux à la frontière et la source à l’intérieur d’un côté, et le temps d’extinction numérique d’un autre côté. En effet, quand la source à l’intérieur reste constante à  $p = 1/4$ , et que le flux à la frontière croît de  $q = 1/8$  à  $q = 1/4$ , l’extinction se produit plus vite de 0,0229 à 0,0038. De même, lorsque le flux à la frontière reste constant, à  $q = 1/4$ , et que la source à l’intérieur croît, de  $p = 1/8$  à  $p = 1/4$ , l’extinction se produit comme précédemment vite, de 0,0065 à 0,0038. On dira de la source à l’intérieur du domaine et du flux à la frontière qu’ils contribuent tout deux à l’extinction numérique de la solution. Par ailleurs, contrairement au cas du temps

d'extinction numérique, on remarque que le flux à la frontière n'a aucun effet sur la vitesse d'extinction qui ne varie que sous l'influence de la source à l'intérieur du domaine. Elle croît, de 0,80 à 0,89, lorsque  $p$  quand à lui décroît, de  $1/4$  à  $1/8$ .

On voit à travers les FIGURE 2.7 - FIGURE 2.12 l'extinction en temps fini de la solution de notre schéma semi-discret. Phénomène qui se produit pour une valeur maximale de la solution au dernier nœud. De ces différents graphiques, nous observons, soit l'évolution de la solution par rapport au temps et l'espace, soit la représentation de celle-ci par rapport à l'espace d'un côté et au temps de l'autre côté. Les différentes illustrations ont été effectuées pour un nombre de subdivision  $I = 128$ .

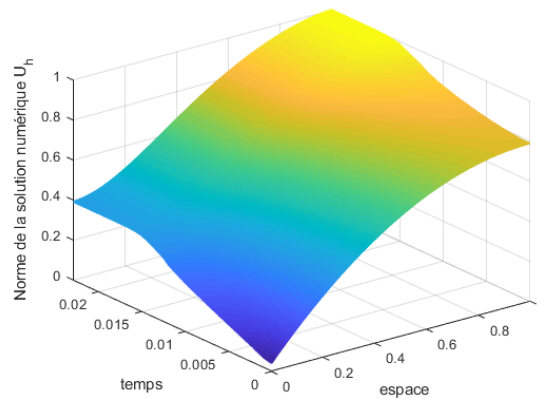


FIGURE 2.7 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 1/4, q = 1/8$ .

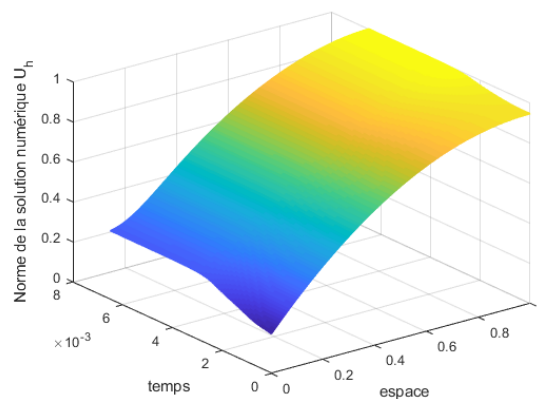


FIGURE 2.8 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 1/8, q = 1/4$ .

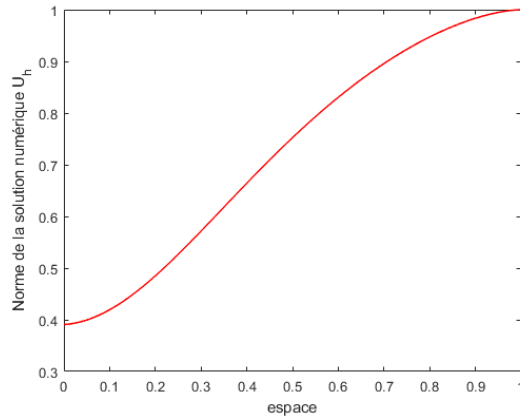


FIGURE 2.9 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 1/4, q = 1/8$ .

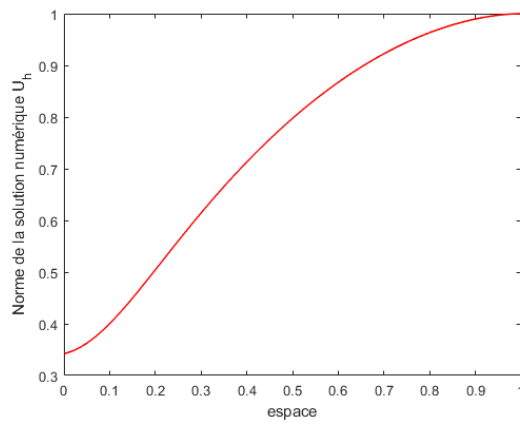


FIGURE 2.10 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 1/8, q = 1/4$ .

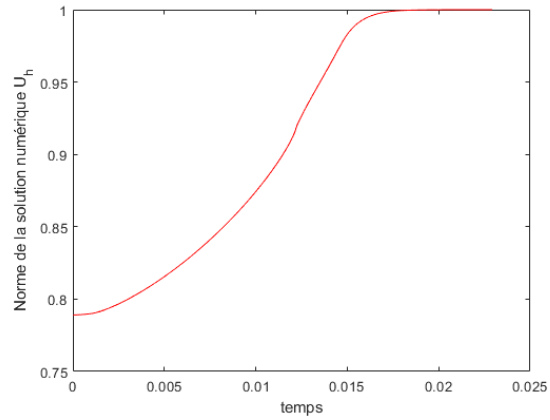


FIGURE 2.11 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 1/4, q = 1/8$ .

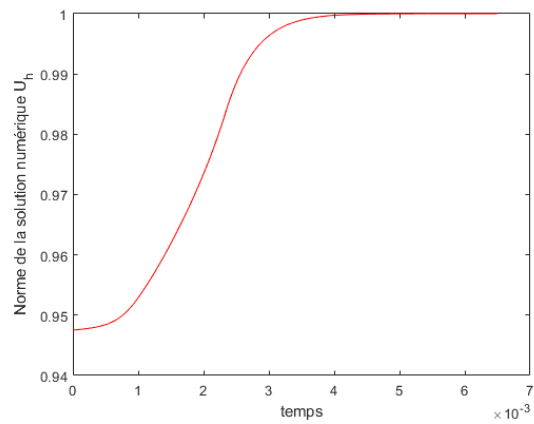


FIGURE 2.12 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 1/8, q = 1/4$ .

# Chapitre 3

## Étude numérique d'une équation parabolique semi-linéaire avec deux sources de singularités de natures différentes

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les approximations numériques de la solution positive d'une équation de la chaleur semi-linéaire,  $u_t = u_{xx} + u^p$ , dans un intervalle borné  $(0,1)$ , avec un flux non-linéaire comme condition à la limite  $u_x(0,t) = 0$ ,  $u_x(1,t) = -u^{-q}(1,t)$ . Par une semi-discrétisation utilisant la méthode des différences finies, nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires, lequel semble être une bonne approximation du problème d'origine. Nous donnons les conditions sous lesquelles la solution positive de ce système s'éteint ou explose en un temps fini, et estimons les vitesses respectives d'extinction ou d'explosion semi-discrètes proches de ces temps.

Considérons le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u^p, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty, \\ u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ u_x(1,t) = -u^{-q}(1,t), \quad 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $p, q > 0$ , et  $u_0$  est une fonction positive vérifiant :  $0 \leq u_0(x) \leq M$ ,  $u_0'(0) = 0$ , et  $u_0'(1) = -u_0^{-q}(1)$ . Tout au long de ce chapitre, nous supposons que la donnée initiale  $u_0$  satisfait l'une des conditions suivantes :

$$u_0''(x) + u_0^p(x) \geq 0 \quad \text{pour } x \in (0,1), p > 1, \text{ et } q > 0, \quad (3.2)$$

$$u_0''(x) + u_0^p(x) \leq 0 \quad \text{pour } x \in (0,1), p > 1, \text{ et } q > 0. \quad (3.3)$$

Le problème (3.1) est un cas unidimensionnel pour un modèle traité dans ([25]). Physiquement, (3.1) peut être considéré comme un modèle de conduction thermique qui intègre des effets d'une réaction non-linéaire (source) et d'un flux sortant non-linéaire à la frontière (émission). Mathématiquement, (3.1) est une combinaison des deux problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u^p, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u_x(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u_x(1,t) = -u^{-q}(1,t), \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Les problèmes (3.4) et (3.5) ont été largement étudiés ( [23; 33; 59; 78; 80] et les références qui y sont citées ). Concernant le problème (3.4), il est bien connu que si  $p > 1$ , la solution positive de ce problème explose en un temps fini  $T_b$  ([78]) et sa vitesse proche du temps d'explosion est donnée par  $(T_b - t)^{\frac{-1}{p-1}}$  ([36]).

Quant au problème (3.5), Deng et Xu ([23]) ont considéré une équation de diffusion non-linéaire  $(\psi(u))_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ , avec une condition à la limite non-linéaire  $u_x(1,t) = -g(u(1,t))$ . Ils ont prouvé l'extinction en temps fini de la solution. En outre, il a été montré dans ([33]) que la solution  $u$  de (3.5) s'éteint en un temps fini, en un unique point  $x = 1$  pour tout  $u_0$ , avec une vitesse d'extinction estimée comme suit  $(T_q - t)^{\frac{1}{2(q+1)}}$ .

Eu égard à tout ce qui précède, une question naturelle se pose : Quel est le comportement de la solution du problème (3.1)? À l'heure actuelle, peu d'auteurs se sont

penchés sur les problèmes avec deux sources de singularités de natures différentes ([24; 25; 26]). Deng et Zhao ([24]) ont considéré le problème aux limites et aux valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^{-q}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = u^p, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où,  $0 < p, q < \infty$ ,  $\Omega$  est un domaine borné dans  $\mathbb{R}^n$  avec comme frontière régulière  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  est la normale extérieure,  $0 \leq u_0(x) \leq M$ , et  $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = u_0^p$  sur  $\partial\Omega$ . Ils ont montré que la solution de leur problème s'éteint ou explose en un temps fini en fonction des conditions sur la donnée initiale, puis caractérisé les ensembles respectifs d'extinction et d'explosion. Par ailleurs, ils ont estimé les différentes vitesses proches des temps d'extinction et d'explosion, montré que ces vitesses sont les mêmes que, celles obtenues dans ([34; 53]) pour la vitesse d'explosion, et dans ([20; 22]) pour celle d'extinction.

Concernant notre problème (3.1), Deng et Zhao ([25]) ont établi des critères pour l'explosion et l'extinction en un temps fini. Aussi, ont ils discuté des ensembles d'extinction et d'explosion et donné une estimation de leur vitesse respective. Par ailleurs, les mêmes auteurs ont caractérisé les ensembles d'états stationnaires et analysé leur instabilité dans ([26]).

Considérons les deux Définitions suivantes :

**Définition 3.1.** Soit  $u$  une solution de (3.1).

(I) On dit qu'elle s'éteint en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_q$  tel que

$$\min_{0 \leq x \leq 1} u(x,t) > 0 \text{ pour } t \in [0, T_q), \text{ mais } \lim_{t \rightarrow T_q^-} \min_{0 \leq x \leq 1} u(x,t) = 0;$$

(II) On dit qu'elle explose en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_b$  tel que :

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty < \infty \text{ pour } t \in [0, T_b), \text{ mais } \lim_{t \rightarrow T_b^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

Notre objectif ici est l'étude numérique du problème (3.5). À notre connaissance, aucune étude numérique concernant ce genre de problème n'est à signaler.

Ce chapitre est écrit de la manière suivante : Dans la section 2, nous faisons l'étude du problème continu (3.5), en énonçant dans un premier temps des résultats d'existence et d'unicité de la solution de ce problème, et dans un second temps en donnant

quelques propriétés. La section 3, quant à elle, est consacrée à la mise en place d'un schéma semi-discret comme dans les chapitres précédents et à l'étude de ce schéma. Étude qui commencera par des résultats d'existence et d'unicité et quelques propriétés de la solution de ce problème semi-discret. Par la suite, nous prouvons sous des conditions différentes, aussi bien l'explosion que l'extinction en temps fini de la solution de notre schéma numérique et montrons la convergence des différents temps numériques vers ceux des temps réels respectifs. Quelques estimations des différentes vitesses, qu'elles soient d'explosion ou d'extinction sont données pour terminer cette étude. Finalement, dans la dernière section, nous donnons quelques résultats numériques.

## 3.2 Étude du problème continu

### 3.2.1 Existence et unicité de la solution du problème continu

L'existence locale et l'unicité de la solution du problème (3.1) ont été déjà prouvés, se référer au Théorème B.2 et au Corollaire A.3 ( Annexe A.1 et B.1 ). La théorie classique des équations paraboliques fournit également des résultats d'existence et d'unicité pour la solution régulière de ce genre de problème ([58; 11]).

Dans la suite de ce chapitre, le temps  $T_{\max}$  désigne le temps d'existence maximale de la solution  $u$  du problème continu (3.1).

### 3.2.2 Propriétés qualitatives du problème continu

L'objectif de cette sous-section est de donner quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu (3.1). Les preuves des résultats suivants sont similaires aux précédentes ( Sect 2.2.2 ).

**Lemme 3.2.** *Supposons que la donnée initiale  $u_0$  satisfait la condition 3.2. Alors, la solution  $u$  du problème (3.1) vérifie  $u_t \geq 0$  pour  $x \in [0,1]$ ,  $t \in [0, T_{\max})$ .*

**Lemme 3.3.** *Supposons que la donnée initiale  $u_0$  satisfait la condition 3.3. Alors, la solution  $u$  du problème (3.1) vérifie  $u_t \leq 0$ , pour  $x \in [0,1]$ ,  $t \in [0, T_{\max})$ .*

**Lemme 3.4.** *Supposons que la donnée initiale  $u_0$  satisfait la condition 3.3. Alors, la solution  $u$  du problème (3.1) vérifie  $u_x(x,t) < 0$ , pour  $x \in (0,1)$ ,  $t \in (0, T_{\max})$ .*



### 3.3 Étude du problème semi-discret

Dans cette partie nous nous intéressons au système d'équations semi-discrètes suivantes

$$\frac{d}{dt}U_i = \delta^2 U_i + U_i^p, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt}U_0 = \delta^2 U_0 + U_0^p, \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}U_I = \delta^2 U_I - \frac{2}{h}U_I^{-q} + U_I^p, \quad (3.8)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (3.9)$$

avec

$$\varphi_i \simeq u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, I,$$

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2 U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2},$$

où  $U_h = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$  est l'approximation de la solution  $u$  du problème (3.1).

#### 3.3.1 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous prouvons, à partir d'un système différentiel non-linéaire autonome du premier degré, l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret en espace (3.6)-(3.9).

**Théorème 3.5.** *Pour chaque pas  $h$  fixé, le problème semi-discret en espace (3.6)-(3.9) admet une unique solution maximale  $([0, T^h], U_h(\cdot))$ , où  $T^h$  désigne le temps d'existence maximal de la solution maximale  $U_h$ .*

*Démonstration.* Considérons le problème semi-discret en espace (3.6)-(3.9), on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = F(X(t)), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

où  $X_0 = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$ . Considérant la fonction  $F$  de la variable  $X(t) = (X_0(t), \dots, X_I(t))$  définie sur  $\mathbb{R}^{I+1}$  par

$$F(X(t)) = (F_0(X), \dots, F_I(X)),$$

où

$$\begin{aligned} F_0(X(t)) &= \frac{2X_1(t) - 2X_0(t)}{h^2} + X_0^p(t), \\ F_i(X(t)) &= \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2} + X_i^p(t), \quad i = 1, \dots, I-1, \\ F_I(X(t)) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} - \frac{2}{h}X_I^{-q}(t) + X_I^p(t). \end{aligned}$$

Comme  $F$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{I+1}$ , on obtient le résultat souhaité par le Théorème B.7 (Annexe B.2).  $\square$

### 3.3.2 Convergence de la solution du problème semi-discret

Nous énonçons ici un Théorème de convergence de la solution  $U_h$  du problème semi-discret (3.6)-(3.9) vers celle du problème continu (3.1).

**Théorème 3.6.** *Supposons que le problème continu (3.1) a une solution  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0,1] \times [0,T])$  et la donnée initiale  $\varphi_h$  en (3.9) satisfait*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \text{quand } h \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Alors pour  $h$  assez petit, le problème semi-discret (3.6)-(3.9) a une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^{I+1})$  telle que

$$\max_{t \in [0,T]} (\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty) = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

### 3.3.3 Quelques propriétés du problème semi-discret

Dans cette sous-section, nous donnons quelques propriétés du problème semi-discret (3.6)-(3.9).

Commençons par la notion de sur et sous-solution.

**Définition 3.7.** *Soit  $V_h \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^{I+1})$ .*

I) *On dit que  $V_h$  est une sur-solution du problème (3.6)-(3.9) si :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i - \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} &\geq V_i^p, \quad i = 0, \dots, I-1, t \in [0,T], \\ \frac{d}{dt}V_0 - \frac{2V_1 - 2V_0}{h^2} &\geq V_0^p, \quad t \in [0,T], \\ \frac{d}{dt}V_I - \frac{2V_{I-1} - 2V_I}{h^2} + \frac{2}{h}V_I^{-q} &\geq V_I^p, t \in [0,T], \\ V_i(0) &\geq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

II) On dit que  $V_h$  est une sous-solution du problème (3.6)-(3.9) si :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i - \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} &\leq V_i^p, \quad i = 0, \dots, I-1, t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_0 - \frac{2V_1 - 2V_0}{h^2} &\leq V_0^p, \quad t \in [0, T], \\ \frac{d}{dt}V_I - \frac{2V_{I-1} - 2V_I}{h^2} + \frac{2}{h}V_I^{-q} &\leq V_I^p, t \in [0, T], \\ V_i(0) &\leq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

**Lemme 3.8.** Soient  $T > 0$  et  $U_h$  la solution du problème semi-discret (3.6)-(3.9). Supposons que la donnée initiale en (3.9) vérifie

$$0 < \varphi_{i+1} < \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I-1,$$

avec  $\varphi_h$  une sous-solution. Alors, on a

$$(I) \quad 0 < \varphi_i \leq U_i(t), \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T].$$

$$(II) \quad U_{i+1}(t) < U_i(t), \quad i = 0, \dots, I-1, t \in [0, T].$$

*Démonstration.* (I) Soit  $\varphi_h$  une sous-solution de (3.6)-(3.8), la Définition 3.7 nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} - \varphi_i^p &= -\delta^2\varphi_i - \varphi_i^p \leq 0, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ -\frac{2\varphi_1 - 2\varphi_0}{h^2} - \varphi_0^p &= -\delta^2\varphi_0 - \varphi_0^p \leq 0, \\ -\frac{2\varphi_{I-1} - 2\varphi_I}{h^2} + \frac{2}{h}\varphi_I^{-q} - \varphi_I^p &= -\delta^2\varphi_I + \frac{2}{h}\varphi_I^{-q} - \varphi_I^p \leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} -\delta^2\varphi_i - \varphi_i^p &\leq \frac{d}{dt}U_i - \delta^2U_i - U_i^p, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ -\delta^2\varphi_0 - \varphi_0^p &\leq \frac{d}{dt}U_0 - \delta^2U_0 - U_0^p, \\ -\delta^2\varphi_I + \frac{2}{h}\varphi_I^{-q} - \varphi_I^p &\leq \frac{d}{dt}U_I + \frac{2}{h}U_I^{-q} - \delta^2U_I - U_I^p, \\ 0 < \varphi_i &\leq U_i(0), \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

On conclut grâce au Lemme 1.6 que  $U_i(t) \geq \varphi_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .

(II) Introduisons le vecteur  $Z_h$  tel que  $Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, I-1, t \in (0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) < 0$ , pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$

pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I-1\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité au dessus. On remarque que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \geq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-2, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = I-1.\end{aligned}$$

De plus, on obtient après différents calculs

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - (U_{i_0+1}^p(t_0) - U_{i_0}^p(t_0)) &> 0, \quad i_0 = 0, \dots, I-2, \\ \frac{d}{dt}Z_{I-1}(t_0) - \delta^2 Z_{I-1}(t_0) + \frac{2}{h}U_I^{-q}(t_0) - (U_I^p(t_0) - U_{I-1}(t_0)) &> 0.\end{aligned}$$

Les inégalités au dessus contredisent (3.6)-(3.8), ce qui complète notre preuve. □

**Remarque 3.9.** Le résultat précédent nous permet d'affirmer que le minimum de chaque composante de la solution de notre schéma semi-discret est atteint au dernier nœud, i.e  $\|U_h(t)\|_{inf} = U_I(t)$ , pour  $t \in [0, T]$ .

### 3.3.4 Explosion et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret

Nous montrons sous certaines conditions que la solution  $U_h$  de notre problème semi-discret explose en temps fini, et prouvons la convergence de ce temps d'explosion numérique vers celui du problème continu.

**Lemme 3.10.** Soit  $U_h$  la solution de (3.6)-(3.9). Supposons que la donnée initiale en (3.9) vérifie

$$\delta^2 \varphi_i + \varphi_i^p > 0, \quad i = 0, \dots, I. \quad (3.11)$$

Alors  $\frac{d}{dt}U_i > 0, i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Considérons le vecteur  $Z_h$  tel que  $Z_i(t) = \frac{d}{dt}U_i, i = 0, \dots, I, t \in [0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t \in (0, T]$  tel que  $Z_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour

un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité au dessus . Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I.\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - pU_{i_0}^{p-1}(t_0)Z_{i_0}(t_0) &< 0, \quad i_0 = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}Z_I(t_0) - \delta^2 Z_I(t_0) - \left(\frac{2}{h}qU_I^{-q-1}(t_0) + pU_I^{p-1}(t_0)\right)Z_I(t_0) &< 0.\end{aligned}$$

Ces inégalités sont en contradiction avec (3.6)-(3.8), d'où le résultat souhaité.  $\square$

Soient les fonctionnelles

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_0^1 u^{p+1} dx + \frac{1}{-q+1} u^{-q+1}(1,t) \quad \text{et} \quad J(t) = \int_0^1 u^2 dx,$$

et leurs approximations semi-discrètes

$$I_h(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^I h U_i^{p+1} + \frac{1}{-q+1} U_I^{-q+1} \quad \text{et} \quad J_h(t) = \sum_{i=0}^I h U_i^2, \quad (3.12)$$

définies sur  $[0, T_b)$ , pour  $0 < q < 1$ .

Soit  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0,1] \times [0, T_b))$ , en appliquant la condition 3.2 et l'inégalité de Jensen's, on constate après intégration par parties que la fonctionnelle  $J$  vérifie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J &= -2u^{-q+1}(1,t) - 2 \int_0^1 u_x^2 dx + 2 \int_0^1 u^{p+1} dx \\ &\geq -2u^{-q+1}(1,0) + 2(1-\lambda) \int_0^1 u^{p+1} dx \\ &\geq -2u^{-q+1}(1,0) + 2(1-\lambda) J^{\frac{p+1}{2}}.\end{aligned}$$

On sait que  $\lim_{t \rightarrow T_b} \|u(\cdot, t)\|_{L^1} = +\infty$  ([25]), on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow T_b} \frac{d}{dt}J = +\infty$  pour  $p > 1$ .

Soient les fonctionnelles  $I_h$  et  $J_h$  comme définies en (3.12). En multipliant les deux côtés de (3.6) par  $h \frac{d}{dt} U_i$ , et en faisant la somme de  $i = 0$  à  $i = I$ , on obtient pour  $0 < q < 1$

$$-\sum_{i=0}^I h \left( \frac{d}{dt} U_i \right)^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^I h U_i^p + \frac{1}{-q+1} U_I^{-q+1} \right).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^I h \left( \frac{d}{dt} U_i \right)^2 &= h \left( \frac{d}{dt} U_0 \right)^2 + h \left( \frac{d}{dt} U_I \right)^2 + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h} \frac{d}{dt} U_i + \sum_{i=1}^{I-1} h U_i^p \frac{d}{dt} U_i \\ &= h U_0^p \frac{d}{dt} U_0 + h U_I^p \frac{d}{dt} U_I + \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_i - U_{i+1}}{h} \frac{d}{dt} U_{i+1} - \frac{U_{I-1} - U_I}{h} \frac{d}{dt} U_I + \\ &\quad \sum_{i=0}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \frac{d}{dt} U_i - \frac{U_1 - U_0}{h} \frac{d}{dt} U_0 + \sum_{i=1}^{I-1} h U_i^p \frac{d}{dt} U_i \\ &= \sum_{i=0}^I h U_i^p \frac{d}{dt} U_i + \sum_{i=0}^{I-1} \left( \frac{U_i - U_{i+1}}{h} \frac{d}{dt} U_{i+1} + \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \frac{d}{dt} U_i \right) - U_I^q \frac{d}{dt} U_I \\ &= \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} + \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^I h U_i^{p+1} - \frac{1}{-q+1} U_I^{-q+1} \right). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la fonctionnelle  $I_h$  est décroissante en fonction de la variable  $t$ .

Multiplions cette fois ci les deux côtés de (3.6) par  $h U_i$  et récidivons la sommation.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^I h U_i \frac{d}{dt} U_i &= h U_0 \frac{d}{dt} U_0 + h U_I \frac{d}{dt} U_I + \sum_{i=1}^{I-1} U_i \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h} + \sum_{i=1}^{I-1} h U_i^{p+1} \\ &= h U_0^{p+1} + h U_I^{p+1} + \sum_{i=0}^{I-1} U_i \frac{U_{i+1} - U_i}{h} - U_0 \frac{U_1 - U_0}{h} + \\ &\quad \sum_{i=0}^{I-1} U_{i+1} \frac{U_i - U_{i+1}}{h} - U_I \frac{U_{I-1} - U_I}{h} U_I + \sum_{i=1}^{I-1} h U_i^{p+1} \\ &= \sum_{i=0}^I h U_i^{p+1} - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - U_I^{-q+1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de  $I_h$  on obtient

$$\sum_{i=0}^I h U_i \frac{d}{dt} U_i = \frac{p-1}{p+1} \sum_{i=0}^I h U_i^{p+1} + \frac{q+1}{-q+1} U_I^{-q} - 2I_h.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} J_h = -4I_h + \frac{2p-2}{p+1} \sum_{i=0}^I h U_i^{p+1} + \frac{2q+2}{-q+1} U_I^{-q+1}. \quad (3.13)$$

En dérivant par rapport à la variable  $t$  l'expression (3.13), on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h = -4 \frac{d}{dt} I_h + 2(q+1) U_I^{-q} \frac{d}{dt} U_I + 2(p-1) \sum_{i=0}^I h U_i^p \frac{d}{dt} U_i.$$

Notons que  $\frac{d}{dt} J_h = \sum_{i=0}^I 2h U_i \frac{d}{dt} U_i$ .

De l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} J_h \right]^2 &= \left[ \sum_{i=0}^I 2h U_i \frac{d}{dt} U_i \right]^2 \leq 4 \left[ \sum_{i=0}^I h U_i^2 \right] \left[ \sum_{i=0}^I h \left( \frac{d}{dt} U_i \right)^2 \right] \\ &\leq J_h \frac{d^2}{dt^2} J_h, \end{aligned}$$

car  $\frac{d^2}{dt^2} J_h \geq -4 \frac{d}{dt} I_h$  pour  $p > 1$ .

On déduit du Lemme 3.10 que

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h \geq -\lambda \frac{d}{dt} J_h,$$

pour une certaine constante strictement positive  $\lambda$ .

Nous venons ainsi de prouver le résultat suivant ([88]).

**Théorème 3.11.** *Supposons que la solution  $u \in C^{4,1}([0,1],[0,T_b))$  du problème (3.1) explose en un temps fini  $T_b$ . Supposons aussi que la donnée initiale en (3.9) satisfait la condition 3.11 et que l'erreur de cette donnée initiale soit d'ordre  $\circ(1)$ . Alors pour  $h$  assez petit,  $p > 1$ ,  $0 < q < 1$ , la solution  $U_h$  du problème (3.6)-(3.9) explose en temps fini  $T_b^h$  et*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_b^h = T_b.$$

### 3.3.5 Estimation de la vitesse d'explosion de la solution du problème semi-discret

L'objectif de cette partie est de donner une estimation de la vitesse d'explosion de la solution de notre problème semi-discret proche du temps d'explosion numérique. Nous utilisons ici les méthodes vues plus haut qui consistent à établir des bornes supérieure et inférieure pour la solution du problème considéré proche du temps d'explosion.

**Théorème 3.12.** *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.11 sont toujours satisfaites. Alors, proche du temps d'explosion numérique  $T_b^h$ , la solution  $U_h$  du problème semi-discret*

(3.6)-(3.9) a l'estimation suivante comme vitesse d'explosion

$$\|U_h(t)\|_\infty \sim (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}, \quad (3.14)$$

en ce sens qu'ils existent deux constantes positives  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telles que

$$\Gamma_1(T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}} \leq \|U_h(t)\|_\infty \leq \Gamma_2(T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}} \quad \text{pour } t \in (0, T_b^h).$$

*Démonstration.* Soit le vecteur  $J_h$  défini comme suit

$$J_i(t) = \frac{d}{dt}U_i - \varepsilon U_i^p, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_b^h), \quad (3.15)$$

avec  $\varepsilon$  une constante strictement positive à définir plus tard. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \varepsilon U_i^p \right] - \delta^2 \left[ \frac{d}{dt}U_i - \varepsilon U_i^p \right], \quad i = 0, \dots, I \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right] - \varepsilon p U_i^{p-1} \frac{d}{dt}U_i + \varepsilon \delta^2 U_i^p, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

On obtient après utilisation du Lemme 1.13 que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right] - \varepsilon p U_i^{p-1} \frac{d}{dt}U_i + \varepsilon p U_i^{p-1} \delta^2 U_i, \quad i = 0, \dots, I \\ &\geq \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right] - \varepsilon p U_i^{p-1} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right], \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Des égalités (3.6)-(3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq \frac{d}{dt}U_i^p - \varepsilon p U_i^{p-1} \times U_i^p, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\geq \frac{d}{dt} \left[ -\frac{2}{h}U_I^{-q} + U_I^p \right] - \varepsilon p U_I^{p-1} \left[ -\frac{2}{h}U_I^{-q} + U_I^p \right]. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq p U_i^{p-1} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \varepsilon U_i^p \right], \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\geq p U_I^{p-1} \left[ \frac{d}{dt}U_I - \varepsilon U_I^p \right] + \frac{2}{h} q U_I^{-q-1} \frac{dU_I}{dt} + \varepsilon \frac{2}{h} U_I^{-q} p U_I^{p-1}. \end{aligned}$$

L'égalité (3.15) nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq p U_i^{p-1} J_i, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\geq (p U_I^{p-1} + \frac{2}{h} q U_I^{-q-1}) J_I + \varepsilon \frac{2}{h} U_I^{p-1} (q U_I^{-q} + p U_I^{-q}). \end{aligned}$$



D'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq pU_i^{p-1}J_i, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\geq (pU_I^{p-1} + \frac{2}{h}qU_I^{-q-1})J_I.\end{aligned}$$

En prenant  $\varepsilon \in (0,1]$ , on observe de l'inégalité (3.11) que  $J_h(0) \geq 0$ . On déduit du Lemme 1.4 que  $J_h(t) \geq 0$  pour  $t \in (0, T_b^h)$ . Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}U_i \geq \varepsilon U_i^p, \quad i = 0, \dots, I, t \in (0, T_b^h).$$

En intégrant de part et d'autre de l'inégalité au-dessus de  $t$  à  $T_b^h$ , on obtient

$$\frac{U_i^{-p+1}}{p-1} \geq \varepsilon(T_b^h - t), \quad i = 0, \dots, I.$$

Ce qui conduit à

$$U_i \geq [\varepsilon(p-1)]^{\frac{-1}{p-1}} (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}},$$

pour  $p > 1$ . On en déduit que

$$\max_{0 \leq i \leq I} U_i(t) \geq [\varepsilon(p-1)]^{\frac{-1}{p-1}} (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

On a ainsi la borne inférieure souhaitée de la vitesse d'explosion numérique.

Le résultat suivant nous permet d'établir la borne supérieure de cette vitesse d'explosion.

Soit  $i_0$  tel que  $U_{i_0}(t) = \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$  pour  $t \in (0, T_b^h)$ . On observe que

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{U_{i_0+1}(t) - 2U_{i_0}(t) + U_{i_0-1}(t)}{h^2} \leq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \leq 0, \\ \delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \leq 0.\end{aligned}$$

On constate que

$$\frac{d}{dt}U_{i_0} \leq U_{i_0}^p, \quad i_0 = 0, \dots, I.$$

En intégrant de part et d'autre de l'inégalité au-dessus de  $t$  à  $T_b^h$ , on obtient

$$\frac{U_{i_0}^{-p+1}(t)}{p-1} \leq (T_b^h - t).$$

On en déduit que

$$U_{i_0}(t) \leq (p-1)^{\frac{-1}{p-1}} (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}.$$

D'où le résultat recherché.  $\square$

**Remarque 3.13.** Notons ici que la vitesse d'explosion numérique,  $(T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}}$ , obtenue pour notre schéma semi-discret, est la même que celle obtenue pour le continu ([25; 36]).

### 3.3.6 Extinction et convergence du temps d'extinction de la solution du problème semi-discret

Nous prouvons dans cette partie, sous la condition 3.3, l'extinction en temps fini de la solution de notre problème semi-discret (3.6)-(3.9) et montrons la convergence de ce temps d'extinction semi-discret vers celui du problème continu pour un pas d'espace assez petit.

**Lemme 3.14.** Soit  $U_h$  la solution de (3.6)-(3.9). Supposons que la donnée initiale en (3.9) satisfait

$$\delta^2 \varphi_i + \varphi_i^p < 0, \quad i = 0, \dots, I. \quad (3.16)$$

Alors,  $\frac{d}{dt} U_i < 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Considérons le vecteur  $Z_h$  tel que  $Z_i(t) = \frac{d}{dt} U_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in [0, T]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t \in (0, T]$  tel que  $Z_i(t) < 0$  pour  $t \in [0, t_0)$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit entier satisfaisant l'égalité au-dessus. on constate que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \geq 0, \quad i_0 = 0, \dots, I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

Plusieurs calculs nous permettent de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - p U_{i_0}^{p-1}(t_0) Z_{i_0}(t_0) &> 0, \quad i_0 = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt} Z_I(t_0) - \delta^2 Z_I(t_0) - \left( \frac{2}{h} q U_I^{-q-1}(t_0) + p U_I^{p-1}(t_0) \right) Z_I(t_0) &> 0. \end{aligned}$$

Mais ces inégalités vont en contradiction de (3.6)-(3.9), ce qui complète notre preuve.  $\square$

Définissons la fonctionnelle  $J$  et son approximation  $J_h$  sur  $[0, T_q)$  par

$$J(t) = \int_0^1 u dx, \quad \text{et} \quad J_h(t) = \sum_{i=0}^I h U_i.$$

On vérifie que  $\lim_{t \rightarrow T_q} \frac{d}{dt} J = -\infty$ .

Soit  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0,1] \times [0, T_q))$ , on obtient après intégration

$$\frac{d}{dt} J = \int_0^1 u_t dx = -u^{-q}(1,t) + \int_0^1 u^p dx. \quad (3.17)$$

Il est à noter que la condition 3.3 nous donne  $u_t \leq 0$  ([25]).

Posons  $0 < \zeta = \frac{\int_0^1 u_0^p(x) dx}{u^{-q}(1,0)} < 1$ .

L'égalité (3.17) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &\leq -u^{-q}(1,t) + \int_0^1 u_0^p dx \\ &\leq -u^{-q}(1,t) + \zeta u^{-q}(1,0) \\ &\leq (\zeta - 1) u^{-q}(1,t). \end{aligned}$$

Puisque pour une donnée initiale respectant la condition 3.3 l'extinction se produit uniquement à la frontière ([25]), on obtient  $\lim_{t \rightarrow T_q} u^{-q}(1,t) = +\infty$ .

Considérons la fonctionnelle  $J_h$  précédemment définie. En multipliant les deux côtés de (3.6) par  $h$  et en faisant la somme de  $i = 0$  à  $i = I$  on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^I h \frac{d}{dt} U_i &= h \frac{d}{dt} U_0 + h \frac{d}{dt} U_I + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h} + \sum_{i=1}^{I-1} h U_i^p \\ &= h U_0^p + h U_I^p + \sum_{i=1}^{I-1} h U_i^p + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i-1} - U_i}{h} \\ &= \sum_{i=0}^I h U_i^p - U_I^{-q} + \sum_{i=1}^{I-2} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + \sum_{i=1}^{I-2} \frac{U_i - U_{i+1}}{h} \\ &= \sum_{i=0}^I h U_i^p - U_I^{-q}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\frac{d}{dt}J_h = \sum_{i=0}^I hU_i^p - U_I^{-q}$ .

Après dérivation de l'expression précédente par rapport à la variable  $t$ , on obtient pour  $p > 0, q > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}J_h = qU_I^{-q-1}(t)\frac{d}{dt}U_I(t) + p\sum_{i=0}^I hU_i^{p-1}\frac{d}{dt}U_i.$$

On déduit du Lemme 3.14, que  $\frac{d^2}{dt^2}J_h \leq -c\frac{d}{dt}J_h$ , avec  $c$  une constante positive.

En utilisant le Théorème 3.6 on vérifie que pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_q - \varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0$  ( Sect 2.3.4 ). D'où le résultat suivant ([88]).

**Théorème 3.15.** *Supposons que la solution  $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T_q))$  du problème (3.1) s'éteint en un temps fini  $T_q$ . Nous supposons aussi que la donnée initiale en (3.9) satisfait la condition 3.16 et que son erreur est d'ordre  $\circ(1)$ . Alors pour  $h$  assez petit,  $p > 0, q > 0$ , la solution  $U_h$  du problème (3.6)-(3.9) s'éteint en un temps fini  $T_q^h$  et*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_q^h = T_q.$$

### 3.3.7 Estimation de la vitesse d'extinction de la solution du problème semi-discret

Comme pour le cas de l'explosion, nous prouvons ici quelques résultats concernant le comportement asymptotique (vitesse d'extinction) de la solution du schéma semi-discret (3.6)-(3.9).

**Théorème 3.16.** *Soit  $U_h$  la solution de (3.6)-(3.9) qui s'éteint en temps fini  $T_q^h$  pour  $p > 0$  et  $q > 0$ . Supposons que la donnée initiale en (3.9) satisfait*

$$\delta^2 \varphi_I - \frac{2}{h} \varphi_I^{-q} + \varphi_I^p \leq 0. \quad (3.18)$$

*Alors, proche du temps d'extinction semi-discret  $T_q^h$ , la solution  $U_h$  a sa vitesse d'extinction estimée comme suit*

$$\|U_h(t)\|_{inf} \sim (T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}, \quad (3.19)$$

*en ce sens qu'ils existent deux constantes positives  $K_1$  et  $K_2$  telles que*

$$K_1(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}} \leq \|U_h(t)\|_{inf} \leq K_2(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}} \quad \text{pour } t \in (0, T_q^h).$$

*Démonstration.* Nous allons établir en premier lieu la borne inférieure de la vitesse d'extinction. Pour ce faire, on introduit le vecteur  $J_h$  tel que pour  $t \in (0, T_q^h)$ ,

$$J_i = \frac{d}{dt}U_i, \quad i = 0, \dots, I-1, \quad \text{et} \quad J_I = \frac{d}{dt}U_I + \varepsilon U_I^{-q}, \quad (3.20)$$

avec  $\varepsilon$  une constante strictement positive qui sera à préciser. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right], \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_I - \delta^2 U_I \right] - \varepsilon q U_I^{-q-1} \frac{d}{dt}U_I - \varepsilon \delta^2 U_I^{-q}. \end{aligned}$$

On obtient du Lemme 1.13 que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right], \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\leq \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt}U_I - \delta^2 U_I \right] - \varepsilon q U_I^{-q-1} \left[ \frac{d}{dt}U_I - \delta^2 U_I \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (3.6)-(3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= p U_i^{p-1} \frac{d}{dt}U_i, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\leq \frac{2q}{h} U_I^{-q-1} \frac{d}{dt}U_I + p U_I^{p-1} \frac{d}{dt}U_I - \varepsilon q U_I^{-q-1} \left[ \frac{-2}{h} U_I^{-q} + U_I^p \right]. \end{aligned}$$

Après utilisation de (3.20) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= p U_i^{p-1} J_i, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\leq \left[ \frac{2q}{h} U_I^{-q-1} + p U_I^{p-1} \right] J_I - \varepsilon U_I^{p-1} [p U_I^{-q} + q U_I^{-q}]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= p U_i^{p-1} J_i, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\leq \left[ \frac{2q}{h} U_I^{-q-1} + p U_I^{p-1} \right] J_I. \end{aligned}$$

En prenant  $\varepsilon \in (0, \frac{2}{h}]$ , on observe des inégalités (3.16) et (3.18) que  $J_h(0) \leq 0$ . On déduit du Lemme 1.4 que  $J_h(t) \leq 0$  pour  $t \in (0, T_q^h)$ . Ce implique que

$$\frac{d}{dt}U_I \leq -\varepsilon U_I^{-q}.$$

En intégrant cette inégalité sur  $(t, T_q^h)$ , on arrive à

$$\frac{-U_I^{q+1}}{q+1} \leq -\varepsilon(T_q^h - t),$$

ce qui implique que

$$U_I(t) \geq [\varepsilon(q+1)]^{\frac{1}{q+1}} [T_q^h - t]^{\frac{1}{q+1}}.$$

D'où le résultat souhaité.

Établissons maintenant la borne supérieure de la vitesse d'extinction .

Soit l'indice  $i_0$  tel que  $U_{i_0}(t) = \min_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$  pour  $t \in (0, T_q^h)$ . On observe que

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{U_{i_0+1}(t) - 2U_{i_0}(t) + U_{i_0-1}(t)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \geq 0, \\ \delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \geq 0. \end{aligned}$$

On obtient des expressions précédentes que  $\frac{d}{dt} U_I \geq -\frac{2}{h} U_I^{-q}$ , ce qui nous donne

$$U_I^q dU_I \geq -\frac{2}{h} dt.$$

En intégrant l'inégalité au-dessus sur  $(t, T_q^h)$ , on obtient

$$\frac{-U_I^{q+1}}{q+1} \geq -\frac{2}{h} (T_q^h - t).$$

On en déduit que

$$U_I(t) \leq \left(\frac{2}{h}(q+1)\right)^{\frac{1}{q+1}} (T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Ce qui complète la preuve □

**Remarque 3.17.** De même qu'aux Sect 1.3.6 et Sect 2.3.5, on constate que l'estimation de la vitesse d'extinction numérique,  $(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}$ , pour la singularité se trouvant dans les conditions aux limites de type Neumann, se trouve être différente (plus grande) de celle estimée pour l'extinction de la solution du problème continu,  $(T_q^h - t)^{\frac{1}{2(q+1)}}$  ([33; 25]).

### 3.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques approximations numériques des temps d'explosion et d'extinction du problème (3.1). Nous discutons aussi des lieux et des vitesses proche des temps d'explosion et d'extinction. Pour plus de certitude, nous supposons désormais que  $T^h$  est le temps d'explosion ou d'extinction numérique.

### 3.4.1 Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (3.9) vérifie la condition 3.11

Les résultats numériques sont donnés dans le cas où la solution du problème semi-discret (3.6)-(3.9) explose en un temps fini. En utilisant (3.6)-(3.9), on obtient le système d'EDO suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = f(U), & 0 < t < T^h, \\ U(0) = \varphi, \end{cases}$$

où  $U = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$ ,  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$  et  $f = (f_0, \dots, f_I)$  est définie par

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_0^p \\ U_1^p \\ \vdots \\ U_{I-1}^p \\ -\frac{2}{h}U_I^{-q} + U_I^p \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

où les  $t$  et  $U_i$  sont considérées comme des fonctions de la longueur d'arc  $\eta$ . Puisque  $d\eta^2 = dt^2 + dU_0^2 + \dots + dU_I^2$ , alors les variables  $t(\eta)$  et  $U_i(\eta)$  satisfont l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \eta < \infty,$$

$$t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I.$$

Les résultats numériques suivants sont obtenus pour différents cas.

**Premier cas :** on prend  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $p = 1,1$  et  $q = 0,9$ ,  $p = 1,5$  et  $q = 0,9$ , pour  $\varepsilon = 0,5$ . La suite  $\{\eta_l\}$  définie par le Théorème C.2 ( Annexe C.1 ) est telle que  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l$  ( $l = 0,1, \dots, 10$ ).

**Deuxième cas :** on choisit  $\varphi_i = -b * \cos(\varepsilon * i * h) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $p = 1,5$  et  $q = 0,5$ , pour  $\varepsilon = 6,28$  et  $b = \varepsilon^{-1}$ . La suite  $\{\eta_l\}$  est prise ici telle que  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l$  ( $l = 0,1, \dots, 10$ ).

**Troisième cas :** on a  $\varphi_i = -b * \cos(\varepsilon * i * h) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $p = 1,5$  et  $q = 0,5$ , pour  $\varepsilon = 3,28$  et  $b = \varepsilon^{-1}$ . La suite  $\{\eta_l\}$  est prise ici telle que  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l$  ( $l = 0,1, \dots, 10$ ).

► Résultats numériques dans le premier cas.

TABLEAU 3.1 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et vitesse d’explosion numérique obtenus pour  $p = 1,1$ ,  $q = 0,9$ ,  $k = 53$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	9,284037232	12648	10
32	9,283976714	25160	10
64	9,283961583	63062	10
128	9,283957800	194930	10
256	9,283956854	726567	10

TABLEAU 3.2 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et vitesse d’explosion numérique obtenus pour  $p = 1,5$ ,  $q = 0,9$ ,  $k = 53$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	1,344993808	11388	2,0
32	1,344953678	16468	2,0
64	1,344943643	26387	2,0
128	1,344941134	47746	2,0
256	1,344940507	116620	2,0
512	1,344940350	432221	2,0

► Résultats numériques pour le deuxième cas.

TABLEAU 3.3 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et vitesse d’explosion numérique obtenus pour  $p = 1,5$ ,  $q = 0,5$ ,  $k = 87$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,006370594424	6670	2,0
32	0,006370594434	6962	2,0
64	0,006370594436	7251	2,0
128	0,006370594437	7115	2,0
256	0,006370594437	7997	2,0
512	0,006370594437	9598	2,0

► Résultats numériques pour le troisième cas.



TABLEAU 3.4 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et vitesse d’explosion numérique obtenus pour  $p = 1,5, q = 0,5, k = 70$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,276664559	8124	2,0
32	0,276664793	8833	2,0
64	0,276664852	10343	2,0
128	0,276664866	13858	2,0
256	0,276664870	28656	2,0
512	0,276664871	93981	2,0

**Remarque 3.18.** Des différents tableaux au dessus, on observe les relations entre le temps d’explosion et la vitesse d’explosion d’un côté, et la source à l’intérieur du domaine de l’autre côté. En effet, quand la source à l’intérieur du domaine augmente, l’explosion se produit plus rapidement, indépendamment du flux à la frontière. Par ailleurs, la vitesse d’explosion quant à elle décroît avec l’accroissement de la source l’intérieur du domaine.

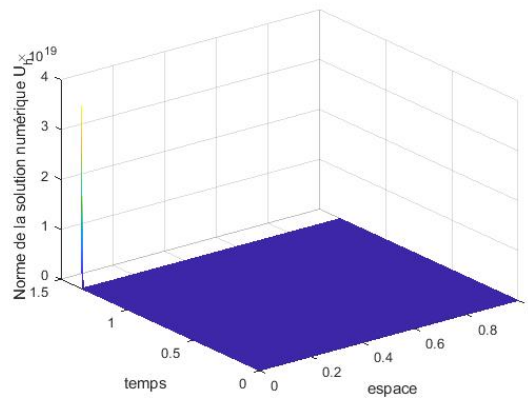


FIGURE 3.1 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l’espace et du temps,  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}, q = 0,9, p = 1,5$ .

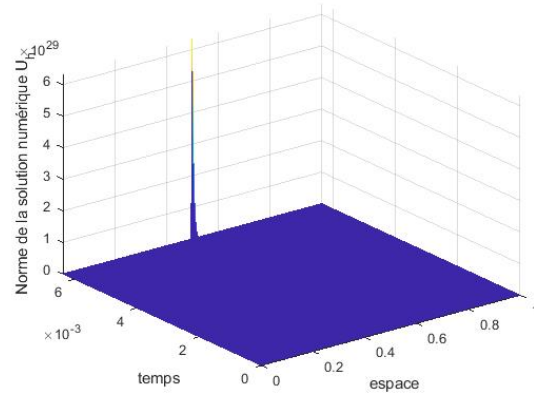


FIGURE 3.2 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 6,28$ ,  $q = 0,5$ ,  $p = 1,5$ .

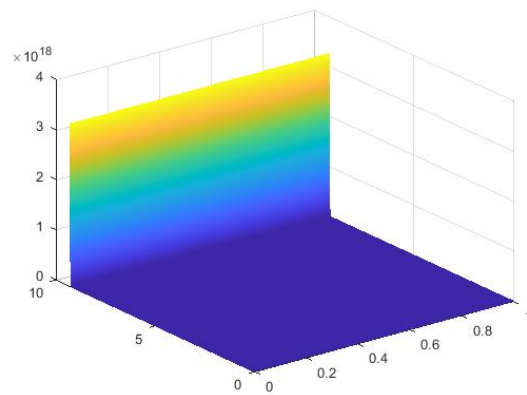


FIGURE 3.3 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $q = 0,9$ ,  $p = 1,1$ .

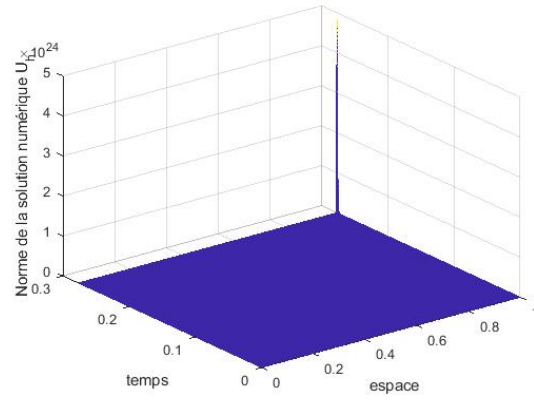


FIGURE 3.4 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 3,28$ ,  $q = 0,5$ ,  $p = 1,5$ .

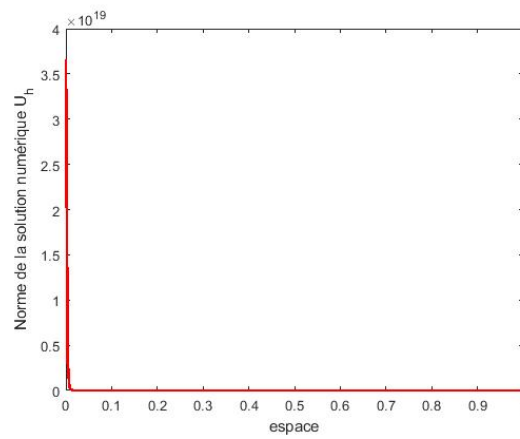


FIGURE 3.5 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $q = 0,9$ ,  $p = 1,5$ .

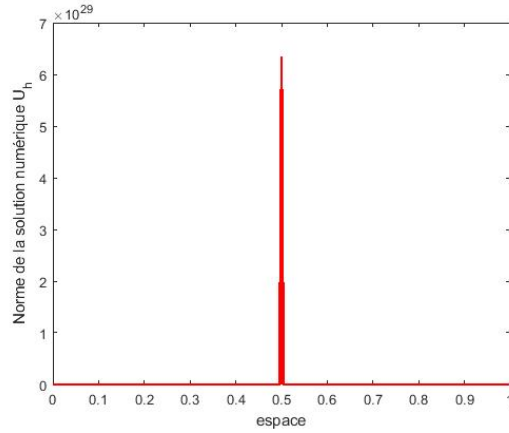


FIGURE 3.6 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 6,28$ ,  $q = 0,5$ ,  $p = 1,5$ .

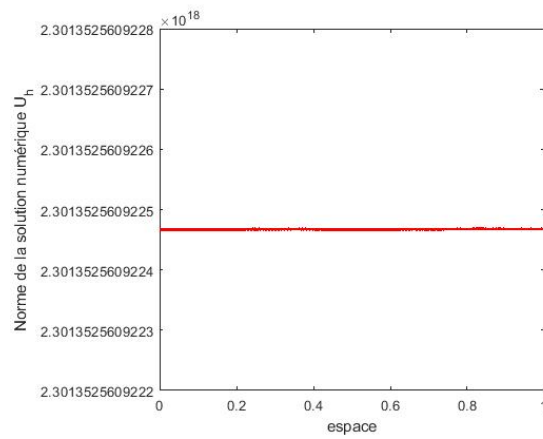


FIGURE 3.7 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $q = 0,9$ ,  $p = 1,1$ .

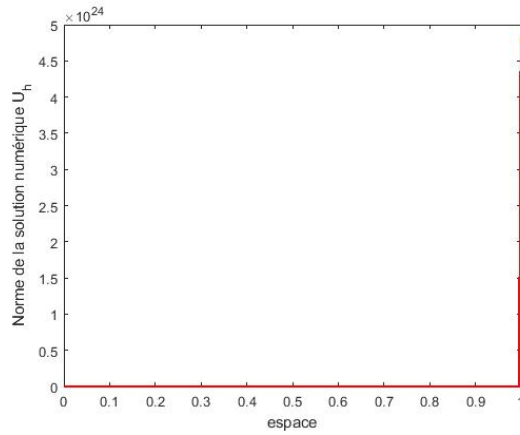


FIGURE 3.8 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 3,28$ ,  $q = 0,5$ ,  $p = 1,5$ .

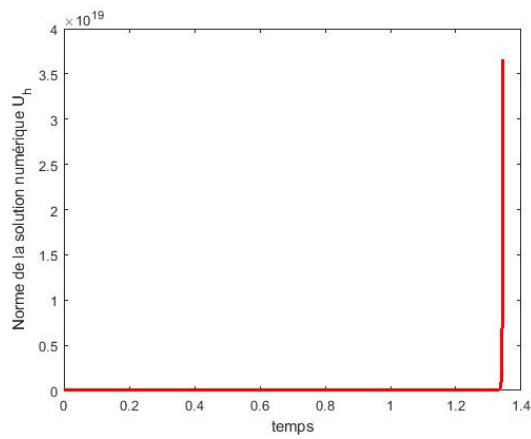


FIGURE 3.9 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $q = 0,9$ ,  $p = 1,5$ .

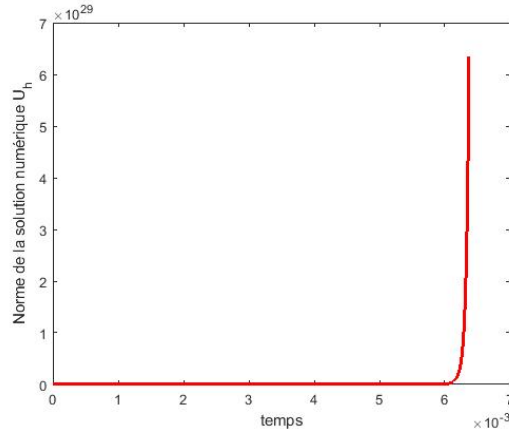


FIGURE 3.10 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 6,28$ ,  $q = 0,5$ ,  $p = 1,5$ .

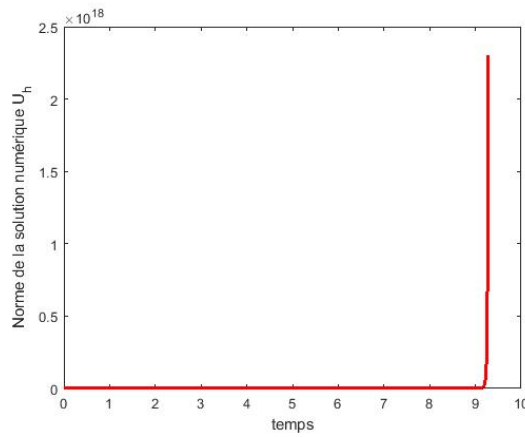


FIGURE 3.11 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $\varphi_i = \varepsilon^{\frac{-1}{q}} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $q = 0,9$ ,  $p = 1,1$ .

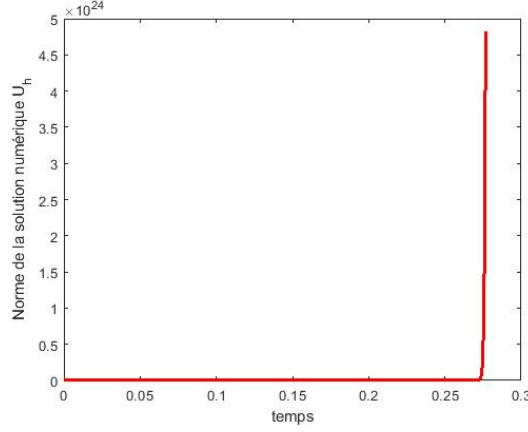


FIGURE 3.12 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $\varphi_i = -(b * \cos(\varepsilon * i * h)) + \sin(\varepsilon)^{-1/q} + b * \cos(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = 3,28$ ,  $q = 0,5$ ,  $p = 1,5$ .

**Remarque 3.19.** Les différentes figures nous permettent d'illustrer le comportement de la solution proche du temps d'explosion. On constate le changement des lieux d'explosion en fonction des données initiales. En effet, l'explosion se produit selon les différents graphes, soit à la frontière du domaine, soit à l'intérieur du domaine, soit dans le domaine tout entier. On remarque que l'explosion a lieu en un point ou dans une région entière, sous une même condition, en fonction de la donnée initiale. Ce qui dénote le caractère instable de ce type de problème.

### 3.4.2 Tableaux et graphiques : cas où la donnée initiale en (3.9) vérifie la condition 3.16

Nous proposons ici quelques résultats numériques dans le cas où la solution de notre schéma semi-discret (3.6)-(3.9) s'éteint en un temps fini  $T^h$ .

En posant  $V_i(t) = \frac{1}{U_i(t)}$ , on voit que le vecteur  $V_h$  est solution de

$$\frac{d}{dt} V_i = \frac{1}{h^2} \left( 2V_i - \frac{V_i^2}{V_{i-1}} - \frac{V_i^2}{V_{i+1}} \right) - V_i^{-p+2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} V_0 = \frac{2}{h^2} \left( V_0 - \frac{V_0^2}{V_1} \right) - V_0^{-p+2}, \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} V_I = \frac{2}{h^2} \left( V_I - \frac{V_I^2}{V_{I-1}} \right) + \frac{2}{h} V_I^{q+2} - V_I^{-p+2}, \quad (3.24)$$

$$V_i(0) = (\varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I. \quad (3.25)$$

Soit  $\eta$  la longueur d'arc de  $V_h$ . Considérons les variables  $t$  et  $V_i$  comme des fonctions de  $\eta$ . Puisque  $d\eta^2 = dt^2 + dV_0^2 + \dots + dV_I^2$ , alors les variables  $t(\eta)$  et  $V_i(\eta)$  satisfont

l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} t \\ V_0 \\ \vdots \\ V_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \eta < \infty,$$

$$t(0) = 0, \quad V_i(0) = \varphi_i^{-1} > 0, \quad i = 0, \dots, I.$$

où  $V = (V_0(t), \dots, V_I(t))^T$ ,  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$  et  $f = (f_0, \dots, f_I)$  est définie par

$$f_0 = \frac{2}{h^2} \left( V_0 - \frac{V_0^2}{V_1} \right) - V_0^{-p+2},$$

$$f_i = \frac{1}{h^2} \left( 2V_i - \frac{V_i^2}{V_{i-1}} - \frac{V_i^2}{V_{i+1}} \right) - V_i^{-p+2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$f_I = \frac{2}{h^2} \left( V_I - \frac{V_I^2}{V_{I-1}} \right) + \frac{2}{h} V_I^{q+2} - V_I^{-p+2},$$

$$V_i(0) = (\varphi_i)^{-1}, \quad i = 0, \dots, I.$$

Les résultats numériques suivants sont obtenus pour  $\varphi_i = \varepsilon^{-1/q} - \frac{\varepsilon}{2}(i * h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\varepsilon = 1.5$ ,  $0 < p \leq 1$  et  $0 < q \leq 1$ .

Définissons ici la suite  $\{\eta_l\}$  ( Théorème C.2, Annexe C.1 ) par  $\eta_l = 2^k \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ).

TABLEAU 3.5 – Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et vitesse d'extinction numérique obtenus pour  $p = 1/2$ ,  $q = 1$ ,  $k = 7$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,15911484	2955	0,5
32	0,15682314	5624	0,5
64	0,15610036	10770	0,5
128	0,15588244	20751	0,5
256	0,15581869	40587	0,5
512	0,15580044	84342	0,5



TABLEAU 3.6 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1/2, q = 1/2, k = 7$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,16100315	3463	0,66
32	0,15927478	6734	0,66
64	0,15871679	13035	0,66
128	0,15854545	25198	0,66
256	0,15849462	49152	0,66
512	0,15847990	99290	0,66

TABLEAU 3.7 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1, q = 1/2, k = 7$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,14332827	3288	0,66
32	0,14167987	6390	0,66
64	0,14114245	12368	0,66
128	0,14097635	23893	0,66
256	0,14092684	46533	0,66
512	0,14091245	93371	0,66

TABLEAU 3.8 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et vitesse d’extinction numérique obtenus pour  $p = 1, q = 1, k = 7$ .

$I$	$T^h$	$n$	$p_h$
16	0,15309520	2907	0,5
32	0,15091834	5541	0,5
64	0,15022440	10618	0,5
128	0,15001371	20456	0,5
256	0,14995176	39982	0,5
512	0,14993396	82580	0,5

**Remarque 3.20.** Des tableaux ci dessus, nous observons la relation entre le temps d’extinction d’une part, le flux à la frontière et le terme source à l’intérieur du domaine d’autre part. En effet, quand le flux à la frontière est constant  $q = 1/2$  et que la source à l’intérieur croît de  $1/2$  à  $1$ , le temps d’extinction numérique décroît de  $0,16$  à  $0,14$ . Tandis que lorsque la source à l’intérieur du domaine est constante  $p = 1/2$  et que le flux à la frontière croît de  $1/2$  à  $1$ , le temps d’extinction numérique reste sensiblement le même à  $0,16$ . On dira donc de la source à l’intérieur du domaine qu’elle ralentie l’extinction de la solution numérique.

Contrairement au temps d'extinction, on constate que la source à l'intérieur du domaine n'a aucun effet sur la vitesse d'extinction, qui croît de 0,5 à 0,66, lorsque le flux à la frontière lui décroît de 1 à 1/2.

Les figures suivantes nous présentent l'évolution de la solution numérique. On observe à travers les FIGURE 3.15 - FIGURE 3.18 l'extinction de la solution numérique. Laquelle se produit au dernier nœud. Ces figures ont été réalisées pour  $I = 128$  et pour différentes valeurs de  $p$  et  $q$ .

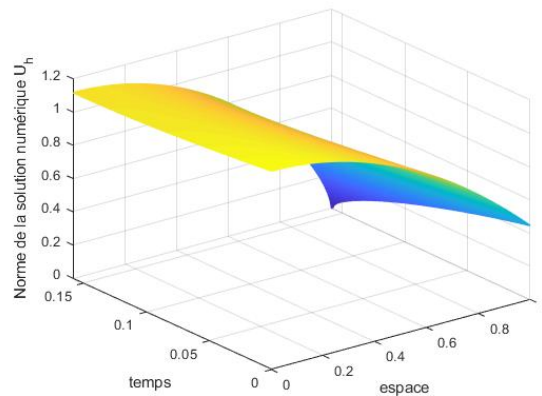


FIGURE 3.13 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 1/2$ ,  $q = 1/2$ .

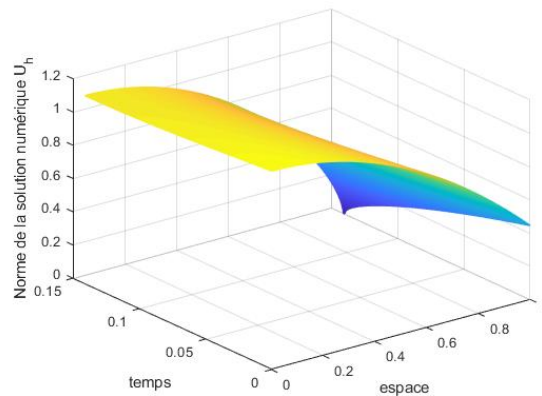


FIGURE 3.14 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps,  $p = 1$ ,  $q = 1/2$ .

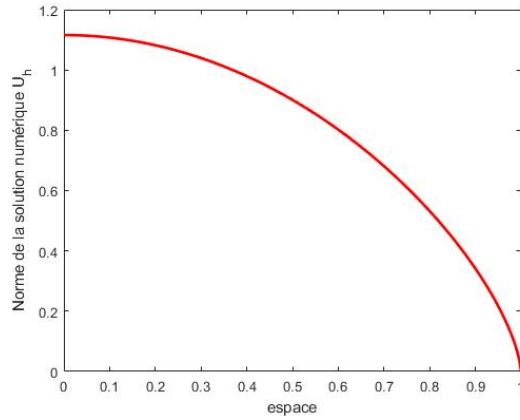


FIGURE 3.15 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 1/2, q = 1/2$ .

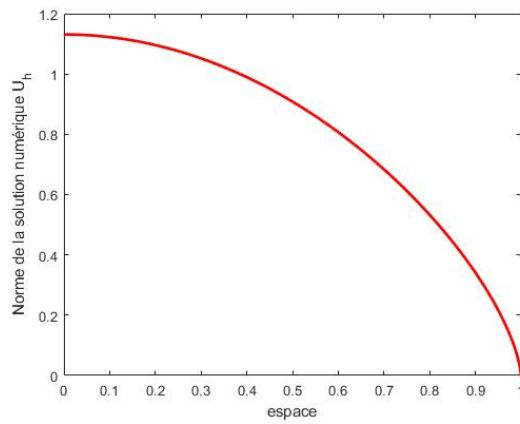


FIGURE 3.16 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction de l'espace,  $p = 1, q = 1/2$ .

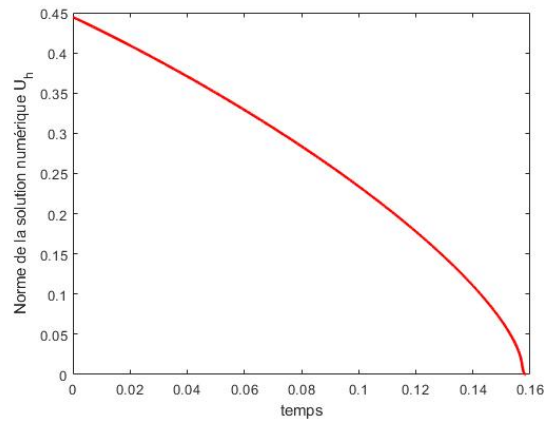


FIGURE 3.17 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 1/2, q = 1/2$ .

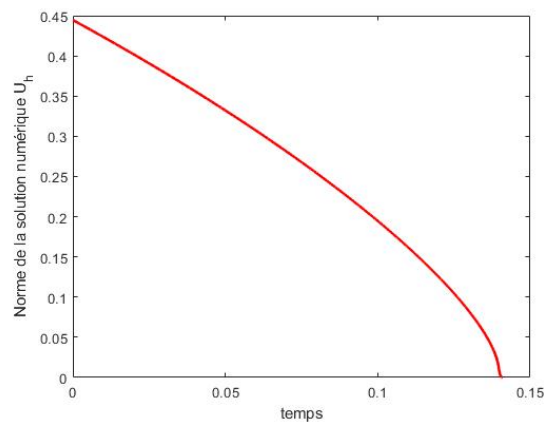


FIGURE 3.18 – Évolution de la solution numérique  $U_h$  en fonction du temps,  $p = 1, q = 1/2$ .

# Conclusion et Perspectives

Le premier chapitre de notre travail nous a permis, grâce à l'étude d'un problème parabolique semi-linéaire, d'exposer les différentes techniques et méthodes numériques utilisées dans cette thèse. Nous avons construit un schéma semi-discret à l'aide de la méthode des différences finies, montré l'existence et l'unicité de la solution de ce schéma semi-discret, prouvé l'explosion de la solution de notre schéma numérique en temps fini et la convergence de ce temps d'explosion numérique vers celui du temps continu lorsque le pas de semi-discrétisation  $h$  tends vers 0. Pour la résolution numérique, nous avons utilisé une méthode appropriée (basée sur la semi-discrétisation) à notre schéma semi-discret ne faisant pas intervenir de condition de stabilité : les méthodes les plus répandues basées sur la discrétisation totale n'étant pas appropriées à notre schéma semi-discret. Ce qui nous a permis de répondre numériquement aux trois questions fondamentales suivantes :

- Quand se produit l'explosion de la solution numérique ?
- Comment se produit l'explosion de la solution numérique ?
- Où se produit l'explosion de la solution numérique ?

Par la suite, dans les autres chapitres, nous nous sommes adonnés à l'étude des doubles singularités (à la fois dans le terme source et dans les conditions aux limites) dans les problèmes paraboliques semi-linéaires.

Au chapitre 2, nous avons à l'aide d'un problème parabolique semi-linéaire présentant deux sources d'extinction (dans le terme source et dans le flux à la limite), estimé numériquement les temps et vitesse d'extinction, localisé l'extinction soit aux limites du domaine soit dans le domaine entier en fonction des différentes conditions sur la donnée initiale.

Au chapitre 3, nous avons étudié un problème parabolique semi-linéaire présentant deux sources de singularités de natures différentes : à savoir, une source d'explosion à l'intérieur du domaine, et une source d'extinction (un flux non-linéaire) à la

frontière. Cette étude nous a permis de mettre en évidence le caractère instable de la solution de ce genre de problème. Ainsi, nous avons montré numériquement la localisation de l'extinction à la limite droite du domaine contrairement au cas de l'explosion. En effet, nous avons constaté que pour différentes données initiales respectant les mêmes conditions d'explosion, l'explosion se produit soit à l'intérieur du domaine, soit à la frontière, soit dans le domaine entier : d'où l'impossibilité de pouvoir la contrôler, ni la prévoir.

En somme, des chapitres 2 et 3, nous avons prouvé l'explosion et l'extinction aussi bien théorique que numérique des problèmes paraboliques non-linéaires, soumis aux conditions aux bords de type Neumann, avec deux sources de singularités quelles soient de même nature ou de natures différentes. Nous avons aussi étudié les différentes vitesses d'explosion et d'extinction respectives des solutions proches des temps d'explosion et d'extinction. Il est ressorti de cette étude tant théorique que numérique le caractère instable des problèmes présentant deux sources de singularités de natures différentes.

Les différentes méthodes numériques utilisées, nous ont permis de déterminer de bonnes valeurs approximatives des temps d'extinction et d'explosion, d'observer l'impact des différents exposants sur les différentes vitesses numériques qu'elles soient d'explosion ou d'extinction proche des temps d'explosion et d'extinction et de pouvoir localiser les lieux d'extinction et d'explosion numériques si possible. Par ailleurs, il est à noter des différences, bien que n'ayant aucun impact sur le résultat global, entre les différentes vitesses quelles soient d'explosion ou d'extinction des problèmes numériques et celles des problèmes continus lors de l'étude des singularités aux bords (dans les conditions aux limites de type Neumann). Différences dues aux erreurs d'approximations d'un problème avec condition aux limites de type Neumann par une méthode d'approximation à pas constant.

Comme perspectives, nous pourrions, en premier lieu, construire des schémas numériques à pas variables adaptés, permettant une meilleure approximation des problèmes paraboliques non-linéaires avec condition aux limites de type Neumann. En second lieu, mettre en place des techniques et méthodes numériques permettant de maîtriser voir contrôler, le caractère instable des problèmes paraboliques présentant deux sources de singularités, à savoir dans le terme source et à la limite et de natures différentes.

# **Annexes**

# Annexe A

## Principes de comparaison et du maximum

### A.1 Principe de comparaison

Cette partie est inspirée des thèses de Rault [81] et N'guessan [74]. Nous donnons ici quelques résultats qualitatifs tels que : le principe du maximum, le principe de comparaison [14], les Lemmes de positivité et d'unicité.

Considérons  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  un domaine borné dont la frontière  $\partial\Omega$  se décompose en deux parties disjointes

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \uplus \partial_2\Omega,$$

où  $\partial_2\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et relativement ouvert dans  $\partial\Omega$ .

Pour  $T > 0$ , nous posons  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$  et introduisons l'intérieur parabolique  $Q_T$  et la frontière parabolique  $q_T$  comme

$$Q_T = (\Omega \cup \partial_2\Omega) \times (0, T] \quad \text{et} \quad q_T = \bar{Q}_T \setminus Q_T.$$

Soit

$$F \in \mathcal{C}^1(Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2})$$

croissante par rapport à la variable dans  $\mathbb{R}^{N^2}$ . La relation d'ordre de  $\mathbb{R}^{N^2}$  considérée ici,  $A \leq B$ , entre deux matrices carrées de taille  $N$  signifie que  $B - A$  est semi-définie positive. On supposera que la fonction  $F$  vérifie la condition de Lipschitz unilatérale suivante :

$$w \geq u \Rightarrow F(x, t, w, p, q) - F(x, t, u, p, q) \leq L(w - u), \quad (\text{A.1})$$



dans  $Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$ , où  $L > 0$  est une constante ne dependant que de la fonction  $F$ . On considère l'équation parabolique dans  $Q_T$

$$\partial_t u = F(x, t, u, \nabla u, H^2 u),$$

où  $H^2 u$  désigne la matrice hessienne de  $u$ . Sur  $\partial_1 \Omega$ , on impose une condition inhomogène de Dirichlet, tandis que sur  $\partial_2 \Omega$ , on impose la condition dynamique  $B_\sigma u = 0$ , avec

$$B_\sigma u = \sigma(x, t) \partial_t u + \partial_\nu u - \rho(x, t) u,$$

où  $\sigma \geq 0$  sur  $\partial_2 \Omega \times (0, T]$ .

**Théorème A.1** (Principe de comparaison). *Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dans  $\mathcal{C}(\bar{Q}_T) \cap \mathcal{C}^{2,1}(Q_T)$  telles que*

$$\begin{aligned} \partial_t u - F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) &\leq \partial_t v - F(x, t, v, \nabla v, H^2 v) \quad \text{dans } Q_T, \\ B_\sigma u &\leq B_\sigma v \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \times (0, T]. \end{aligned}$$

*Alors  $u \leq v$  sur  $q_T$  implique que  $u \leq v$  dans  $Q_T$ .*

**Corollaire A.2** (Unicité). *Le problème parabolique aux valeurs initiales*

$$\begin{aligned} \partial_t u &= F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) \quad \text{dans } Q_T, \\ B_\sigma u &= 0 \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \times (0, T], \\ u|_{q_T} &= \psi \in \mathcal{C}(q_T), \end{aligned}$$

*admet au plus une seule solution  $u$  dans  $\mathcal{C}(\bar{Q}_T) \cap \mathcal{C}^{2,1}(Q_T)$ .*

**Corollaire A.3** (Positivité). *Si l'on suppose en plus que  $F(., 0, 0, 0) \geq 0$ , une solution  $u \in \mathcal{C}(\bar{Q}_T) \cap \mathcal{C}^{2,1}(Q_T)$  de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) \geq 0 \quad \text{dans } Q_T, \\ B_\sigma u \geq 0 \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \times (0, T] \\ u \geq 0 \quad \text{sur } q_T \end{array} \right.$$

*est positive dans  $Q_T$ .*

Pour la suite, posons

$$D[u] = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + g(x, t, u, \nabla u),$$

où les coefficients  $a_{ij}$  vérifient, pour  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux constantes positives ,

$$0 \leq \mu_1 \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \sum_{i=1}^N a_{ij}(\dots) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2,$$

pour tout vecteur  $\xi$  de  $\mathbb{R}^N$ .

**Théorème A.4** (Principe du maximum (minimum) fort). *Supposons qu'il existe  $C > 0$  tel que dans  $Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  on ait*

$$g(\dots, p) \leq C|p| \quad \left( g(\dots, p) \geq -C|p| \right).$$

Soit une fonction  $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$  vérifiant

$$\begin{aligned} \partial_t u &\leq D[u] \quad \left( \partial_t u \geq D[u] \right) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T], \\ B_\sigma(u) &\leq 0 \quad \left( B_\sigma(u) \geq 0 \right) \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \times (0, T]. \end{aligned}$$

Alors

$$\max_{q_T} u = \max_{\bar{Q}_T} u \quad \left( \min_{q_T} u = \min_{\bar{Q}_T} u \right),$$

et si  $u$  atteint son maximum  $M$  (son minimum  $m$ ) en un point  $(x_0, t_0) \in Q_T$ , alors  $u = M$  ( $u = m$ ) sur  $\bar{Q}_{t_0}$ .

## A.2 Lemme de Hopf et principe du maximum

Le Lemme suivant nous dit que la solution d'un problème ne peut s'annuler au bord avant de s'annuler à l'intérieur lorsque la condition au bord est de type Neumann ou de type Robin ([35; 50; 80]).

Considérons l'équation linéaire suivante

$$\partial_t u = \Delta u + \sum b_i(x, t) \partial_i u + c(x, t) u, \tag{A.2}$$

où les fonctions  $b_i$  et  $c$  sont bornées.

**Théorème A.5** (Lemme de Hopf). *Soit  $u$  une sous-solution de l'équation linéaire (A.2) (sans conditions aux bords) telle que  $u(x, t) > 0$  pour tout  $x \in \Omega$  et  $t \in [0, T]$ .*

*Si  $u(x_0, T) = 0$  pour un certain  $x_0 \in \partial\Omega$ , alors  $\partial_n u(x_0, T) > 0$  où  $n$  désigne la normale à  $\partial\Omega$  en  $x_0$ .*

Le résultat suivant est une version du principe de comparaison fort et du Lemme de Hopf ([80]).

**Théorème A.6.** *Soit un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$ ,  $p > n + 2$ , et  $T > 0$ . Soit  $u, v \in W_{loc}^{2,1;p}(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$ . Supposons*

$$\partial_t u - \Delta u - f(x, t, u, \nabla u) \leq \partial_t v - \Delta v - f(x, t, v, \nabla v) \quad \text{dans } Q_T,$$

*où  $f = f(x, t, s, \xi) : \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $x, t$  et  $C^1$  en  $s$  et  $\xi$ . Supposons aussi que  $u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$ ,  $u(\cdot, 0) \equiv v(\cdot, 0)$ , et l'un ou l'autre*

$$u \leq v \quad \text{dans } S_T, \tag{A.3}$$

*ou*

$$\partial_\nu u + bu \leq \partial_\nu v + bv \quad \text{dans } S_T, \tag{A.4}$$

*où  $b \in C^1(\partial\Omega)$ . Finalement, si  $f$  dépend de  $\xi$ , nous supposons aussi que,  $\nabla u, \nabla v \in L^\infty(Q_T)$ . Alors*

$$u < v \quad \text{dans } Q_T.$$

*En somme, si  $u(x_0, t_0) = v(x_0, t_0)$  pour certains  $x_0 \in \partial\Omega$  et  $t_0 \in (0, T)$ , alors*

$$\partial_\nu u(x_0, t_0) > \partial_\nu v(x_0, t_0).$$

*Si (A.4) est vraie, alors  $u < v$  dans  $\bar{\Omega} \times (0, T)$ .*

# Annexe B

## Existence et unicité de la solution de certaines EDO & EDP

### B.1 Existence et unicité de la solution de certaines EDP paraboliques

Cette partie est inspirée des résultats issus de ([11]).

Considérons le système d'EDP parabolique suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t,u)u = f(x,t,u,Du), \quad \text{dans } \Omega \times (0,T], \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{B}(t,u)u = g(x,t,u), \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T], \quad (\text{B.2})$$

$$u(.,0) = u_0, \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \quad (\text{B.3})$$

où  $\Omega$  est un domaine régulier, borné dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{A}(t,u)u$  une famille d'opérateurs différentiels du second ordre de la forme

$$\mathcal{A}(t,u)u := - \sum_{j,k=1}^n D_j(a_{jk}(.,t,u)D_k u) + \sum_{j=1}^n a_j(.,t,u)D_j u, \quad 0 \leq t \leq T < \infty,$$

où  $D_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ , agissant sur un vecteur de  $N$  fonctions réelles  $u : \Omega \times (0,T) \rightarrow \mathbb{R}^N$  avec

$$a_j \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et } a_{jk} = a_{kj},$$

où  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  est l'espace des endomorphismes de  $\mathbb{R}^N$ .

Nous supposons que chaque  $\mathcal{A}(t,u)$  est un système fortement elliptique, tel que,

$$\sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^N a_{jk}^{rs}(x,t,\eta) \zeta^j \zeta^k \zeta_r \zeta_s > 0,$$

pour tout  $(x, t, \eta) \in \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^N$ ,  $\xi := (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , et  $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , avec  $a_{jk}^{rs}$  les éléments des matrices  $a_{jk}$ .

Posons

$$\mathcal{B}(t, u)u := \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\cdot, t, u) v^j D_k u,$$

où  $v := (v^1, \dots, v^n)$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

Supposons que

$$f \in C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN}, \mathbb{R}^N),$$

et

$$g \in C^\infty([0, T] \times \partial\Omega^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N),$$

avec  $g(\cdot, \cdot, 0) = 0$ .

**Définition B.1.** Par une solution classique de (B.1)-(B.3) sur un intervalle  $J \subset [0, T]$ , avec  $0 \in J$  et  $\dot{J} := J \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , nous entendons une fonction

$$u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times J, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times \dot{J}, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{2,0}(\Omega \times \dot{J}, \mathbb{R}^N),$$

qui satisfait (B.1)-(B.3) ponctuellement.

Une solution classique non prolongeable est dite maximale.

**Théorème B.2.** Supposons que  $n < p < \infty$ , que  $1 + n/p < \tau \leq 2$ , et que  $u_0 \in W_p^\tau$  satisfait la condition de compatibilité

$$\mathcal{B}(t, u_0)u_0 = g(\cdot, t, u_0) \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{B.4}$$

Alors le problème (B.1)-(B.3) admet une solution classique maximale  $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, T], \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T), \mathbb{R}^N)$ .

Si  $f$  est indépendante de  $Du$ , alors  $u$  est l'unique solution de (B.1)-(B.3).

## B.2 Existence et unicité de la solution de certaines EDO

Cette section traite de l'existence et l'unicité des EDO et est tirée de la Thèse de N'Guessan ([74]).

**Définition B.3.** On appelle système différentiel non-linéaire autonome du premier degré, tout système de la forme

$$\frac{d}{dt}X(t) = F(X(t)), \quad (\text{B.5})$$

où  $t$  est une variable réelle,

$$X(t) = (x_0(t), \dots, x_I(t))^T, \quad F(X) = (f_0(X), \dots, f_I(X))^T,$$

les  $f_i, i \in \{0, \dots, I\}$ , sont des fonctions de la variable  $X$  définies et continues sur un ouvert  $E$  de  $\mathbb{R}^{I+1}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition B.4.** Soit  $X : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$ .  
 $t \mapsto X(t)$

On dit que  $X$  est solution du système (B.5) sur l'intervalle  $J$  dans  $E$  si

1.  $X$  est  $C^1$  sur  $J$ ;
2. pour tout  $t \in J, X(t) \in E$ ;
3.  $\frac{d}{dt}X(t) = F(X(t))$ .

Par abus de langage, on dira qu'une fonction  $X : J \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  est solution du système (B.5) si  $(J, X(\cdot))$  est solution de (B.5).

**Définition B.5.** Une solution  $X : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  du système (B.5) est maximale s'il n'existe pas d'intervalle  $\tilde{J}$  contenant strictement  $J$  et de solution  $\tilde{X} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  telle que  $\tilde{X}|_{J(\cdot)} = X(\cdot)$ .

**Définition B.6.** On appelle condition initiale, un point de  $K \times \mathbb{R}^{I+1}$  de la forme :  $(t_0, X_0)$  avec  $X_0 = (y_0, \dots, y_I)^T$ . Résoudre le système pour une condition initiale donnée, c'est chercher une solution  $X(t)$  telle que, pour tout  $i \in \{0, \dots, I\}, x_i(t_0) = y_i$ .

**Théorème B.7** (Théorème de Cauchy-Lipschitz). Soit  $F : E \subseteq \mathbb{R}^{I+1} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  une fonction. On considère le problème de Cauchy  $(C_{X_0, t_0})$  suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = F(X(t)), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Si  $F$  est  $C^1$  sur  $E$  alors :

1.  $(C_{X_0, t_0})$  admet une unique solution maximale  $(J_{\max}, X_{\max}(\cdot))$ .
2. Les solutions de  $(C_{X_0, t_0})$  sont exactement les restrictions de l'unique solution maximale, c'est-à-dire les couples  $(J, X_{\max}|_J(\cdot))$  avec  $J$  sous-intervalle de  $J_{\max}$ .

# Annexe C

## Algorithmes

### C.1 Suite linéairement convergente du temps d'explosion

Cette partie est inspirée des algorithmes de calculs des temps d'explosion, vitesse et ordre d'explosion mis en place par Hirota et Ozawa ([49]).

Considérons le système d'EDO suivant

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t)), \quad 0 < t < T, \quad (\text{C.1})$$

$$y(0) = y^0, \quad (\text{C.2})$$

où  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$  et  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ . Dans lequel les variables  $t$  et  $y_i$  sont vues comme des fonctions de la longueur d'arc  $\eta$ . Comme  $d\eta^2 = dt^2 + dy_1^2 + \dots + dy_n^2$ , les variables  $t(\eta)$  et  $y_i(\eta)$  satisfont alors l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} t \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad 0 < \eta < \infty, \\ t(0) = 0, \quad y(0) = y^0. \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

Notons que la transformation ci-dessus est appelée transformation de la longueur d'arc. Dans cette transformation, quand  $t$  tend vers  $T$  ( $\eta$  tend vers  $+\infty$ ) chaque com-

posante du membre de droite satisfait

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{f_k}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} = \begin{cases} \text{const}(\neq 0) & \text{si } k \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\mathcal{F} = \{k | y_k \text{ explose avec l'ordre le plus élevé}\}$ .

L'algorithme proposé ici génère une suite linéairement convergente du temps d'explosion qui par la suite sera accélérée par la méthode  $\Delta^2$  d'Aitken .

Soient les différentes hypothèses suivantes :

**Hypothèse A :** Aucune des composantes de  $y(t)$  n'explose dans  $[0, T)$ , mais à  $t = T$  au moins une composante explose.

**Hypothèse B :** La(les) composante(s) qui explose(nt) avec l'ordre le plus élevé tend(ent) nécessairement vers  $\infty$ , et est(sont) une(des) fonction(s) croissante(s) dans  $t \in [0, T)$ .

**Hypothèse C :** Pour  $\nu \in \mathcal{F}$  la(les) composantes d'explosion  $y_\nu$  satisfait(satisfont)

$$y_\nu(t) \sim \frac{1}{(T-t)^p}, \quad t \uparrow T, \quad p > 0.$$

**Théorème C.1.** Soit  $u$  la solution de (C.1)-(C.2) qui vérifie les Hypothèses A et B, alors nous avons

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} t(\eta) = T.$$

**Théorème C.2.** Supposons que la solution  $u$  de (C.1)-(C.2) satisfait les Hypothèses A, B et C, et  $\{\eta_l\}$  la suite géométrique donnée par

$$\eta_l = \eta_0 \cdot q^l, \quad \eta_0 > 0, q > 1, l = 0, 1, 2, \dots$$

Soit la suite  $\{t_l\}$  définie par

$$t_l \stackrel{\text{def}}{=} t(\eta_l) = \int_0^{\eta_l} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

alors  $\{t_l\}$  converge linéairement vers  $T$  et la vitesse de convergence est donnée par  $q^{-1/p}$ .

## C.2 Algorithme

Nous vous proposons ici les algorithmes d'estimation des temps et vitesse d'explosion numériques.



(I) Calcul du temps d'explosion numérique.

Soit la suite  $\{\eta_l\}$  comme définie précédemment. Intégrons l'expression (C.3) de  $s = 0$  à  $\eta_l$  et posons  $t_l = t(\eta_l)$ .

Soit  $t_l^0 = t_l (l = 0, 1, 2, \dots)$ , en appliquant la méthode  $\Delta^2$  d'Aitken ([10]), on obtient

$$t_{l+2}^{(k+1)} = t_{l+2}^{(k)} - \frac{\left(t_{l+2}^{(k)} - t_{l+1}^{(k)}\right)^2}{t_{l+2}^{(k)} - 2t_{l+1}^{(k)} + t_l^{(k)}}, \quad l \geq 2k, k = 0, 1, 2, \dots$$

(II) Estimation de la vitesse d'explosion numérique.

En utilisant l'algorithme développé précédemment, on estime la vitesse  $p$  d'explosion comme suit :

Posons  $\{t_l^{(k)}\}, k = 0, \dots, K, l = 2k, \dots, L$  avec  $L \geq 2K$ . On a

$$q_l \stackrel{def}{=} \left| \frac{t_l^{(0)} - t_l^{(K)}}{t_{l-1}^{(0)} - t_l^{(K)}} \right|.$$

La vitesse d'explosion est alors donnée par

$$p_l \stackrel{def}{=} -1 / \log_q q_l = -1 / \log_q \left| \frac{t_l^{(0)} - t_l^{(K)}}{t_{l-1}^{(0)} - t_l^{(K)}} \right|.$$

# **Annexe D**

## **Articles publiés**



## NUMERICAL BLOW-UP TIME FOR A PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS\*

N'dri K. Cyrille<sup>1</sup>, Touré K. Augustin<sup>1</sup> and Yoro Gozo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny  
Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

<sup>2</sup>Université Nangui Abrogoua d'Abobo-Adjamé  
Abidjan, Côte d'Ivoire

### Abstract

In this paper, we study numerical approximations for positive solutions of a heat equation,  $u_t = u_{xx}$ , in a bounded interval,  $(0, 1)$ , with a nonlinear flux boundary condition at the boundary,  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u_x(1, t) = u^p(1, t)$  which implies that the solutions blow up in finite time. By a semidiscretization using finite difference method in the space variable, we get a system of ordinary differential equations which is expected to be an approximation of the original problem. We prove that every numerical solution blows up in finite time and that the numerical blow-up time converges to the continuous one as the mesh parameter goes to zero under certain assumptions. Finally, we give some numerical results to illustrate certain points of our work.

---

Received: August 13, 2018; Accepted: October 3, 2018

2010 Mathematics Subject Classification: 35K60, 35B44, 35B51, 65M06.

Keywords and phrases: nonlinear boundary conditions, convergence, arc length transformation, Aitken  $\Delta^2$  method.

\*Laboratoire des Mathématiques et Nouvelles Technologies de l'Information-INPHB.

### 1. Introduction

We consider the following parabolic problem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x, t) \in (0, 1) \times [0, T), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in [0, T), \\ u_x(1, t) = u^p(1, t), & t \in [0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

where  $u_0$  is positive and verifies the compatibility condition

$$u_0'(0) = 0, \quad u_0'(1) = u_0^p(1).$$

This problem has been widely analyzed from a mathematical point of view (see [1-8]), in particular, under certain assumptions, Gómez et al. [2] proved the existence and uniqueness of a classical solution up to some time. Moreover, by replacing  $u^p$  by a general nonlinear function  $f(u)$ , a necessary and sufficient condition was found in [4, 5, 7, 8] which guarantees that the solutions of problem (1) become unbounded in finite time, a phenomena that is known as blow-up (see [9-11], for general references on blow-up problems). More precisely, Rial and Rossi [5] and Gómez et al. [2] show that if  $f$  satisfies  $\int^{+\infty} \frac{1}{f} < \infty$ , then every positive solution has a finite interval of existence,  $[0, T)$ .

In our problem it is well known that if  $p > 1$ , every positive solution becomes unbounded in finite time in the sense that there exists a finite time  $T$  such that  $\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = +\infty$  (see [5, 4, 7]). The blow-up set (the set of points  $x \in [0, 1]$ , where  $u(x, t)$  becomes unbounded)  $B(u)$ , is localized at the boundary by a single point blow-up, i.e.,  $B(u) = \{1\}$  (see [5, 3]).

In this paper, we are interested in numerical approximations of (1). Since the solution  $u$  develops a singularity in finite time, it is interesting to question what can be said about numerical approximations of this kind of problem.

For works earlier on numerical approximations of blowing up solutions of this kind of problems we refer to [12-16]. In [14], Durán et al. analyzed a semidiscrete scheme (using finite elements in the space variable) in one space dimension. Recently, Acosta et al. [12] extended these results to several space dimensions and proved some new results concerning the asymptotic behaviour and the localization of blow-up points (blow-up set) for semidiscretizations in space.

Here we are interested in the numerical study of (1). We give some assumptions under which the solution of a semidiscrete form blows up in a finite time. We also prove that, under suitable assumptions on the initial data, the semidiscrete blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero.

The paper is written in the following manner. In Section 2, we give some properties concerning our semidiscrete scheme. In Section 3, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete form blows up in a finite time and study the convergence of semidiscrete blow-up time. Finally, in the last section, we give some numerical experiments.

## 2. The Semidiscrete Problem

Let  $I$  be a positive integer, we set  $h = \frac{1}{I}$ , and we define the grid  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Let  $T > 0$  be a positive real such that  $[0, T]$  is a time interval on which the solution  $u$  of the continuous problem is defined. We approximate the solution  $u$  of the problem (1) by the solution

$$U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$$

of the semidiscrete equations

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \delta^2 U_i(t), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\frac{dU_0(t)}{dt} = \delta^2 U_0(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^p(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (5)$$

where

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2 U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}.$$

**Definition 1.** A function  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  is an upper solution of (2)-(5) if

$$\frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\frac{dU_0(t)}{dt} - \delta^2 U_0(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} - \delta^2 U_I(t) - \frac{2}{h} U_I^p(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$U_i^0 \geq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \quad (9)$$

On the other hand, we say that  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  is a *lower solution* of (2)-(5) if these inequalities are reversed.

The following results are semidiscrete forms of a maximum principle and will be an important tool in the study of the semidiscrete problem (2)-(5). Their proofs are standard but we outline them for the sake of completeness.

**Lemma 1.** Let  $T > 0$ , and  $U_h, V_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  such that

$$\frac{d}{dt} U_i(t) - \delta^2 U_i(t) \leq \frac{d}{dt} V_i(t) - \delta^2 V_i(t), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in (0, T), \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} U_0(t) - \delta^2 U_0(t) \leq \frac{d}{dt} V_0(t) - \delta^2 V_0(t), \quad t \in (0, T), \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}U_I(t) - \delta^2 U_I(t) - \frac{2}{h}U_I^p \leq \frac{d}{dt}V_I(t) - \delta^2 V_I(t) - \frac{2}{h}V_I^p(t), \quad t \in (0, T),$$

(12)

$$U_i(0) \leq V_i(0), \quad i = 0, \dots, I. \tag{13}$$

Then, we have:  $U_i(t) \leq V_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in (0, T)$ .

**Proof.** Let us define the vector  $Z_h(t) = (V_h(t) - U_h(t))e^{\lambda t}$  with  $\lambda$  a real for  $i = 0, \dots, I$  and for  $t \in [0, T_0]$ . We obtain

$$\frac{d}{dt}Z_i(t) - \delta^2 Z_i(t) - \lambda Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T), \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}Z_0(t) - \delta^2 Z_0(t) - \lambda Z_0(t) \geq 0, \quad t \in (0, T), \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}Z_I(t) - \delta^2 Z_I(t) - \left(\lambda + \frac{2p}{h}\xi_I^{p-1}(t)\right)Z_I(t) \geq 0, \quad t \in (0, T), \tag{16}$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \tag{17}$$

where  $\xi(t)$  is an intermediate value between  $V_I(t)$  and  $U_I(t)$ .

Let  $T_0 < T$ , we denote  $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} Z_i(t)$ . Since for  $i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $Z_i(t)$  is a continuous function on the compact  $[0, T_0]$ , there exists  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$  and  $t_{i_0} \in [0, T_0]$  such that  $m = Z_{i_0}(t_{i_0})$ .

Suppose  $m < 0$ ,

- if  $t_{i_0} = 0$ , then  $Z_{i_0}(0) < 0$ , which contradicts (17);

- if  $t_{i_0} \neq 0$ , by taking  $\lambda$  such that  $-\left(\lambda + \frac{2p}{h}\xi^{p-1}(t)\right) > 0$  it is not

difficult to see that

$$\frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_0(t_0) - Z_0(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) = \frac{Z_{i_0-1}(t_{i_0}) - 2Z_{i_0}(t_{i_0}) + Z_{i_0+1}(t_{i_0})}{h^2} \geq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I-1,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) = \frac{2Z_1(t_{i_0}) - 2Z_0(t_{i_0})}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 0,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) = \frac{2Z_{I-1}(t_{i_0}) - 2Z_I(t_{i_0})}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = I.$$

Moreover, by a straightforward computation, we get

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} - \lambda Z_0(t_0) < 0,$$

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} - \left( \lambda + \frac{2p}{h} \xi_I^{p-1}(t_0) \right) Z_I(t_0) < 0,$$

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - \lambda Z_{i_0}(t_0) < 0,$$

which contradicts (14)-(16). The proof is complete.

As an immediate consequence we have the following comparison result.

**Remark 1.** Let  $T > 0$ , let  $U_h, V_h$  be, respectively, a lower solution and an upper solution of (2)-(5), then  $U_i(t) \leq V_i(t)$  for  $i = 0, \dots, I$ .

Now, we are interested in the behavior of non-negative solutions of (2)-(5). The following lemma says that the semidiscrete solution is increasing in time.

**Lemma 2.** Let  $T > 0$  and  $U_h$  be a solution of semidiscrete problem (2)-(5) such that  $\delta^2 U_h(0) \geq 0$ . Then

$$\frac{dU_i(t)}{dt} \geq 0 \text{ for } 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T].$$

**Proof.** Introduce the vector  $Z_h(t)$  defined by  $Z_i(t) = \frac{d}{dt} U_i(t)$  for  $t \in [0, T]$  and  $0 \leq i \leq I$ . Let  $t_0$  be the first  $t > 0$  such that  $Z_i(t) \geq 0$  for  $t \in$



$[0, t_0)$ ,  $0 \leq i \leq I$ , but  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  for a certain  $i_0 \in \{1, \dots, I\}$ . Without loss of generality, we suppose that  $i_0$  is the smallest integer checking the inequality above. We observe that

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I,$$

which implies that

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0, \quad \text{for } i \leq i_0 \leq I - 1,$$

$$\frac{dZ_0(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_0(t_0) < 0, \quad \text{for } i_0 = 0,$$

$$\frac{dZ_I(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_I(t_0) - pU_I^{p-1}(t_0)Z_I(t_0) < 0, \quad \text{for } i_0 = I,$$

but these inequalities contradict (2)-(4) and the proof is complete.

Now we prove that solutions with non-negative initial data are indeed positive.

**Lemma 3.** *If  $U_h$  satisfies*

$$\frac{dU_0(t)}{dt} - \delta^2 U_0(t) \geq 0, \tag{18}$$

$$\frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I - 1, \tag{19}$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} - \delta^2 U_I(t) - \frac{2}{h} U_I^p \geq 0, \tag{20}$$

$$U_i(0) \geq 0, \quad (21)$$

then  $U_i(t) \geq 0$ , for  $i = 1, \dots, I$ ,  $t \in [0, T)$  and  $U_i(0) < U_i(t)$ .

**Proof.** From (18)-(21), we obtain that  $U_h$  is an upper solution. Then we have  $0 \leq U_i(0) \leq U_i(t)$  from Lemma 2 and Remark 1.

The following lemma says that the semidiscrete solution is increasing in space.

**Lemma 4.** *Let  $T > 0$  and  $U_h$  be a solution of semidiscrete problem (2)-(5). Then, we have:*

$$U_i(t) > U_{i-1}(t), \text{ for } i = 1, \dots, I, \text{ } t \in [0, T].$$

**Proof.** Introduce the vector  $Z_h$  such that  $Z_i(t) = U_i(t) - U_{i-1}(t)$  for  $t \in [0, T]$  and  $i = 1, \dots, I$ . Let  $t_0$  be the first  $t > 0$  such that  $Z_i(t) \geq 0$  for  $t \in [0, t_0)$  but  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  for a certain  $i_0 \in \{1, \dots, I\}$ . We observe that

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I,$$

which implies that

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0, \text{ for } 1 \leq i_0 \leq I - 1,$$

$$\frac{dZ_I(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_I(t_0) - p\beta_I^{p-1}(t_0)Z_I(t_0) < 0, \text{ for } i_0 = I,$$

where  $\beta_I(t_0)$  is an intermediate value between  $U_{I-1}(t_0)$  and  $U_I(t_0)$ . But these inequalities contradict (2)-(4) and the proof is complete.

The next theorem establishes that, for each fixed time interval  $[0, T]$  where  $u$  is defined, the solution of the semidiscrete problem (2)-(5) approximates  $u$ , as  $h \rightarrow 0$ .

**Theorem 1.** *Assume that the problem (1) has a solution  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  and the initial condition  $\varphi_h$  at (5) verifies*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \text{ as } h \rightarrow 0, \quad (22)$$

where  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ ,  $t \in [0, T]$ . Then, for  $h$  small enough, the semidiscrete problem (2)-(5) has a unique solution  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  such that

$$\max_{t \in [0, T]} (\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty) = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ as } h \rightarrow 0. \quad (23)$$

**Proof.** Let  $K > 0$  be such that

$$\|u\|_\infty \leq K. \quad (24)$$

Then the semidiscrete problem (2)-(5) has for each  $h$ , a unique solution  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ . Let  $t(h)$  be the greatest value of  $t > 0$  such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1 \text{ for } t \in (0, t(h)). \quad (25)$$

The relation (22) implies  $t(h) > 0$  for  $h$  small enough.

Let  $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$ . Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(x, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ for } t \in (0, t^*(h)),$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + K \text{ for } t \in (0, t^*(h)). \quad (26)$$

Let  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  be the discretization error. Using the Taylor's expansion, we have for  $t \in (0, t^*(h))$ ,

$$\frac{de_i}{dt} = \delta^2 e_i(t) + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\theta_i, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_i, t) \right), \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_0(t) &= \frac{2e_1(t) - 2e_0(t)}{h^2} + \frac{h}{3} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(\chi_0, t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(\gamma_0, t) \right) \\ &\quad + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\theta_0, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_0, t) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_I(t) &= \frac{2e_{I-1}(t) - 2e_I(t)}{h^2} + \frac{h}{3} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(\chi_I, t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(\gamma_I, t) \right) \\ &\quad + \frac{h^2}{4!} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\theta_I, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi_I, t) \right) + \frac{2p}{h} \mu_I^{p-1} e_I, \end{aligned}$$

where

$\mu_I$  is an intermediate value between  $U_I(t)$  and  $u(x_I, t)$ ,

$\theta_i$  is an intermediate value between  $x_i$  and  $x_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,

$\xi_i$  is an intermediate value between  $x_{i-1}$  and  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq I$ ,

$\theta_0$  and  $\xi_0$  are intermediate values between  $x_0$  and  $x_1$ ,

$\theta_I$  and  $\xi_I$  are intermediate values between  $x_{I-1}$  and  $x_I$ .

Using (26), there exists  $\lambda > 0$  positive constant such that

$$\frac{d}{dt} e_i - \delta^2 e_i \leq \lambda h^2, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} e_0 - \delta^2 e_0 \leq \lambda h^2, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} e_I - \delta^2 e_I \leq \lambda |e_I| + \lambda h^2. \quad (29)$$

Now, we consider the vector  $Z_h(t)$ ,  $t \in [0, T]$  such that

$$Z_i(t) = (\| \varphi_h - u_h(0) \|_\infty + \lambda h^2) e^{(\lambda+1)t}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

A simple computation gives

$$\frac{dZ_i}{dt}(t) - \delta^2 Z_i(t) > \lambda h^2, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad (30)$$

$$\frac{dZ_0}{dt}(t) - \delta^2 Z_0(t) > \lambda h^2, \quad (31)$$

$$\frac{dZ_I}{dt}(t) - \delta^2 Z_I(t) > \lambda Z_I(t) \lambda, \quad (32)$$

$$Z_i(0) = \|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2. \quad (33)$$

From Lemma 1, we obtain

$$Z_i(t) > e_i(t), \quad \text{for } t \in (0, t^*(h)), \quad i = 0, \dots, I.$$

By an analogous argument, we also prove that

$$Z_i(t) > -e_i(t), \quad \text{for } t \in (0, t^*(h)), \quad i = 0, \dots, I.$$

Hence we have

$$Z_i(t) > |e_i(t)|, \quad \text{for } t \in (0, t^*(h)), \quad i = 0, \dots, I.$$

We deduce that

$$\begin{aligned} \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty &\leq e^{(\lambda+1)t} (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2), \\ &\text{for } t \in (0, t^*(h)). \end{aligned}$$

Next we prove that  $t^*(h) = T$ . Suppose that  $T > t(h)$ , from (25), we obtain

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq e^{(\lambda+1)T} (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2). \quad (34)$$

Since  $e^{(\lambda+1)T} (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2) \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ , we deduce from (34) that  $1 \leq 0$ , which is impossible.

### 3. Convergence of the Semidiscrete Blow-up Time

In this section, under some assumptions, we show that solution  $U_h$  of the

semidiscrete problem (2)-(5) blows up in a finite time and we prove the convergence of the semidiscrete blow-up time using Theorem 1.3 in [17]. This proof will be done in two steps.

Let  $u$  be the solution of the problem (1) which blows up in a finite time  $T$ .

**Step 1.** (Convergence of  $J_h$ )

We define functionals  $J$  and  $J_h$  as follows:

$$J[u](t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx \quad (35)$$

and

$$J_h[u_h](t) = h \sum_{i=1}^{I-1} u_i^2(t) + \frac{h}{2} (u_0^2(t) + u_I^2(t)). \quad (36)$$

Using Theorem 1, we can show that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{[0; T-\varepsilon]} |J[u](t) - J_h[u_h](t)| = 0.$$

**Step 2.** (Blow-up of  $u_h$  at  $T_h$  and convergence of  $T_h$ )

We assume that the initial data satisfies  $(u_0)_{xx} > 0$ , then  $u_x$  is monotone increasing function of  $x$  (see [2, Proposition 1.3]).

Let us define the energy  $I$  by

$$I[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{p+1} u^{p+1}(1, t). \quad (37)$$

For any solution  $u$ , energy  $I$  is monotone non-increasing function of  $t$ . In fact, one can easily show that  $\frac{d}{dt} I[u](t) = -\int_0^1 u_t^2(x, t) dx < 0$ .

From (35) and (37), we obtain the following equality:

$$\frac{d}{dt} J[u](t) = -4I[u](t) + \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(1, t). \quad (38)$$

Since

$$2 \frac{(p-1)}{p+1} u^{p+1}(1, t) = 2(p-1) \int_0^1 u^p(x, t) u_x(x, t) dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0, t),$$

we can show that

$$\frac{d}{dt} J[u](t) \geq -4I[u_0] + 2(p-1) \int_0^1 u^p(x, t) u_x(x, t) dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0, t).$$

By the first mean value theorem for definite integrals, there exists  $\xi \in (0, 1)$  such that

$$\frac{d}{dt} J[u](t) \geq -4I[u_0] + 2(p-1) u_x(\xi, t) \int_0^1 u^p(x, t) dx + 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0, t).$$

Taking

$$\beta = \inf \{2(p-1) u_x(\xi, t), t \in [0, T]\}$$

and

$$\gamma = \inf \left\{ 2 \frac{p-1}{p+1} u^{p+1}(0, t), t \in [0, T] \right\},$$

we obtain

$$\frac{d}{dt} J[u](t) \geq -4I[u_0] + \beta \int_0^1 u^p(x, t) dx + \gamma.$$

By Jensen's inequality, we have for  $p > 2$ ,

$$\frac{d}{dt} J[u](t) \geq \beta \left( \int_0^1 u^2(x, t) dx \right)^{\frac{p}{2}} + \gamma - 4I[u_0],$$

which gives

$$\frac{d}{dt} J[u](t) \geq \beta (J)^{\frac{p}{2}} + \alpha. \quad (39)$$

Since

$$\frac{d}{dt} J[u](t) = 2 \int_0^1 u(x, t) u_{xx}(x, t) dx,$$

we obtain

$$\frac{d^2}{dt^2} J[u](t) = \frac{2}{p+1} \frac{d}{dt} u^{p+1}(1, t) + 2u(1, t) \frac{d}{dt} u^p(1, t) - 2 \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2(x, t) dx,$$

and thus we have

$$\frac{d^2}{dt^2} J[u](t) \geq \frac{2}{p+1} \frac{d}{dt} u^{p+1}(1, t) - 2 \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2(x, t) dx.$$

For  $p > 1$ , by taking  $\lambda = \min\left\{\frac{1}{p+1}, 1\right\}$ , we obtain

$$\frac{d^2}{dt^2} J[u](t) \geq -\lambda \frac{d}{dt} J[u](t). \tag{40}$$

Using  $J_h$  as defined by (36), we prove by an analogous argument that

$$\frac{d}{dt} J_h[u_h](t) \geq \alpha + \beta J_h^{\frac{p}{2}},$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h[u_h](t) \geq -\lambda \frac{d}{dt} J_h[u_h](t),$$

with

$$I_h[u_h](t) = \frac{1}{8h} \sum_{i=1}^{I-1} (u_{i+1} - u_{i-1})^2 + \frac{h}{4} u_I^{2p} - \frac{1}{p+1} u_I^{p+1}.$$

From (38), we show that  $\frac{d}{dt} J[u](t)$  tends to infinity as  $t \rightarrow T$  since

$$\lim_{t \rightarrow T} u(1, t) = \infty \text{ (see [3, 5]).}$$

From (39) taking  $G(s) = \alpha + \beta s^{\frac{p}{2}}$ , we show that for  $p > 2$ ,  $\int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty$  with  $s > R_0$ . Using the Step 1, we can ensure the convergence of blow-up time by Theorem 1.3 in [17].



We have thus proved the following.

**Theorem 2.** *Let  $T$  be the blow-up time of (1). We assume  $\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$ , as  $h \rightarrow 0$ . Then for  $h$  small enough, the solution  $U_h$  of the problem (2)-(5) blows up in finite time  $T_h$ . Moreover, if  $p > 2$  and  $\delta^2 u_h(0) > 0$ , we have*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T_h = T.$$

#### 4. Numerical Experiments

In this section, we present some numerical approximations to the blow-up time of problem (1). We obtain such numerical approximations by integrating numerically the semidiscrete problem (2)-(5). For this, we used the method presented by Hirota and Ozawa [18] to obtain our results. This method is to transform the ODE into a tractable form by the arc length transformation technique and to generate a linearly convergent sequence to the blow-up time. The resulting sequence is accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. We use the DOP54 ([19]) as the adaptive code for the integration of the ODEs.

Consider the problem (1) with  $u_0(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2}{5}$ , we approximate the solution  $u$  of (1) by the solution  $U_i$  of the following system of ODEs:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{I-1} \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{I-1} \\ U_I \end{pmatrix} + \frac{2}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_I^p \end{pmatrix}$$

with  $h = \frac{1}{I}$ . Now, let us define the sequence  $s_\ell$  by  $s_\ell = 2^7 \cdot 2^\ell$  ( $\ell = 0, \dots, 10$ ), and the parameters in the DOP54 are  $ITOL = 0$  and  $ATOL = RTOL = 1.d$

– 15. In the following tables, in rows, we present the numerical blow-up times  $T^n$ , the steps and the orders of the approximations corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. The order ( $s$ ) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) - (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

**Table 1.** Convergence behaviour of  $T^n$  to the blow-up  $T$  for  $p = 2.5$

$I$	$T^n$	Steps	$s$
16	0.22728625	4035	-
32	0.22290555	6838	-
64	0.22152340	12292	1.66
128	0.22110600	23005	1.73
256	0.22098368	44858	1.77
512	0.22094860	100824	1.80
1024	0.22093871	309309	1.83

**Table 2.** Convergence behaviour of  $T^n$  to the blow-up  $T$  for  $p = 3$

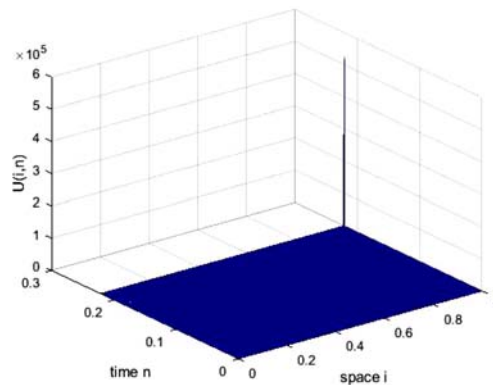
$I$	$T^n$	Steps	$s$
16	0.16304688	3107	-
32	0.15912967	5279	-
64	0.15788282	9493	1.65
128	0.15750425	17745	1.72
256	0.15739290	34437	1.77
512	0.15736089	75448	1.80
1024	0.15735184	224075	1.82

**Table 3.** Convergence behaviour of  $T^n$  to the blow-up  $T$  for  $p = 3.5$

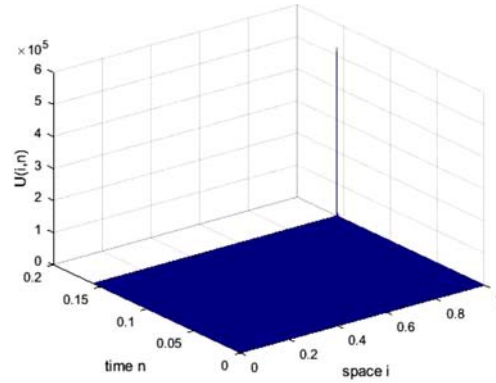
$I$	$T^n$	Steps	$s$
16	0.12518305	2506	-
32	0.12155041	4279	-
64	0.12038558	7716	1.64
128	0.12003044	14433	1.71
256	0.11992569	27944	1.76
512	0.11989552	60092	1.80
1024	0.11988698	200963	1.82

**Remark 2.** From the tables, we can assure the convergence of  $T^n$  to the blow-up time of the solution of (1), since the rate of convergence is near 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space. The various tables of our numerical results show that there is a relationship between the blow-up time and the flow on the boundary. When the flow on the boundary increases ( $p > 2$ ), the convergence of  $T^n$  is slower.

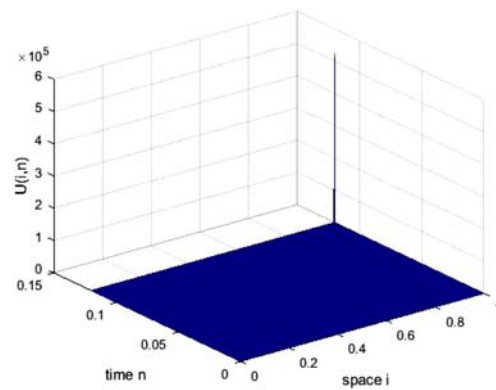
For other illustrations, in what follows, we give some plots to illustrate our analysis. From Figures 1, 2 and 3, we can observe the rapidly growing behaviour of the solution and that the semidiscrete solution blows up in a finite time at the last node, which is in agreement with the theoretical results (see [3, 5]).



**Figure 1.** Evolution of the semidiscrete solution,  $p = 2.5$ .



**Figure 2.** Evolution of the semidiscrete solution,  $p = 3$ .



**Figure 3.** Evolution of the semidiscrete solution,  $p = 3.5$ .

### References

- [1] Ján Filo, Diffusivity versus absorption through the boundary, *J. Differential Equations* 99 (1992), 281-305.
- [2] Julián López Gómez, Viviana Márquez and Noemí Wolanski, Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition, *J. Differential Equations* 92 (1991), 384-401.
- [3] Bei Hu and Hong-Ming Yin, The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition, *Trans. Amer. Math. Soc.* 346(1) (1994), 117-135.
- [4] Howard A. Levine and Lawrence E. Payne, Nonexistence theorems for the heat

- equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time, *J. Differential Equations* 16 (1974), 319-334.
- [5] D. F. Rial and J. D. Rossi, Blow-up results and localization of blow-up points in an  $n$ -dimensional smooth domain, *Duke Math. J.* 88(2) (1997), 391-405.
  - [6] D. F. Rial and J. D. Rossi, Localization of blow-up points for a parabolic system with a nonlinear boundary condition, *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo XLVIII(2)* (1999), 135-152.
  - [7] Wolfgang Walter, On existence and nonexistence in the large of solutions of parabolic differential equations with a nonlinear boundary condition, *SIAM J. Math. Anal.* 6(1) (1975), 85-90.
  - [8] Mingxin Wang and Yonghui Wu, Global existence and blow-up problems for quasilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, *SIAM J. Math. Anal.* 24(6) (1993), 1515-1521.
  - [9] Luis M Abia, J. C. López-Marcos and Julia Martínez, Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations, *Appl. Numer. Math.* 20 (1996), 145-156.
  - [10] Luis M. Abia, J. C. López-Marcos and Julia Martínez, On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations, *Appl. Numer. Math.* 26 (1998), 399-414.
  - [11] T. M. Mathurin, T. K. Augustin and M. E. Patrice, Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions, *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 60(2) (2012), 125-167.
  - [12] G. Acosta, J. Fernández Bonder, P. Groisman and J. D. Rossi, Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition in several space dimensions, *Discrete Cont. Dyn. Systems Ser. B* 2 (2002), 279-294.
  - [13] G. Acosta, R. G. Durán and J. D. Rossi, An adaptive time step procedure for a parabolic problem with blow-up, *Computing* 68 (2002), 343-373.
  - [14] R. G. Durán, J. I. Etcheverry and J. D. Rossi, Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition, *Discrete Cont. Dyn. Systems* 4 (1998), 497-506.
  - [15] R. Ferreira, P. Groisman and J. D. Rossi, Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 12(4) (2002), 461-483.
  - [16] R. Ferreira, P. Groisman and J. D. Rossi, An adaptive numerical scheme for a parabolic problem with blow-up, *IMA J. Numer. Anal.* 23 (2003), 439-463.

- [17] Takeo K. Ushijima, On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 36(5) (2000), 613-640.
- [18] Chiaki Hirota and Kazufumi Ozawa, Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations - an application to the blow-up problems of partial differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 193(2) (2006), 614-637.
- [19] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems, *Springer Series in Computational Mathematics*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1993.

**NUMERICAL QUENCHING VERSUS BLOW-UP FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY OUTFLOW**KOUAKOU CYRILLE N'DRI<sup>1</sup>, KIDJEGBO AUGUSTIN TOURÉ, AND GOZO YORO

ABSTRACT. In this paper, we study numerical approximations for positive solutions of a semilinear heat equations,  $u_t = u_{xx} + u^p$ , in a bounded interval  $(0, 1)$ , with a nonlinear flux boundary condition at the boundary  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u_x(1, t) = -u^{-q}(1, t)$ . By a semi-discretization using finite difference method, we get a system of ordinary differential equations which is expected to be an approximation of the original problem. We obtain some conditions under which the positive solution of our system quenches or blows up in a finite time and estimate its semidiscrete blow-up and quenching time. We also estimate the semidiscrete blow-up and quenching rate. Finally, we give some numerical results to illustrate our analysis.

**1. INTRODUCTION**

In this paper, we consider the following initial-boundary value problem:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u^p, & 0 < x < 1, 0 < t < \infty, \\ u_x(0, t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u_x(1, t) = -u^{-q}(1, t), & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

where  $p, q > 0$  and  $u_0(x)$  is a positive function with  $u_0'(0) = 0$ ,  $u_0'(1) = -u_0^{-q}(1)$ . Physically, (1.1) can be treated as a heat conduction model that incorporates

<sup>1</sup>corresponding author

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35K61, 65M06, 35B40, 35B44, 35B51.

*Key words and phrases.* Nonlinear Parabolic Equation, Nonlinear boundary outflux, Semidiscretizations, Numerical quenching, Numerical blow-up, Quenching rate, blow-up rate.

the effects of reaction and nonlinear outflux. Mathematically, (1.1) is a combination of the following two problems:

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u^p, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 1 \leq x \leq 0, \end{cases}$$

and

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) = -u^{-q}(1, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Problems (1.2) and (1.3) has been widely analyzed (see [5–8] and the references cited therein). In particular, it is well known that if  $p > 1$  all positive solutions of problem (1.2) blow up in finite time (see [5]) and that the rate near the blow-up time  $T_b$  is  $(T_b - t)^{\frac{-1}{p-1}}$ , [2].

Regarding problem (1.3), Keng Deng and Mingxi Xu in [8] considered a nonlinear diffusion equation  $(\psi(u))_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$  with a singular boundary condition  $u_x(1, t) = -g(u(1, t))$ , they proved finite time quenching for the solution. They are also established results on the quenching set and rate. Moreover in [7] the authors was shown that  $u$  quenches in finite time for all  $u_0$ , and the only quenching point is  $x = 1$ . They estimated the quenching rate by  $(T_q - t)^{\frac{1}{2(q+1)}}$ .

Let us give the two following definitions.

**Definition 1.1.** *We say that the classical solution  $u$  of (1.1) quenches in a finite time if there exists a finite time  $T_q$  such that  $\min_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) > 0$  for  $t \in [0, T_q)$  but  $\lim_{t \rightarrow T_q^-} \min_{0 \leq x \leq 1} u(x, t) = 0$ .*

**Definition 1.2.** *We say that the classical solution  $u$  of (1.1) blows up in a finite time if there exists a finite time  $T_b$  such that  $\|u(t)\|_\infty < \infty$  for  $t \in [0, T_b)$  but  $\lim_{t \rightarrow T_b^-} \|u(t)\|_\infty = \infty$ .*

From now on, we denote by  $T_q$  and  $T_b$  the quenching time and the blow up time respectively of problem (1.1).



Concerning problem (1.1), K. Deng and C. L. Zhao [10] established criteria for finite time blow-up and quenching, they are discussed to the blow-up and quenching sets and obtained the blow-up and quenching rates. They also characterized the sets of stationary states and analyzed their instability in [9].

Here, our objective is the numerical study of (1.1). To the best of our knowledge, very few works are concerned with the numerical study of this kind of problem. For previous works on numerical study we refer to ([1, 11–16] and the references therein). Here we give some assumptions under which the solution of a semidiscrete form of (1.1) quenches or blows up in a finite time depends upon certain conditions on the initial data and estimate its semidiscrete quenching or blow-up time. We show that the rate estimate near blow-up time is the same as (1.3), but the one near quenching time is different that (1.3). We also prove that, under suitable assumptions on the initial datum, the semidiscrete quenching or blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero.

The paper is written in the following manner. In the next Section, we present a semidiscrete scheme of (1.1). In section 3, we give some properties concerning our semidiscrete scheme. In Section 4, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete form blows up in a finite time, study the convergence of semidiscrete blow-up time and estimate the semidiscrete rate near the blow up time. In Section 5, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete form quenches in a finite time, study the convergence of semidiscrete quenching time and estimate the semidiscrete rate near the quenching time. Finally, in the last section, we give some numerical experiments.

## 2. THE SEMIDISCRETE PROBLEM

Let  $I$  be a positive integer, we set  $h = 1/I$ , and we define the grid,  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Let  $T$  be a positive real such that  $[0, T]$  is a time interval on which the solution  $u$  of the continuous problem is defined. We approximate the solution  $u$  of the problem (1.1) by the solution  $U_h = (U_0(t), U_1(t), \dots, U_I(t))^T$

of the semidiscrete equations

$$(2.1) \quad \frac{dU_i(t)}{dt} = \delta^2 U_i(t) + U_i^p(t), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t > 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{dU_0(t)}{dt} = \delta^2 U_0(t) + U_0^p(t), \quad t > 0,$$

$$(2.3) \quad \frac{dU_I(t)}{dt} = \delta^2 U_I(t) - \frac{2}{h} U_I^{-q}(t) + U_I^p(t), \quad t > 0,$$

$$(2.4) \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I,$$

where

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2 U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}.$$

### 3. PROPERTIES OF THE SEMIDISCRETE PROBLEM

In this section, we give some important results which will be used later.

**Definition 3.1.** A function  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  is an upper solution of (2.1)-(2.4) if

$$\begin{aligned} \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) &\geq U_i^p(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad t \in [0, T], \\ \frac{dU_I(t)}{dt} - \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^{-q}(t) &\geq U_I^p(t), \quad t \in [0, T], \\ U_i^0 &\geq \varphi_i, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

On the other hand, we say that  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  is a lower solution of (2.1)-(2.4) if these inequalities are reversed.

**Lemma 3.1.** Let  $a_h(t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  and  $V_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  such that

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + a_i(t)V_i(t) &\geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T], \\ V_i(0) &\geq 0, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

Then we have  $V_i(t) \geq 0, 0 \leq i \leq I, t \in [0, T]$ .

*Proof.* Define the vector  $Z_h(t) = e^{\lambda t} V_h(t)$  where  $\lambda$  is such that

$$a_i(t) - \lambda > 0 \quad \text{for } 0 \leq i \leq I, t \in [0, T].$$

Let  $m = \min\{Z_i(t) : 0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T\}$ . Since for  $i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $Z_i(t)$  is a continuous function on the compact  $[0, T]$ , there exists  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$  and  $t_0 \in [0, T]$  such that  $m = Z_{i_0}(t_0)$ . We observe that

$$(3.1) \quad \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0,$$

$$(3.2) \quad \delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0, 1 \leq i_0 \leq I - 1,$$

$$(3.3) \quad \delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{if } i_0 = 0,$$

$$(3.4) \quad \delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{if } i_0 = I.$$

Moreover, by a straightforward computation, we get

$$(3.5) \quad \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + (a_{i_0}(t_0) - \lambda)Z_{i_0}(t_0) \geq 0.$$

Using (3.1)-(3.4), we deduce from (3.5) that  $(a_{i_0}(t_0) - \lambda)Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ , which implies that  $Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ . We deduce that  $V_h(t) \geq 0$  for  $t \in [0, T]$  and the proof is complete.  $\square$

Another form of the maximum principle for semidiscrete equations is the comparison lemma below.

**Lemma 3.2.** *Let  $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  and  $W_h(t), V_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  such that*

$$\begin{aligned} & \frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + g(V_i(t), t) < \frac{dW_i(t)}{dt} - \delta^2 W_i(t) + g(W_i(t), t), \\ & 1 \leq i \leq I - 1, t \in (0, T), \\ & \frac{dV_0(t)}{dt} - \delta^2 V_0(t) + g(V_0(t), t) < \frac{dW_0(t)}{dt} - \delta^2 W_0(t) + g(W_0(t), t) \quad t \in (0, T), \\ & \frac{dV_I(t)}{dt} + \frac{2}{h} V_I^{-q} - \delta^2 V_I(t) + g(V_I(t), t) < \frac{dW_I(t)}{dt} + \frac{2}{h} W_I^{-q} - \delta^2 W_I(t) + g(W_I(t), t) \\ & V_i(0) < W_i(0), i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

*Then  $V_i(t) < W_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in (0, T)$ .*

**Lemma 3.3.** *Let  $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  and  $W_h(t), V_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  such that*

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + g(V_i(t), t) &\leq \frac{dW_i(t)}{dt} - \delta^2 W_i(t) + g(W_i(t), t), \\ 1 \leq i \leq I-1, t \in (0, T), \\ \frac{dV_0(t)}{dt} - \delta^2 V_0(t) + g(V_0(t), t) &\leq \frac{dW_0(t)}{dt} - \delta^2 W_0(t) + g(W_0(t), t), \\ t \in (0, T), \\ \frac{dV_I(t)}{dt} + \frac{2}{h} V_I^{-q} - \delta^2 V_I(t) + g(V_I(t), t) &\leq \frac{dW_I(t)}{dt} + \frac{2}{h} W_I^{-q} - \delta^2 W_I(t) + g(W_I(t), t), \\ V_i(0) \leq W_i(0) \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Then  $V_i(t) \leq W_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in (0, T)$ .

**Lemma 3.4.** *Let  $T > 0$  and  $U_h$  be a solution of semidiscrete problem (2.1)-(2.4) and assume that the initial data at (2.4) verifies  $\varphi_i > \varphi_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ . Then, for  $i = 0, \dots, I-1$  and  $t \in (0, T]$  we have:*

$$U_i(t) > U_{i+1}(t).$$

*Proof.* Introduce the vector  $Z_h$  such that  $Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$  for  $t \in (0, T]$ ,  $i = 0, \dots, I-1$ . Let  $t_0$  be the first  $t > 0$  such that  $Z_i(t) < 0$  for  $t \in [0, t_0)$  but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I-1\}$ . Without loss of generality, we suppose that  $i_0$  is the smallest integer checking the inequality above. We observe that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \geq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I-2, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = I-1. \end{aligned}$$

Moreover, by a straightforward computation, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - (U_{i_0+1}^p - U_{i_0}^p) &> 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I-2, \\ \frac{d}{dt} Z_{I-1}(t_0) - \delta^2 Z_{I-1}(t_0) + \frac{2}{h} U_I^{-q}(t_0) - (U_I^p(t_0) - U_{I-1}(t_0)) &> 0, \quad i_0 = I-1. \end{aligned}$$

But these inequalities contradict (2.1)-(2.3) and this proof is complete.  $\square$

**Theorem 3.1.** *Assume that the problem (1.1) has a solution  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  and the initial condition  $\varphi_h$  at (2.4) verifies*

$$(3.6) \quad \|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

where  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ ,  $t \in [0, T]$ . Then, for  $h$  small enough, the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) has a unique solution  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  such that  $\max_{t \in [0, T]} (\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty) = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2)$  as  $h \rightarrow 0$ .

*Proof.* Let  $K > 0$  be such that

$$(3.7) \quad \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq K \quad \text{for } t \in [0, T].$$

Then the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) has for each  $h$ , a unique solution  $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ . Let  $t(h) \leq T$  be the greatest value of  $t > 0$  such that

$$(3.8) \quad \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1.$$

The relation (3.6) implies  $t(h) > 0$  for  $h$  small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \quad \text{for } t \in (0, t(h)),$$

which implies that

$$(3.9) \quad \|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + K \quad \text{for } t \in (0, t(h)).$$

Let  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  be the discretization error. Using the Taylor's expansion, we have for  $t \in (0, t(h))$

$$\begin{aligned} \frac{de_i}{dt} &= \delta^2 e_i(t) + p\zeta_i^{p-1}(t)e_i(t) + O(h^2), \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{de_I}{dt} &= \delta^2 e_I(t) + p\zeta_I^{p-1}(t)e_I(t) + \frac{2}{h}q\mu_I^{-q-1}(t)e_I(t) + O(h^2), \end{aligned}$$

where  $\zeta_i(t)$  is the intermediate value between  $U_i(t)$  and  $u(x_i, t)$  for  $i = 0, \dots, I$  and  $\mu_I(t)$  the one between  $U_I(t)$  and  $u(x_I, t)$ . Using (3.7) and (3.9), there exist  $L$  et  $\lambda$  positive constants such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e_i - \delta^2 e_i &\leq L|e_i(t)| + \lambda h^2, \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ \frac{d}{dt}e_I - \delta^2 e_I &\leq \frac{L}{h}|e_I| + \lambda h^2. \end{aligned}$$

Now, we consider the function  $Z \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1], [0, T])$  such that

$$Z(x, t) = e^{(\alpha+1)t+c(-x^2+1)}(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2), \quad 0 \leq i \leq I.$$

A simple computational give

$$\begin{aligned} \frac{dZ(x_i, t)}{dt} - \delta^2 Z(x_i, t) &> L|z(x_i, t)|\lambda h^2, \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ \frac{dZ_I}{dt} - \delta^2 Z_I &> \frac{L}{h}|Z(x_I, t)| + \lambda h^2. \end{aligned}$$

From lemma (3.2), we obtain  $Z_i(t) > e_i(t)$ , for  $t \in (0, t(h))$ ,  $i = 0, \dots, I$ . By analogy, we also prove that  $Z_i(t) > -e_i(t)$ , for  $t \in (0, t(h))$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Hence we have  $Z_i(t) > |e_i(t)|$ , for  $t \in (0, t(h))$ ,  $i = 0, \dots, I$ . We deduce that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2)e^{(\alpha+1)t+c}, \quad \text{for } t \in (0, t(h)).$$

Next we prove that  $t(h) = T$ . Suppose that  $T > t(h)$ , from (3.8), we obtain

$$(3.10) \quad 1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2)e^{(\alpha+1)T+c}.$$

Since  $(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + \lambda h^2)e^{(\alpha+1)T+c} \rightarrow 0$  as  $h \rightarrow 0$ , we deduce from (3.10) that  $1 \leq 0$ , which is impossible.  $\square$

#### 4. BLOW UP, BLOW UP RATE

In this section, under some assumptions, we show that the solution  $U_h$  of (2.1)-(2.4) blows up in a finite time. We assume that the initial data is a positive function and verifies.

$$(4.1) \quad (u_0(x))_{xx} + u_0^p(x) \geq 0 \text{ for } x \in [0, 1].$$

**Lemma 4.1.** *Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.4) and the initial data at (2.4) verifies*

$$(4.2) \quad \delta^2 \varphi_i + \varphi_i^p > 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Then,  $\frac{dU_i(t)}{dt} > 0$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in (0, T_b^h)$ .

*Proof.* Consider the vector  $Z_h(t)$  such that  $Z_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_b^h)$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_b^h)$  such that  $Z_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0)$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$

for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Without loss of generality, we suppose that  $i_0$  is the smallest integer checking the inequality above. We observe that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

Moreover, by a straightforward computation, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - pU_{i_0}^{p-1}(t_0)Z_{i_0}(t_0) &< 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \frac{d}{dt} Z_I(t_0) - \delta^2 Z_I(t_0) - \left(\frac{2}{h}qU_I^{-q-1}(t_0) + pU_I^{p-1}(t_0)\right)Z_I(t_0) &< 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

But these inequalities contradict (2.1)-(2.3) and this proof is complete.  $\square$

The following result gives a property of the operator  $\delta^2$ .

**Lemma 4.2.** *Let  $U_h \in \mathbb{R}^{I+1}$  be such that  $U_h \geq 0$ . Then, we have*

$$\delta^2(U_i^p) \geq pU_i^{p-1}\delta^2 U_i, \quad 0 \leq i \leq I.$$

*Proof.* Let us introduce function  $f(s) = s^p$ . Using Taylor's expansion we get

$$\begin{aligned} \delta^2 f(U_0) &= f'(U_0)\delta^2 U_0 + \frac{(U_1 - U_0)^2}{h^2} f''(\zeta_0), \\ \delta^2 f(U_I) &= f'(U_I)\delta^2 U_I + \frac{(U_{I-1} - U_I)^2}{h^2} f''(\zeta_I), \\ \delta^2 f(U_i) &= f'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\eta_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\zeta_i), \quad 1 \leq i \leq I - 1, \end{aligned}$$

where  $\eta_i$  is an intermediate value between  $U_i$  and  $U_{i+1}$  and  $\zeta_i$  the one between  $U_i$  and  $U_{i-1}$ . The result follows taking into account the fact that  $U_h \geq 0$ .  $\square$

Introduce the functionals

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_0^1 u^{p+1} dx + \frac{1}{-q+1} u^{-q+1}(1, t) \quad \text{and} \quad J(t) = \int_0^1 u^2 dx$$

and the semidiscrete approximations

$$(4.3) \quad \begin{aligned} I_h(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^I hU_i^{p+1} + \frac{1}{-q+1} U_I^{-q+1} \\ J_h(t) &= \sum_{i=0}^I hU_i^2. \end{aligned}$$

For the functional  $J$  using the condition (4.1) and the Jensen's inequality we obtain after integration by parts

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &= -2u^{-q+1}(1, t) - 2 \int_0^1 u_x^2 dx + 2 \int_0^1 u^{p+1} dx \\ &\geq -2u^{-q+1}(1, 0) + 2(1 - \lambda) \int_0^1 u^{p+1} dx \\ &\geq -2u^{-q+1}(1, 0) + 2(1 - \lambda) J^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned}$$

In [10] the author showed that if the condition (4.1) is satisfies then there exists  $T_b < \infty$  such that  $\lim_{t \rightarrow T_b} \|u(\cdot, t)\|_{L^1} = \infty$ , which implies that  $\lim_{t \rightarrow T_b} \frac{d}{dt} J(t) = +\infty$  for  $p > 1$ .

Let the functionals  $I_h(t)$  and  $J_h(t)$  as defined in (4.3). Multiplying both sides of (2.1) by  $h \frac{dU_i}{dt}$  and  $h dU_i$ , respectively, and then taking the sum from  $i = 0$  to  $i = I$ , we obtain

$$- \sum_{i=0}^I h \left( \frac{dU_i}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} - \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^I hU_i^p + \frac{1}{-q+1} U_I^{-q+1} \right),$$

which implies that the semidiscrete functional  $I_h(t)$  is non increasing for  $t \in [0, T_b^h)$ . Further,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I hU_i^2 &= 2 \left( - \sum_{i=0}^{I-1} \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{h} + \sum_{i=0}^I hU_i^{p+1} - U_I^{-q+1} \right) \\ &= -4I_h + \frac{2p-2}{p+1} \sum_{i=0}^I hU_i^{p+1} + \frac{2q+2}{-q+1} U_I^{-q+1}, \end{aligned}$$

and a straightforward calculation gives

$$\frac{d^2 J_h}{dt^2} = -4 \frac{dI_h}{dt} + 2(q+1) U_I^{-q} \frac{dU_I}{dt} + 2(p-1) \sum_{i=0}^I hU_i^p \frac{dU_i}{dt}.$$



Using the lemma (4.1) we obtain for  $p > 1$

$$\frac{d^2 J_h}{dt^2} \geq -4 \frac{dJ_h}{dt}.$$

Using the Hölder inequality and the expressions above, we obtain

$$\left(\frac{dJ_h}{dt}\right)^2 \leq 4 \left(\sum_{i=0}^I h U_i^2\right) \left(\sum_{i=0}^I h \left(\frac{dU_i}{dt}\right)^2\right) \leq J_h \frac{d^2 J_h}{dt^2}$$

which implies that  $\frac{d^2 J_h}{dt^2} \geq -\lambda \frac{dJ_h}{dt}$  where  $\lambda$  is a non-negative constant and

$$\frac{dJ_h}{dt} = \sum_{i=0}^I h U_i \frac{dU_i}{dt}.$$

Using the theorem 3.1 we obtain the following result, see [17].

**Theorem 4.1.** *Assume that the solution  $u$  of (1.1) blows up in a finite time  $T_b$  such that  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T_b))$ . We also assume that the initial data at (2.4) satisfies the condition (4.2) and the error of initial data is of order  $\circ(1)$ . Then for  $h$  small enough, the solution  $U_h$  of problem (2.1)-(2.4) blows up in finite time  $T_b^h$  for  $p > 1$ ,  $0 < q < 1$  and we have*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T_b^h = T_b.$$

**Theorem 4.2.** *Assume that the hypotheses in theorem 4.1 remains true. We also assume that the condition*

$$(4.4) \quad f(s)g'(s) - f'(s)g(s) \geq 0 \quad \text{for } s \geq 0,$$

*hold. Then, near the blow-up time  $T_b^h$ , the solution  $U_h$  of problem (2.1)-(2.4) has a following blow-up rate estimate*

$$(4.5) \quad \|U_h(t)\|_\infty \sim (T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}},$$

*in the sense that there exist two positive constants  $K_1, K_2$  such that*

$$K_1(T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}} \leq \|U_h(t)\|_\infty \leq K_2(T_b^h - t)^{\frac{-1}{p-1}} \quad \text{for } t \in (0, T_b^h).$$

*Proof.* Introduced the vector  $J_h(t)$  defined as follow

$$(4.6) \quad J_i = \frac{dU_i}{dt} - \varepsilon U_i^p, \quad 0 \leq i \leq I,$$

with  $\varepsilon$  is a positive constant. By a straightforward computation we get

$$\frac{d}{dt} J_i - \delta^2 J_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_i}{dt} - \delta^2 U_i \right) - \varepsilon p U_i^{p-1} \frac{dU_i}{dt} + \varepsilon \delta^2 U_i^p, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Using Lemma 4.2 and the equality (4.6), we obtain from the condition (4.4)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq pU_i^{p-1}J_i, \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ \frac{d}{dt}J_I - \delta^2 J_I &\geq (pU_I^{p-1} + \frac{2}{h}U_I^{-q-1})J_I.\end{aligned}$$

From (4.2), we observe that  $J_i(0) \geq 0$  for  $0 \leq i \leq I$  if  $\varepsilon$  is sufficiently small. We deduce from lemma 3.1 that  $J_i(t) \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq I$ , which yields the desired upper bound.

The following result concerns the lower bound for the quenching rate.

Let  $i_0$  be such that  $U_{i_0}(t) = \max_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$ . We can observe that

$$\begin{aligned}\delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{U_{i_0+1}(t) - 2U_{i_0}(t) + U_{i_0-1}(t)}{h^2} \leq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \leq 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \leq 0, \quad i_0 = I.\end{aligned}$$

We can see that  $\frac{dU_{i_0}(t)}{dt} \leq U_{i_0}(t)$  for  $0 \leq i_0 \leq I$ . Integrating this inequality over  $(t, T_b^h)$  and we obtain the result desired.  $\square$

## 5. QUENCHING, QUENCHING RATE

In this section, under some assumptions, we show that the solution  $U_h$  of (2.1)-(2.4) quenches in a finite time.

We note that if the initial data is a subsolution then the solution is monotone, non-decreasing function with respect to  $t$  and verifies:

$$(5.1) \quad (u_0(x))_{xx} + u_0^p(x) \leq 0 \quad \text{for } x \in [0, 1].$$

**Lemma 5.1.** *Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.4) and the initial data at (2.4) verifies*

$$(5.2) \quad \delta^2 \varphi_i + \varphi_i^p < 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Then,  $\frac{dU_i(t)}{dt} < 0$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_q^h)$ .

*Proof.* Consider the vector  $Z_h(t)$  such that  $Z_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_q^h]$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_q^h)$  such that  $Z_i(t) < 0$  for  $t \in [0, t_0)$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Without loss of generality, we suppose that  $i_0$  is the smallest integer checking the inequality above. We observe that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \geq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0+1}(t_0)}{h^2} < 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} < 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

Moreover, by a straightforward computation, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - pU_{i_0}^{p-1}(t_0)Z_{i_0}(t_0) &> 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \frac{d}{dt}Z_I(t_0) - \delta^2 Z_I(t_0) - \left(\frac{2}{h}qU_I^{-q-1}(t_0) + pU_I^{p-1}(t_0)\right)Z_I(t_0) &> 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

But these inequalities contradict (2.1)-(2.3) and the proof is complete.  $\square$

**Lemma 5.2.** *Let  $U_h \in \mathbb{R}^{I+1}$  be such that  $U_h > 0$ . Then we have*

$$\delta^2(U_i^{-q}) \geq -qU_i^{-q-1}\delta^2 U_i, \quad 0 \leq i \leq I.$$

*Proof.* Let us introduce function  $f(s) = s^{-q}$ . Using Taylor's expansion we get

$$\begin{aligned} \delta^2 f(U_0) &= f'(U_0)\delta^2 U_0 + \frac{(U_1 - U_0)^2}{h^2} f''(\zeta_0), \\ \delta^2 f(U_I) &= f'(U_I)\delta^2 U_I + \frac{(U_{I-1} - U_I)^2}{h^2} f''(\zeta_I), \\ \delta^2 f(U_i) &= f'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\eta_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\zeta_i), \quad 1 \leq i \leq I - 1. \end{aligned}$$

where  $\eta_i$  is an intermediate value between  $U_i$  and  $U_{i+1}$  and  $\zeta_i$  the one between  $U_i$  and  $U_{i-1}$ . The result follows taking into account the fact that  $U_h$  is nonnegative.  $\square$

Define the functional  $J$  and its approximation by

$$J(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad t \in [0, T_q^h]; \quad \text{and} \quad J_h(t) = \sum_{i=0}^I hU_i(t), \quad t \in [0, T_q^h].$$

We can easily check that  $\lim_{t \rightarrow T^q} \frac{d}{dt} J[u](t) = -\infty$ . For this  $J$  we obtained after integration by parts

$$\frac{d}{dt} J[u] = \int_0^1 u_t dx = -u^{-q}(1, t) + \int_0^1 u^p dx.$$

Notice that the condition (5.1) implies  $u_t \leq 0$ . Let:

$$0 < \zeta = \int_0^1 u_0^p(x) dx / u^{-q}(1, 0) < 1, \text{ which gives}$$

$$\frac{d}{dt} J[u] \leq -u^{-q}(1, t) + \zeta u^{-q}(1, 0) \leq (\zeta - 1)u^{-q}(1, t).$$

Since quenching occur only on the boundary (see [10]), we have  $\lim_{t \rightarrow T_q} u^{-q}(1, t) = \infty$ .

Let us assume that the initial data at (2.4) satisfies (5.2), by a simple computation, we obtain for  $t \in [0, T_h^q)$ ,  $p > 0$  and  $q > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} J_h(t) = q U_I^{-q-1}(t) \frac{d}{dt} U_I(t) + p \sum_{i=0}^I h U_i^{p-1}(t) \frac{d}{dt} U_i(t).$$

From lemma (5.1), we have  $\frac{d^2}{dt^2} J_h(t) \leq -c \frac{d}{dt} J_h(t)$  where  $c$  is a non-negative constant and  $\frac{d}{dt} J_h(t) = \sum_{i=0}^I h \frac{dU_i}{dt}$ .

Using Theorem 3.1 we obtain the following result , see [17].

**Theorem 5.1.** *Assume that the solution  $u$  of (1.1) quenches in a finite time  $T_q$  such that  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T_q))$ . We also assume that the initial data at (2.4) satisfies the condition (5.2) and the error of initial data is of order  $\circ(1)$ . Then for  $h$  small enough, the solution  $U_h$  of problem (2.1)-(2.4) quenches in finite time  $T_q^h$  for  $p > 0$ ,  $q > 0$  and we have  $\lim_{h \rightarrow \infty} T_q^h = T_q$ .*

**Theorem 5.2.** *Assume that the hypotheses of Theorem 5.1 remains true. We also assume that the condition*

$$(5.3) \quad f(s)g'(s) - f'(s)g(s) \geq 0 \quad \text{for } s \geq 0,$$

*holds. Then, near the quenching time  $T_q^h$ , the solution  $U_h$  of problem (2.1)-(2.4) has a following quenching rate estimate*

$$(5.4) \quad \|U_h(t)\|_{inf} \sim (T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}},$$

in the sense that there exist two positive constants  $K_1$  and  $K_2$ , such that

$$K_1(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}} \leq \|U_h(t)\|_{inf} \leq K_2(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}} \quad \text{for } t \in (0, T_q^h)$$

*Proof.* Introduce the vector  $J_h(t)$  defined as follow

$$(5.5) \quad J_i = \frac{dU_i}{dt}, \quad 0 \leq i \leq I - 1, \quad \text{and} \quad J_I = \frac{dU_I}{dt} + \varepsilon U_I^{-q},$$

where  $\varepsilon$  is a positive constant. By a straightforward computation we get

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_i}{dt} - \delta^2 U_i \right), \quad 0 \leq i \leq I - 1, \\ \frac{dJ_I}{dt} - \delta^2 J_I &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_I}{dt} - \delta^2 U_I \right) - \varepsilon q U_I^{-q-1} \frac{dU_I}{dt} - \varepsilon \delta^2 U_I^{-q}. \end{aligned}$$

Using Lemma 5.2 and the equality (5.5), from condition (5.3) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i &= p U_i^{p-1} J_i, \quad 0 \leq i \leq I - 1, \\ \frac{dJ_I}{dt} - \delta^2 J_I &= \left( \frac{2q}{h} U_I^{-q-1} + p U_I^{p-1} \right) J_I. \end{aligned}$$

From (5.2), we observe that  $J_i(0) \leq 0$  for  $0 \leq i \leq I$  if  $\varepsilon$  is sufficiently small. It follows from lemma 3.1 that  $J_i(t) \leq 0$  for  $0 \leq i \leq I, t \in (0, T_q^h)$ , which implies that  $\frac{dU_I}{dt} + \varepsilon U_I^{-q} \leq 0$  for  $t \in (0, T_q^h)$ . Thanks to Lemma 3.4,  $U_I(t) = \|U_h(t)\|_{inf}$  and we obtain the desired lower bound.  $\square$

The following result concerns the upper bound for the quenching rate.

Let  $i_0$  be such that  $U_{i_0}(t) = \min_{0 \leq i \leq I} U_i(t)$ . It is not difficult to see that

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{i_0}(t) &= \frac{U_{i_0+1}(t) - 2U_{i_0}(t) + U_{i_0-1}(t)}{h^2} \geq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \geq 0, \quad i_0 = I. \end{aligned}$$

We can see that  $\frac{dU_I(t)}{dt} \geq -\frac{2}{h} U_I^{-q}$ . Integrating this inequality over  $(t, T_q^h)$  and we obtain the result desired.

**Remark 5.1.** Let us point out that the quenching rate for the numerical scheme,  $(T_q^h - t)^{\frac{1}{q+1}}$ , is different from the continuous one,  $(T_q - t)^{\frac{1}{2(q+1)}}$ , see [10].

## 6. NUMERICAL EXPERIMENTS

In the section, we present some numerical approximations to the blow-up and quenching time of problem (1.2), we also discuss to the blow-up and quenching sets. We obtain such numerical approximations by integrating numerically the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) using the method presented by Hirota and Ozawa [4]. This method is to transform the ODE into a tractable form by the **arc length transformation technique** [S. Moriguti, C. Okuno, R. Suekane, M. Iri, K. Takeuchi, Ikiteiru Suugaku - Suuri Kougaku no Hatten (in Japanese), Baifukan, Tokyo, 1979.] and to generate a linearly convergent sequence to the blow-up time. The resulting sequence is accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. We use the DOP54 [3] as the adaptive code for the integration of the ODEs. In the following tables, in rows, we present the numerical blow-up and quenching times, the steps, the orders of the approximations and the rates corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256 and 512. The order ( $s$ ) of the method is computed from

$$\frac{\log((T_{4h} - T_{2h})/(T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

Parameters *InitialStep*, *AbsTol* and *RelTol* in DOP54 [3] are set like this *InitialStep* = 0 and *AbsTol* = *RelTol* =  $1.d - 15$ .

The first set of experiments were performed for the quenching in the case where  $u_0(x) = \varepsilon^{-1/q} - \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{2}$  with  $0 < p \leq 1$ ,  $0 < q \leq 1$ ,  $\varepsilon = 1.5$ . Let us define the sequence  $s_l$  by  $s_l = 2^3 \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ).

Table 1. Convergence behaviour of  $T^n$  to the quenching time  $T$  for  $p = 1/2, q = 1$

$I$	$T^n$	$n$	$s$	$p_l$
16	0.15911484	2942	...	0.5
32	0.15682314	5609	...	0.5
64	0.15610036	10754	1.66	0.5
128	0.15588244	20734	1.73	0.5
256	0.15581869	40569	1.77	0.5
512	0.15580044	84323	1.80	0.5

Table 2. Convergence behaviour of  $T^n$  to the quenching time  $T$  for  $p = 1/2, q = 1/2$

$I$	$T^n$	$n$	$s$	$p_l$
16	0.16100315	3432	...	0.66
32	0.15927478	6701	...	0.66
64	0.15871679	13000	1.63	0.66
128	0.15854545	25160	1.7	0.66
256	0.15849462	49111	1.75	0.66
512	0.15847990	99246	1.79	0.66

Table 3. Convergence behaviour of  $T^n$  to the quenching time  $T$  for  $p = 1, q = 1/2$

$I$	$T^n$	$n$	$s$	$p_l$
16	0.14332827	3257	...	0.66
32	0.14167987	6357	...	0.66
64	0.14114245	12332	1.62	0.66
128	0.14097635	23855	1.69	0.66
256	0.14092684	46492	1.75	0.66
512	0.14091245	93327	1.78	0.66

Table 4. Convergence behaviour of  $T^n$  to the quenching time  $T$  for  $p = 1, q = 1$

$I$	$T^n$	$n$	$s$	$p_l$
16	0.15309520	2893	...	0.5
32	0.15091834	5526	...	0.5
64	0.15022440	10602	1.65	0.5
128	0.15001371	20439	1.72	0.5
256	0.14995176	39964	1.77	0.5
512	0.14993396	82561	1.80	0.5

**Remark 6.1.** The tables 1-4 show the convergence of  $T^n$  to the quenching time of the solution of (1.1) when the condition 5.2 is satisfied, since the rate of convergence is near 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space. Moreover, the estimated quenching rate converges steadily to that given by (5.4). We also observe relationship between the quenching time and the flow on the boundary and the absorption on the one hand and in the interior of the domain on the other hand. In fact, when the flow on the boundary is constant  $q = 1/2$  and that the absorption in the interior of the domain increases by  $1/2$  to 1, the quenching time decreases from 0.16 to 0.14 whereas when the absorption in the interior of the domain is constant ( $q = 1/2$ ) and that the flow on the boundary increases from  $1/2$  to 1, the quenching time remains substantially the same at 0.16. The absorption in the interior of the domain slows down the quenching.

Next, we give some plots to illustrate our analysis. In the figures below we have used the case where  $I = 64$ . We can observe from figures 1-4 that the semidiscrete solution quenches in a finite time at the last node, which is well known in a theoretical point of view ([10]).

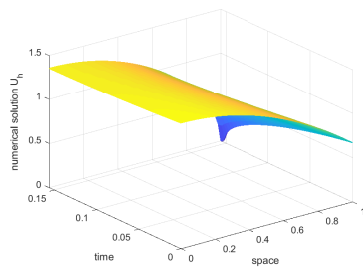


Fig. 1. Evolution of the semidiscrete solution for  $p = 0.5, q = 1$

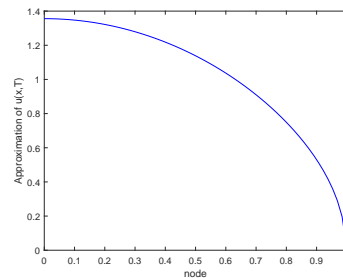


Fig. 2. Profile of the approximation of  $u(x, T)$  for  $p = 0.5, q = 1$

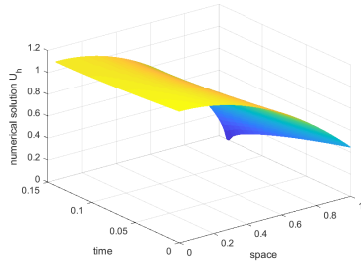


Fig. 3. Evolution of the semidiscrete solution for  $p = 1, q = 0.5$

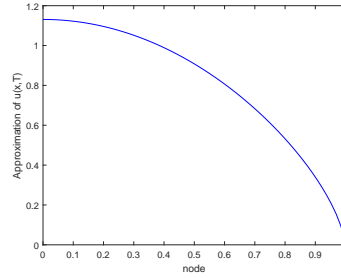


Fig. 4. Profile of the approximation of  $u(x, T)$  for  $p = 1, q = 0.5$

Now we consider blow-up for the two following cases. Firstly, we use  $u_0 = \varepsilon^{-1/q} - \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{2}$ , with  $p = 1.1, q = 0.9, \varepsilon = 0.5, s_l = 2^{118} \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ) and secondly,  $u_0 = \varepsilon^{-1/q} - \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{\varepsilon}{2}, p = 1.5, q = 0.5, \varepsilon = 0.5, s_l = 2^{52} \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ).

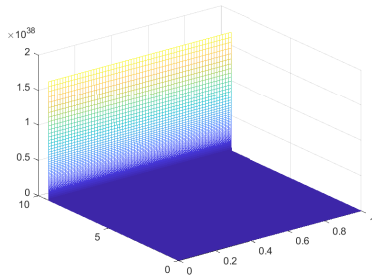


Fig. 5. Evolution of the semidiscrete solution for global blow-up

Table 5. Convergence behaviour of  $T^n$  to the blow-up time  $T$  for global blow-up

$I$	$T^n$	$n$	$s$	$p_l$
16	9.28403723	14086	...	10
32	9.28397671	26522	...	10
64	9.28396158	64409	2.0	10
128	9.28395780	197898	2.0	10
256	9.28395685	737989	2.0	10

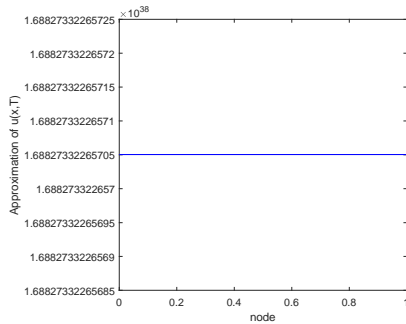


Fig. 6. Profile of the approximation of  $u(x, T)$  for global blow-up

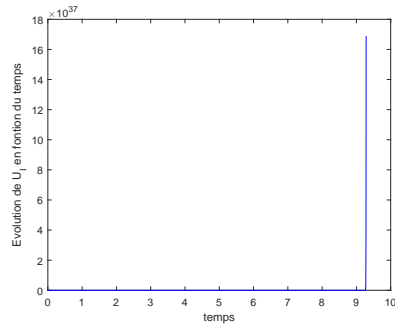


Fig. 7. Evolution of semi-discret solution for global blow-up



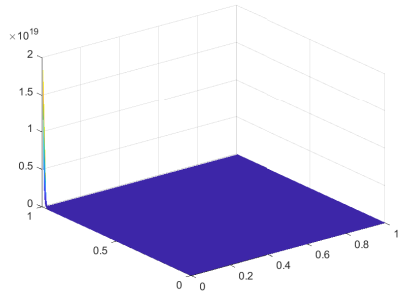


Fig. 8. Evolution of the semidiscrete solution for blow-up inside

Table 6. Convergence behaviour of  $T^n$  to the blow-up time  $T$  for blow-up inside

$I$	$T^n$	$n$	$s$	$p_l$
16	0.99160415	9761	...	2
32	0.99158941	13431	...	2
64	0.99158572	20603	2.0	2
128	0.99158480	35780	2.0	2
256	0.99158457	86308	2.0	2

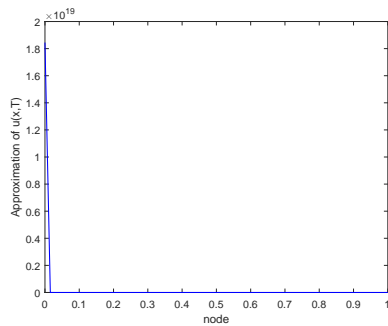


Fig. 9. Profile of the approximation of  $u(x, T)$  for blow-up inside

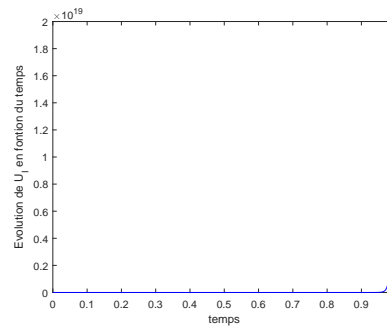


Fig. 10. Evolution of semi-discret solution for blow-up inside

**Remark 6.2.** As explained in remark 6.1, we see from tables 5 and 6 that  $T^h$  converges to the continuous one when condition (4.2) is satisfied. From figures 5-9 we can appreciate that blow-up can occur inside the domain, or in the whole interval for different values of  $u_0$ , which is in agreement with the theoretical results in [10]. We also observe that the estimated blow-up rate converges steadily to that given by (4.5).

REFERENCES

[1] A. GANON, M. TAHA, K.A. TOURÉ: *Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Far East J. Math. Sci. (FJMS,) **114**(1) (2019), 19–38.  
 [2] A. FRIEDMAN, B. MCLEOD: *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J., **34**(2) (1985), 425–447.

- [3] E. HAIRER, S.P.NØRSETT, G. WANNER: *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff problems*, Springer, Berlin, second rev. ed, 2008.
- [4] C. HIROTA, K. OZAWA: *Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations - An application to the blow-up problems of partial differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **193** (2006), 614–637.
- [5] C.V.PAO: *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.
- [6] H.A.LEVINE: *The quenching of solutions of linear parabolic and hyperbolic equations with nonlinear boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., **14**(6) (1983), 1139–1153.
- [7] M.FILA, H.A. LEVINE: *Quenching on the boundary*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., **21**(10) (1993), 795–802.
- [8] K.DENG, M. XU: *Quenching for a nonlinear diffusion equation with a singular boundary condition*, Z. Angew. Math. Phys., **50** (1999), 574–584.
- [9] K.DENG, C.L. ZHAO: *Instability of solutions of a semilinear heat equation with a neumann boundary condition*, Q. Appl. Math., **LXIII**(1) (2005), 13–19.
- [10] K.DENG, C. ZHAO: *Blow-up versus quenching*, Communication in Applied Analysis, **7**(1) (2003), 87–100.
- [11] D.NABONGO, T.K. BONI: *Numerical quenching for a nonlinear diffusion equation with a singular boundary condition*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin, **16** (2009), 289–303.
- [12] K.B.EDJA, K.A.TOURÉ, B.J-C. KOUA: *Numerical Blow-up for A Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions*, J. Math. Res., **10**(5) (2018), 119–128.
- [13] L.M.ABIA, J.C.LÓPEZ-MARCOS, J.MARTÍNEZ: *Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math., **20** (1996), 145–156.
- [14] K.C.N'DRI, K.A.TOURÉ, G. YORO: *Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Int. J. Numer. Methods Appl., **17**(3–4) (2018), 141–160.
- [15] K.A.ADOU, K.A. TOURÉ, A. COULIBALY: *On the computaton of the numerical blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation*, Int. J. Numer. Methods Appl., **18**(3) (2019), 7–18.
- [16] K.A.ADOU, K.A. TOURÉ, A. COULIBALY: *On the numerical quenching time at blow-up*, Adv. Math., Sci. J., **8**(2) (2019), 71–85.
- [17] K.USHIJIMA TAKEO: *On the Approximation of Blow-up Time for Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 613-640.

ÉCOLE DOCTORALE POLYTECHNIQUE  
UMRI MATHÉMATIQUES ET NOUVELLES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY  
YAMOISSOUKRO, BP 2444, CÔTE D'IVOIRE  
*E-mail address:* ndri.pack@gmail.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE  
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY  
YAMOISSOUKRO, CÔTE D'IVOIRE  
*E-mail address:* latoureci@gmail.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE  
UNIVERSITÉ NANGUI-ABROGOUA  
ABIDJAN, CÔTE D'IVOIRE  
*E-mail address:* yorocarol@yahoo.fr

# Références bibliographiques

- [1] L. M. Abia, J. C. López-Marcos, and J. Martínez. Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations. *Appl. Numer. Math.*, 20 :145–156, 1996.
- [2] L. M. Abia, J. C. López-Marcos, and J. Martínez. On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations. *Appl. Numer. Math.*, 26 :399–414, 1998.
- [3] L. M. Abia, J. C. López-Marcos, and Julia Martínez. Numerical blow-up time convergence for discretizations of reaction-diffusion equations. In *International conference on differential equations. Proceedings of the conference, Equadiff '99, Berlin, Germany, August 1–7, 1999. Vol. 2*, pages 1095–1097. 2000. ISBN 981-02-4989-6.
- [4] A. Acker and W. Walter. The quenching problem for nonlinear parabolic differential equations. *Lect. Notes Math.*, 564 :1–12, 1976.
- [5] A. Acker and W. Walter. On the global existence of solutions of parabolic differential equations with a singular nonlinear term. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 2(4) :499–504, 1978.
- [6] G. Acosta, J. F. Bonder, P. Groisman, and J. D. Rossi. Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition in several space dimensions. *Discrete Cont. Dyn. Systems Ser.B*, 2 :279–294, 2002.
- [7] G. Acosta, R. G. Durán, and J. D. Rossi. An adaptive time step procedure for a parabolic problem with blow-up. *Computing*, 68 :343–373, 2002.
- [8] K. A. Adou, K. A. Touré, and A Coulibaly. Numerical study of estimating the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations. *Far East J. Appl. Math.*, 100(4) :291–308, 2018.

- [9] K. A. Adou, K. A. Touré, and A. Coulibaly. On the computaton of the numerical blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation. *Int. J. Numer. Methods Appl.*, 18(3) :7–18, 2019.
- [10] A. C. Aitken. On bernoulli’s numerical solution of algebraic equations. volume 46, pages 289–305, 1927.
- [11] H. Amann. Quasilinear parabolic systems under nonlinear boundary conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92 :153–192, 1986.
- [12] C. Bandle and H. Brunner. Blow-up in diffusion equations : A survey. *J. Comput. Appl. Math.*, 97 :3–22, 1998.
- [13] J. Bebernes and D. Eberly. *Mathematical Problems from Combustion Theory*. Springer, New York, 1989.
- [14] J. von Below and C. De Coster. A qualitative theory for parabolic problems under dynamical boundary conditions. *J. of Inequal. Appl.*, 5 :467–486, 2000.
- [15] C. Y. Chan and M. K. Kwong. Quenching phenomena for singular nonlinear parabolic equations. *Nonlinear Anal. TMA*, 12(12) :1377–1388, 1988.
- [16] P. H. Chang and H. A. Levine. The quenching of solutions of semilinear hyperbolic equations. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 12(6) :893–903, 1981.
- [17] Y-G. Chen. Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of  $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$ . *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 33 :541–574, 1986.
- [18] C-H. Cho. On the computation of the numerical blow-up time. *Japan J. Indust. App!. Math.*, 30 :331–349, 2013.
- [19] C-H. Cho, S. Hamada, and H. Okamoto. On the finite difference approximation for a parabolic blow-up problem. *Japan J. Indust. App!. Math.*, 24 :131–160, 2007.
- [20] K. Deng. The quenching of solutions of semilinear parabolic equations. *HUST*, 7 :1–6, 1985.
- [21] K. Deng. Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic systems. *Rocky Mountain J. Math.*, 29(3) :807–820, 1999.
- [22] K. Deng and H. A. Levine. On the blow-up of  $u_t$  at quenching. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(4) :1049–1056, 1989.

- [23] K. Deng and M. Xu. Quenching for a nonlinear diffusion equation with a singular boundary condition. *Z. angew. Math. Phys.*, 50 :574–584, 1999.
- [24] K. Deng and C-L. Zhao. Quenching versus blow-up. *J. Part. Diff. Eq.*, 13 :243–252, 2000.
- [25] K. Deng and C-L. Zhao. Blow-up versus quenching. *Commun. Appl. Anal.*, 7(1) : 87–100, 2003.
- [26] K. Deng and C-L. Zhao. Instability of solutions of a semilinear heat equation with a neumann boundary condition. *Q. Appl. Math.*, LXIII(1) :13–19, 2005.
- [27] J. R. Dormand and P. J. Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *J. Comput. Appl. Math.*, 6 :19–26, 1980.
- [28] R. G. Duràn, J. I. Etcheverry, and J. D. Rossi. Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition. *Discrete Cont. Dyn. Systems*, 4 :497–506, 1998.
- [29] K. B. Edja, K. A. Touré, and B. J-C. Koua. Numerical blow-up for a heat equation with nonlinear boundary conditions. *J. Math. Res.*, 10(5) :119–128, 2018.
- [30] R. Ferreira, P. Groisman, and J. D. Rossi. An adaptive numerical scheme for a parabolic problem with blow-up. *IMA J. Numer. Anal*, 23 :439–463, 2003.
- [31] M. Fila. Boundedness of global solutions for the heat equation with nonlinear boundary conditions. *Comment.Math.Univ.Carolinae*, 30(3) :479–484, 1989.
- [32] M. Fila and J. Filo. Blow-up on the boundary : a survey. *Banach Cent. Publ.*, 33 : 67–78, 1996.
- [33] M. Fila and H. A. Levine. Quenching on the boundary. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 21(10) :795–802, 1993.
- [34] M. Fila and P. Quittner. The blow-up rate for the heat equation with a non-linear boundary condition. *Math. Methods Appl. Sci.*, 14 :197–205, 1991.
- [35] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type. Reprint. Originally.* Englewood Cliffs, N.J : Prentice-Hall, United states of america, 1983.
- [36] A. Friedman and McLeod B. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 34(2) :425–447, 1985.

- [37] S-C. Fu, J-S. Guo, and J-C. Tsai. Blow-up behavior for a semilinear heat equation with a nonlinear boundary condition. *Tohoku Math. J.*, 55 :565–581, 2003.
- [38] H. Fujita. On the blowing up solutions of the cauchy problem for  $u_t = \delta u + u^{1+\alpha}$ . *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 13 :109–124, 1966.
- [39] V. A. Galaktionov. *Geometric Sturmian theory of nonlinear parabolic equations and applications*. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series, 3. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [40] V. A. Galaktionov and S. I. Pohozaev. Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 53 :453–466, 2003.
- [41] V. A. Galaktionov and J. L. Vázquez. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8(2) :399–433, 2002.
- [42] A. Ganon, M. Taha, and Touré K. A. Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, 114(1) :19–38, 2019.
- [43] T. H. Geballe and J. K. Hulm. Superconductors in electric-power technology. *Sci. Amer*, 243(5) :138–172, 1980.
- [44] J-L. Gómez, V. Márquez, and N. Wolanski. Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition. *J. Differ. Equations*, 92 :384–401, 1991.
- [45] J-S. Guo. On the quenching behavior of the solution of a semilinear parabolic equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 151 :58–79, 1990.
- [46] J-S. Guo. On the semilinear elliptic equation  $\delta w - \frac{1}{2}y\nabla w + \lambda w - w^{-\beta} = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . *Chinese J. Math.*, 19 :355–377, 1991.
- [47] J-S. Guo. On the quenching rate estimate. *Q. Appl. Math.*, XLIX(4) :747–752, 1991.
- [48] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff problems*. Springer, Berlin, 2008.
- [49] C. Hirota and K. Ozawa. Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations - an application to the

- blow-up problems of partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 193 : 614–637, 2006.
- [50] E. Hopf. A remark on linear elliptic differential equations of second order. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 :791–793, 1952.
- [51] B. Hu. Remarks on the blowup estimate for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Differ. Integral Equ.*, 9(5) :891–910, 1996.
- [52] B. Hu. *Blow-up theories for semilinear parabolic equations*. Springer, Berlin, 2018.
- [53] B. Hu and H-M. Yin. The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 346(1) : 117–135, 1994.
- [54] E. L. Ince. *Ordinary differential equations*. Dover Publ, New-york, 1944.
- [55] W. Jike, W. H. Hui, and D. Hongli. Arc-length method for differential equations. *Appl. Math. Mech., Engl. Ed.*, 20(8) :936–942, 1999.
- [56] S. Kaplan. On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, XVI :305–330, 1963.
- [57] H. Kawarada. On solutions of initial-boundary problem for  $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$ . *Publ. RIMS, Kyoto Univ*, 10 :729–736, 1975.
- [58] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [59] H. A. Levine. The quenching of solutions of linear parabolic and hyperbolic equations with nonlinear boundary conditions. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 14(6) : 1139–1153, 1983.
- [60] H. A. Levine. The quenching of solutions of linear parabolic and hyperbolic equations with nonlinear boundary conditions. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 14(6) : 1139–1153, 1983.
- [61] H. A. Levine. The phenomenon of quenching : A survey. *Trends Theory. Pract. Non-Linear. Anal.*, pages 275–286, 1985.



- [62] H. A. Levine and G. M. Lieberman. Quenching of solutions of parabolic equations with nonlinear boundary conditions in several dimensions. *J. Reine Angew. Math.*, 345 :23–38, 1983.
- [63] H. A. Levine and J. T. Montgomery. The quenching of solutions of some nonlinear parabolic equations. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 11(5) :842–847, 1980.
- [64] H. A. Levine and L. E. Payne. Some nonexistence theorems for initial-boundary value problems with nonlinear boundary constraints. *Proc. Am. Math. Soc.*, 46 (2) :277–284, 1974.
- [65] G. M. Lieberman. Quenching of solutions of evolution equations. *Proc. Centre Math. Anal. Aust. Nat. Univ.*, 8 :151–157, 1984.
- [66] B. Lucquin. *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations*. Ellipses, Paris, 2004.
- [67] S. Moriguti, C. Okuno, R. Suekane, M. Iri, and K. Takeuchi. *Ikiteiru Suugaku-Suuri Kougaku no Hatten (in Japanese)*. Baifukan, Tokyo, 1979.
- [68] D. Nabongo and T. K. Boni. Numerical quenching for a semilinear parabolic equation. *Math. Model. Anal.*, 13(4) :521–538, 2008.
- [69] D. Nabongo, K. N’Guessan, and K. A. Touré. Asymptotic behavior for discretizations of a semilinear parabolic equation. *Far East J. Math. Sci.*, 99(2) :257–278, 2016.
- [70] D. Nabongo, K. N’Guessan, and K. A. Touré. Blow-up time of solutions for some nonlinear parabolic equations. *Int. J. Appl. Math.*, 29(1) :31–52, 2016.
- [71] D. Nabongo, K. N’Guessan, and K. A. Touré. Blow-up for discretizations of some reaction-diffusion equations with a nonlinear convection term. *Int. J. Appl. Math.*, 29(5) :537–568, 2016.
- [72] T. Nakagawa. Blowing up of a finite difference solution to  $u_t = u_{xx} + u^2$ . *Appl. Math. Optim.*, 2 :337–350, 1976.
- [73] T. Nakagawa and T. Ushijima. Finite element analysis of the semi-linear heat equation of blow-up type. *Topics in Numer. Anal.*, III :275–291, 1977.
- [74] K. N’Guessan. Étude théorique et numérique de l’explosion des solutions de quelques équations aux dérivées partielles de type parabolique. *PhD thesis, Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny*, 2017.

- [75] W. F. Osgood. Beweis der existenz einer losung der differentialgleichung  $dy/dx = f(x,y)$  ohne hinzunahme der cauchy-lipschitzschen bedingung. *Monatsh. Math. Phys.*, 9 :331–345, 1898.
- [76] N. Ozalp and B. Selçuk. The quenching behavior of a nonlinear parabolic equation with a singular boundary condition. *Hacet. J. Math. Stat.*, 44(3) :615–621, 2015.
- [77] N. Ozalp and B. Selçuk. Blow up and quenching for a problem with nonlinear boundary conditions. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2015(192) :1–11, 2015.
- [78] C. V. PAO. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press, New York, 1992.
- [79] L. E. Payne. *Geometric Sturmian theory of nonlinear parabolic equations and applications*. Improperly posed problems in partial differential equations, Regional Conference Series in Applied Mathematics, N<sup>o</sup> .22.SIAM, Philadelphia, 1975.
- [80] P. Quittner and P. Souplet. *Superlinear parabolic problems : Blow-up, global existence and steady states*. Birkhauser, Basel, 2007.
- [81] J-F. Rault. Phénomène d’explosion et existence globale pour quelques problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques. *PhD thesis, Université du Littoral Côte d’Opale*, 2010.
- [82] D. F. Rial and J. D. Rossi. Blow-up results and localization of blow-up points in an n-dimensional smooth domain. *Duke Math. Jour*, 88(2) :391–405, 1997.
- [83] T. Salin. On quenching with logarithmic singularity. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 52 :261–289, 2003.
- [84] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. de Gruyter, Berlin/New York, 1995.
- [85] B. Selçuk and N. Ozalp. The quenching behavior of a semilinear heat equation with a singular boundary outflux. *Q. Appl. Math.*, LXXII(4) :747–752, 2014.
- [86] B. Selçuk and N. Ozalp. Quenching for a semilinear heat equation with a singular boundary outflux. *Int. J. Appl. Math.*, 29(4) :451–464, 2016.
- [87] M. M. Taha, K. A. Touré, and E. P. Mensah. Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*, 60(2) :125–167, 2012.

- [88] T. K. Ushijima. On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations. *Publ. RIMS, Kyoto Univ*, 36 :613–640, 2000.
- [89] W. Walter. *Differential and integral inequalities*. Springer-Verlag, Berlin/New-york, 1970.
- [90] W. Walter. On existence and nonexistence in the large of solutions of parabolic differential equations with a nonlinear boundary condition. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 6(1) :85–90, 1975.
- [91] W. Walter. Parabolic differential equations with a singular nonlinear term. *Funkcial. Ekvac.*, 19 :271–277, 1976.
- [92] H. Yanagida and K. Kawarada. Mathematical representation of electric current transient in polarized ionic conductors. *to appear*.
- [93] G-F. Zheng. On quenching for some parabolic problems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 71 :2416–2430, 2009.
- [94] Y. Zhi. The boundary quenching behavior of a semilinear parabolic equation. *Appl. Math. Comput.*, 218 :233–238, 2011.
- [95] Y. Zhi and C. Mu. The quenching behavior of a nonlinear parabolic equation with nonlinear boundary outflux. *Appl. Math. Comput.*, 184 :624–630, 2007.