

**REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE**

*Union - Discipline - Travail*

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**Institut National Polytechnique**  
Félix HOUPHOUËT-BOIGNY de Yamoussoukro



**Ecole Doctorale Polytechnique**  
N° d'ordre : **094/2021**

**THESE**

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY**

**Mention : Mathématiques Appliquées**

**Spécialité : EDP et Analyse Numérique**

**Thème :**

**Etude théorique et numérique du temps d'explosion  
de certaines équations aux dérivées partielles  
paraboliques quasi-linéaires**

Présentée et soutenue publiquement le 22 juillet 2021 par

**GANON Ardjouma**

**JURY**

M. SORO Yaya	Professeur Titulaire, INP-HB, Côte d'Ivoire	Président
M. TOURE Kidjébo Augustin	Professeur Titulaire, INP-HB, Côte d'Ivoire	Directeur de thèse
M. MONSIA Marc Delphin	Professeur Titulaire, Univ. d'Abomey Calavi, Benin	Rapporteur
M. COULIBALY Adama	Maître de Conférences, UFHB, Côte d'Ivoire,	Rapporteur
M. ADOU Kablan Jérôme	Professeur Titulaire, UFHB, Côte d'Ivoire	Examineur

ÉTUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE  
DU TEMPS D'EXPLOSION DE  
CERTAINES ÉQUATIONS AUX  
DÉRIVÉES PARTIELLES  
PARABOLIQUES QUASI-LINÉAIRES

Par

GANON Ardjouma

sous la direction de

TOURÉ K. Augustin, Professeur Titulaire

# Dédicace

*Je dédie ce mémoire de thèse*

*À feu mon père GANON Kilanon Adama ;*

*À feu ma mère TENIN Coulibaly ;*

*À mon épouse KONÉ Tiéwa ;*

*À tous mes frères et soeurs.*

# Remerciements

Je ne peux commencer les remerciements sans exprimer ma gratitude à l'Être suprême, le Dieu Tout-Puissant qui m'a donné la santé, la volonté, le courage et tous les moyens nécessaires à la réalisation de ce travail de recherche.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon Directeur de thèse, Monsieur TOURÉ Kidjégbo Augustin, Professeur Titulaire, pour avoir accepté d'encadrer ce travail de recherche, pour sa rigueur, sa patience, sa disponibilité et pour ses conseils avisés.

Je remercie très sincèrement les rapporteurs de cette thèse, Monsieur COULIBALY Adama, Maître de Conférences et Monsieur MONSIA Marc Delphin, Professeur Titulaire, pour leur efficacité, leur sens élevé du devoir et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche.

J'exprime mes sincères remerciements au Président du jury, Monsieur SORO Yaya, Professeur Titulaire et à l'examineur, Monsieur ADOU Kablan Jérôme, Professeur Titulaire, pour avoir accepté de juger cette thèse, malgré leurs multiples occupations professionnelles.

Je remercie sincèrement Monsieur KOFFI N'Guessan, Directeur Général de l'Institut National Polytechnique Félix HOUPHOUËT-BOIGNY (INP-HB) de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour leur accueil cordial dans l'illustre école de formation qu'ils gèrent excellemment.

Je remercie vivement Monsieur YAO Kouassi Benjamin, Professeur Titulaire, Directeur de l'École Doctorale Polytechnique INP-HB Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour leur accueil chaleureux dans la prestigieuse école doctorale dont ils assurent la direction.

Je remercie tout particulièrement Monsieur HILI Ouagnina, Professeur Titulaire, Directeur de l'Unité Mixte de Recherche et d'Innovation Mathématiques et Nouvelles

Technologies de l'Information (UMRI-MNTI) de l'INP-HB et tous les membres de l'UMRI, pour leur accueil chaleureux et leur franche collaboration.

Mes vives remerciements à Dr. TAHA Manin Mathurin, à Dr. N'GUESSAN Koffi, à Dr. KOUASSI Ayo Hermith, à Dr. AHOULOU Kacou Rémi et à Monsieur KOUASSI Gnin Jean pour leur disponibilité et leurs conseils avisés.

Je remercie chaleureusement Monsieur ANDRÉ Penatien Krina, Chef d'établissement du Collège Moderne Massala, son ACE Monsieur SORO Lassana et mes collègues du dit collège (2012-2016).

Je remercie cordialement Madame YAO Aya Virginie, Chef d'établissement du Lycée Mixte 2 Yamoussoukro, ses ACE et mes collègues dudit lycée (depuis l'année scolaire 2018-2019 jusqu'à ce jour).

Je remercie affectueusement mes compagnons de thèse, et tous les doctorants de l'UMRI-MNTI.

Et enfin, je remercie tous mes proches pour leur soutien tout au long de ces années d'intenses recherches et tous ceux qui, de près ou de loin, ont aidé à la réalisation de cette thèse.

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>x</b>
<b>Liste des symboles et abréviations</b>	<b>xi</b>
<b>Résumé</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>8</b>
1.1 Outils de base . . . . .	8
1.1.1 Inégalité de Jensen . . . . .	8
1.1.2 Formule de Taylor-Lagrange [23] . . . . .	8
1.1.3 Méthode de la transformation de la longueur d’arc pour les Équations Différentielles Ordinaires [39] . . . . .	9
1.1.4 L’algorithme $\Delta^2$ d’Aitken [33] . . . . .	10
1.2 Notion sur l’explosion de solutions dans les problèmes de Cauchy . . . . .	10
<b>2 Étude du temps d’explosion d’un problème parabolique quasi-linéaire</b>	<b>12</b>
2.1 Présentation du problème continu (2.1)-(2.3) . . . . .	12
2.1.1 Existence et unicité de la solution du problème continu . . . . .	13
2.1.2 Quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu	13

2.1.3	Explosion en temps fini et ensemble d'explosion de la solution du problème continu . . . . .	17
2.2	Étude numérique du problème (2.1)-(2.3) . . . . .	19
2.2.1	Construction du schéma semi-discret . . . . .	19
2.2.2	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23) . . . . .	22
2.2.3	Propriétés du schéma semi-discret (2.21)-(2.23) . . . . .	22
2.2.4	Convergence de la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23) . . . . .	25
2.2.5	Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23) . . . . .	29
2.2.6	Taux et ensemble d'explosion . . . . .	35
2.2.7	Résultats numériques . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Étude du temps d'explosion d'une équation de diffusion non linéaire avec conditions de neumann aux bords</b>	<b>48</b>
3.1	Présentation du problème continu (4.1)-(4.3) . . . . .	48
3.1.1	Existence et unicité de la solution du problème continu . . . . .	49
3.1.2	Quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu	49
3.1.3	Explosion en temps fini et ensemble d'explosion de la solution du problème continu . . . . .	50
3.2	Étude numérique du problème (3.1)-(3.3) . . . . .	50
3.2.1	Construction du schéma semi-discret . . . . .	50
3.2.2	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret (3.10)-(3.12) . . . . .	51
3.2.3	Propriétés du schéma semi-discret (3.10)-(3.12) . . . . .	52
3.2.4	Convergence de la solution du problème semi-discret (3.1)-(3.3) .	54
3.2.5	Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret (3.1)-(3.3) . . . . .	54
3.2.6	Taux et ensemble d'explosion . . . . .	57
3.2.7	Résultats numériques . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Étude du temps d'explosion d'une équation semi-linéaire avec conditions de neumann aux bords</b>	<b>68</b>
4.1	Présentation du problème continu (4.1)-(4.3) . . . . .	68
4.1.1	Existence et unicité de la solution du problème continu . . . . .	68
4.1.2	Quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu	69

4.1.3	Explosion en temps fini et ensemble d'explosion de la solution du problème continu . . . . .	70
4.2	Étude numérique du problème (4.1)-(4.3) . . . . .	71
4.2.1	Construction du schéma semi-discret . . . . .	71
4.2.2	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8) . . . . .	71
4.2.3	Propriétés du schéma semi-discret (4.6)-(4.8) . . . . .	72
4.2.4	Convergence de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8) . . . . .	75
4.2.5	Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8) . . . . .	76
4.2.6	Taux et ensemble d'explosion . . . . .	79
4.2.7	Résultats numériques . . . . .	82
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>87</b>
	<b>Annexes</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Quelques résultats utilisés dans la thèse</b>	<b>91</b>
A.1	Principes de comparaison et du maximum . . . . .	91
A.2	Existence et unicité de la solution de certaines EDP paraboliques quasi-linéaires . . . . .	93
A.3	Existence et unicité de la solution de certaines EDO. . . . .	95
A.4	Théorèmes d'explosion et de convergence du temps d'explosion de solutions semi-discrètes en espace . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Les articles publiés</b>	<b>99</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>149</b>



# Liste des tableaux

2.1	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 0, 2; q = 0, 7$ . . . . .	40
2.2	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 0, 2; q = 0, 9$ . . . . .	40
2.3	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 0, 5; q = 0, 9$ . . . . .	40
2.4	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 1; q = 2, 5$ . . . . .	41
2.5	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 1; q = 3$ . . . . .	41
2.6	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 1; q = 4$ . . . . .	41
2.7	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 1, 5; q = 3$ . . . . .	42
2.8	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 3; q = 3$ . . . . .	42
2.9	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $\gamma = 4; q = 3$ . . . . .	42
3.1	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 0, 5; q = 0, 9$ . . . . .	60
3.2	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 0, 5; q = 1$ . . . . .	60
3.3	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 0, 6; q = 0, 9$ . . . . .	60

3.4	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 0, 5; q = 2$ . . . . .	61
3.5	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 0, 5; q = 2, 1$ . . . . .	61
3.6	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 0, 6; q = 2$ . . . . .	61
3.7	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 1, 1; q = 2, 1$ . . . . .	62
3.8	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 1, 2; q = 2, 1$ . . . . .	62
3.9	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $m = 1, 1; q = 2$ . . . . .	62
4.1	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $p = 2, 5; q = 2, 5; \lambda = 0, 5$ . . . . .	83
4.2	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $p = 2, 5; q = 3; \lambda = 0, 5$ . . . . .	84
4.3	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $p = 2, 5; q = 4; \lambda = 0, 5$ . . . . .	84
4.4	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $p = 2, 5; q = 3; \lambda = 1$ . . . . .	84
4.5	Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour $p = 2, 5; q = 3; \lambda = 1, 2$ . . . . .	84

# Liste des figures

2.1	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 64; \gamma = 0,5; q = 0,9$ (cas où $\gamma > 0$ et $0 < q < 1$ ). . . . .	43
2.2	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 64; \gamma = 0,5; q = 0,9$ (cas où $\gamma > 0$ et $0 < q < 1$ ). . . . .	44
2.3	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 64; \gamma = 0,5; q = 0,9$ (cas où $\gamma > 0$ et $0 < q < 1$ ). . . . .	44
2.4	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 128; \gamma = 1; q = 2,5$ . . . . .	45
2.5	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 128; \gamma = 1; q = 2,5$ . . . . .	45
2.6	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 128; \gamma = 1; q = 2,5$ . . . . .	46
2.7	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 128; \gamma = 4; q = 3$ . . . . .	46
2.8	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 128; \gamma = 4; q = 3$ . . . . .	47
2.9	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 128; \gamma = 4; q = 3$ . . . . .	47
3.1	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 64; m = 0,5; q = 0,9$ (cas où $0 < m < q \leq 1$ ). . . . .	63
3.2	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 64; m = 0,5; q = 0,9$ (cas où $0 < m < q \leq 1$ ). . . . .	64
3.3	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 64; m = 0,5; q = 0,9$ (cas où $0 < m < q \leq 1$ ). . . . .	64
3.4	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 128; m = 0,5; q = 2$ (cas où $0 < m < 1 < q$ ). . . . .	65
3.5	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 128; m = 0,5; q = 2$ (cas où $0 < m < 1 < q$ ). . . . .	65

3.6	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 128$ ; $m = 0, 5$ ; $q = 2$ (cas où $0 < m < 1 < q$ ). . . . .	66
3.7	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 128$ ; $m = 1, 1$ ; $q = 2$ (cas où $1 < m < q$ ). . . . .	66
3.8	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 128$ ; $m = 1, 1$ ; $q = 2$ (cas où $1 < m < q$ ). . . . .	67
3.9	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 128$ ; $m = 1, 1$ ; $q = 2$ (cas où $1 < m < q$ ). . . . .	67
4.1	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace et du temps pour $I = 128$ ; $p = 2, 5$ ; $q = 3$ ; $\lambda = 1, 2$ . . . . .	85
4.2	Évolution de $U_h$ en fonction de l'espace pour $I = 128$ ; $p = 2, 5$ ; $q = 3$ ; $\lambda = 1, 2$ . . . . .	86
4.3	Évolution de $U_h$ en fonction du temps pour $I = 128$ ; $p = 2, 5$ ; $q = 3$ ; $\lambda = 1, 2$ . . . . .	86

# Liste des notations et définitions

Tout au long de cette thèse, nous utiliserons les notations et les définitions courantes suivantes :

- $\mathcal{C}^k(A, B)$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  : Ensemble des fonctions définies sur un intervalle  $A$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $B \subseteq \mathbb{R}^L$  ( $L \in \mathbb{N}^*$ ),  $k$ -fois dérivables et dont la dérivée  $k$ -ième est continue. L'ensemble  $\mathcal{C}^0(A, B)$  sera noté  $\mathcal{C}(A, B)$ . Lorsque  $B = \mathbb{R}$ , on écrira  $\mathcal{C}^k(A)$  au lieu de  $\mathcal{C}^k(A, B)$  ;
- $u = u(x, t)$ ,  $x, t \in \mathbb{R}$ , une fonction dont les dérivées partielles par rapport à chacune des variables existent jusqu'à un ordre  $k$ ,  $k > 1$  un nombre entier naturel.

On note :

$\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = u_x$  : dérivée partielle première de  $u$  par rapport à  $x$ ,

$\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = \partial_x^i u = \underbrace{u_{x \dots x}}_{i \text{ fois}}$  : dérivée partielle  $i$ -ième de  $u$  par rapport à  $x$ ,  $i = 1, \dots, k$  avec

$\frac{\partial^1 u}{\partial x^1} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Ces notations sont valables pour la variable  $t$  ;

- $\Omega$  : un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  ;
- $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$  où  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  est un multi-indice et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$  ;
- $L^p(\Omega)$  : espace constitué de toutes les fonctions mesurables sur  $\Omega$  et d'exposant  $p \geq 1$  intégrables sur  $\Omega$  ;
- $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$  : norme infinie d'une fonction  $f$  définie sur  $\Omega$  ;
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$  : espace des fonctions  $k$ -fois continûment différentiables sur  $\Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ;
- $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  : espace des fonctions  $f$  de  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  telles que pour chaque multi-indice  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq k$ , l'application  $x \in \Omega \mapsto D^\alpha f(x)$  se prolonge continûment sur  $\bar{\Omega}$  ;

- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\Omega); \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$  avec  $0 < \alpha < 1$ ;
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{ f \in \mathcal{C}^k(\Omega); D^j f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \forall j, |j| \leq k \}$ ;
- $I$  : Entier naturel supérieur ou égal à 3, représente le nombre d'intervalles consécutifs dans une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$ ;
- $x_i$  : Abscisse du  $i$ -ième point de la subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $i = 0, \dots, I$ ;
- $\mathbb{R}^{I+1} = \{ x = (x_0, \dots, x_I), x_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, I \}$ ;
- $h$  : Taille du pas d'espace égal à  $\frac{1}{I}$ ;
- $X^T$  : Transposée du vecteur  $X = (x_0, \dots, x_I)$  de  $\mathbb{R}^{I+1}$ ;
- $U_i(\cdot)$  : Approximation semi-discrète de  $u(x_i, \cdot)$ ,  $i = 0, \dots, I$ ;
- $\delta^2$  : Opérateur discret de dérivation du second ordre en espace;
- $V_h$  : vecteur ligne de  $\mathbb{R}^{I+1}$ ;
- $V_i$  : Coordonnée d'indice  $i$  d'un vecteur  $V_h$ ,  $i = 0, \dots, I$ ;
- $V_h(t) \geq 0$  : Pour tout  $0 \leq i \leq I$ ,  $V_i(t) \geq 0$ ,  $t \in [0, T]$  avec  $T > 0$ ;
- $V_h(t) \leq W_h(t)$  : Pour tout  $0 \leq i \leq I$ ,  $V_i(t) \leq W_i(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ;
- $T_{\max}^h$  : Temps d'existence maximale de la solution du problème semi-discrét en espace;
- $T_b$  : Temps d'explosion de la solution du problème continu;
- $T_h$  : Temps d'explosion de la solution du problème semi-discrét en espace;

# Résumé

Dans cette thèse, nous étudions le temps d'explosion de quelques équations aux dérivées partielles de type parabolique, notamment des équations paraboliques quasi-linéaires avec conditions de Neumann aux bords et une donnée initiale positive. En se servant de la méthode des différences finies, nous approximons chacun des problèmes étudiés par un schéma semi-discret en espace. Les hypothèses sur la donnée initiale qui permettent de montrer l'explosion de la solution continue sont utilisées pour montrer celle de la solution semi-discrète pour chacun des problèmes étudiés. La convergence des solutions semi-discrètes vers les solutions continues correspondantes ainsi que celle des temps d'explosion numériques vers les temps d'explosion continus correspondants sont établies. Pour obtenir des valeurs numériques des temps d'explosion, nous commençons d'abord par transformer les problèmes semi-discrets qui sont en fait, des systèmes d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO) singuliers en des systèmes d'équations différentielles ordinaires non-singuliers par la méthode de la transformation de la longueur d'arc. Ensuite, nous intégrons ces nouveaux problèmes à l'aide d'un solveur d'EDO, en l'occurrence DOP54 pour obtenir des suites de temps d'explosion convergeant linéairement vers les temps d'explosion correspondants des problèmes continus. Enfin, nous utilisons l'algorithme  $\Delta^2$  d'Aitken pour accélérer la convergence de ces suites de temps. Nous obtenons ainsi une bonne valeur approximative du temps d'explosion de la solution de chacun des problèmes continus considérés.

**EXPRESSIONS CLÉS :** Équation parabolique quasi-linéaire, explosion numérique, conditions de Neumann aux bords, différences finies, transformation de la longueur d'arc, méthode  $\Delta^2$  d'Aitken

# Abstract

In this thesis, we study the blow-up time of some parabolic problems, specifically the quasi-linear parabolic problems with Neumann boundaries conditions and a positive initial data. Using the finite difference method, we approximate each of the problems by a semi-discrete scheme. The hypotheses on the initial data that assure the blow-up of the continuous solutions are used to show that of the semidiscrete solutions. The convergence of the semidiscrete solutions to the corresponding continuous one as well as the convergence of the numerical blow-up time to the theoretical corresponding one are established. In order to obtain numerical values of blow-up times, we first transform the semidiscrete problems which are, in fact, systems of singular Ordinary Differential Equations (ODEs) into systems of non singular ordinary differential equations by the technique of the arc length transformation. Then, we integrate these new problems with an ODE solver, we use in our case DOP54 to obtain blow-up times sequences that converge linearly to the corresponding continuous one. Finally, we use the Aitken  $\Delta^2$  method to accelerate the convergence of these sequences. We thus obtain good approximation of the blow-up time of each of the continuous solutions.

**KEYWORDS :** Quasilinear parabolic equation, numerical blow-up, Neumann boundaries conditions, finite differences, arc length transformation, Aitken  $\Delta^2$  method



# Introduction

Les équations aux dérivées partielles, en abrégé "EDP" constituent une branche importante des mathématiques appliquées. Elles interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels et artificiels, et occupent par conséquent une place de choix au sein de la communauté scientifique dans leur quête permanente de sécurité et de compréhension approfondie des phénomènes qui nous entourent. Ainsi, nous retrouvons les EDP aussi bien en *dynamique des structures* ou en *mécanique des fluides* (équation de Navier-Stokes) que dans les théories de la *gravitation*, de l'*électromagnétisme* (équations de Maxwell), ou des *mathématiques financières* (équation de Black-Scholes). Ces équations sont indispensables dans certains domaines tels que la *simulation aéronautique*, la *synthèse d'images*, ou la *prévision météorologique*. Aussi, les équations les plus importantes de la *relativité générale* et de la *mécanique quantique* (équation de Schrödinger) sont également des EDP. De façon générale, une EDP est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes finies ainsi que certaines de ses dérivées partielles. En d'autres termes, si nous prenons  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini, une EDP pour la fonction  $u$  est une relation qui lie les variables indépendantes  $x_1, \dots, x_n$ , la fonction inconnue  $u$  (variable dépendante) et un nombre fini de dérivées partielles de  $u$ , c'est-à-dire

$$F \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \dots \right) = 0.$$

Une EDP étant la transcription mathématique d'un phénomène, son étude permet d'apprendre beaucoup sur le phénomène en question, d'expliquer et de prédire son comportement. Dans certain cas, il est même possible de connaître le passé du phénomène. Vu le nombre important et surtout très variés de phénomènes naturels et artificiels, il existe pareillement un nombre variés d'EDP dont l'étude nécessite des théories

différentes, souvent spécifiques. On tente néanmoins de les classer en trois grandes catégories, selon les outils généraux qui permettent de les analyser, ou encore selon leurs propriétés qualitatives et les problèmes qu'elles modélisent. Ainsi, nous avons :

- les EDP *elliptiques* qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est-à-dire n'évoluant pas au cours du temps) ;
- les EDP *paraboliques* qui modélisent la plupart du temps, l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion ;
- les EDP *hyperboliques* qui modélisent le plus souvent des phénomènes dépendant du temps ; de transport ou de propagation d'ondes.

Une EDP, qu'elle soit elliptique, parabolique ou hyperbolique est soit *linéaire* ou *non-linéaire*. Les EDP non-linéaires comportent les EDP *semi-linéaires*, *quasi-linéaires* et *totalelement non-linéaires* (voir [16] pour les définitions).

La bibliographie sur l'étude théorique des EDP est abondante. Cela pourrait évidemment s'expliquer par la place indiscutable qu'elles occupent au sein des mathématiques appliquées et dans la modélisation des phénomènes.

Dans cette thèse, nous nous intéressons seulement qu'aux EDP paraboliques. Ce sont des EDP d'évolution, c'est-à-dire dépendant du temps. Celles que nous étudions peuvent être écrites sous la forme :

$$u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

où  $u = u(x, t)$  est la fonction inconnue,  $x \in \mathbb{R}$  est la variable spatiale et  $t \in \mathbb{R}_+$ , la variable temporelle. Notons que le coefficient de diffusion, c'est-à-dire celui de  $u_{xx}$  est non nul. Il arrive qu'un phénomène (problème) modélisé par ce type d'équation connaisse au cours de son évolution dans le temps un changement (brusque et) violent en certain(s) endroit(s) de l'espace. Ce changement peut être une catastrophe, une croissance incontrôlée d'une population donnée, d'une épidémie, une croissance incontrôlée dans le monde des finances, etc. Dans les industries manufacturières, il peut indiquer l'interruption d'un processus de réaction ou de combustion continu et instable.

En mathématique, ce changement brusque et violent se traduit par le fait que la solution de l'EDP approche une valeur infinie en certains points de l'espace lorsque  $t$  tend vers un temps fini  $T$ . Dans ce cas, on dit que la solution de l'EDP **explose** en temps fini  $T$  en ces points de l'espace.

Le sujet de l'explosion a été introduite pour la première fois par Osgood [55] dans la théorie des EDO en 1898. Plus tard, le concept s'est étendu aux EDP dans les années 1940 et 1950 dans le contexte de la théorie de la réaction en chaîne de Semenov, de

l'explosion adiabatique et de la théorie de la combustion (voir Gel'fand [31] et Zel'dovich et al. [65] pour plus de détails), mais les premiers résultats concrets sur l'existence de solutions qui explosent sont ceux de Kaplan [40], Fujita [25] et Friedman [24]. Depuis lors, ce sujet a fait l'objet d'intenses recherches sur le plan théorique (Ball [5], Levine [47], Weissler [64], Fila et Filo [21], Boni [7, 8], Galaktionov et Vázquez [26]). Comme susmentionné, la connaissance du temps et des lieux d'explosion est d'une importance capitale tant dans la prévision, la prévention et le contrôle dans plusieurs situations physiques, financières, sociales, industrielles, etc., que dans la compréhension profonde de la situation modélisée.

Malheureusement, les équations différentielles de ce type n'ont généralement pas de solutions analytiques et une résolution numérique est alors nécessaire. L'étude numérique vise à trouver de mieux en mieux des techniques de résolutions approchées de sorte que les solutions numériques obtenues reproduisent avec une grande précision les propriétés des solutions des problèmes continus, tout cela en utilisant le minimum de ressources (machine) possibles. C'est en 1975 que Nakagawa [51] introduit pour la première fois une méthode numérique basée sur la méthode des différences finies avec un maillage spatial à pas de discrétisation constant et un maillage temporel adaptatif. Il applique sa méthode au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = a(x) \geq 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

avec  $f(u) = u^2$ . Par sa méthode, il obtient un schéma numérique dont la solution est un vecteur de la forme  $U = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \dots, U_I^{(n)})^T$  où  $I \in \mathbb{N}^*$  et  $n \geq 0$ . Le pas de discrétisation de l'espace est  $h = 1/I$  et celui du temps,  $\Delta t_n = \tau \cdot \min \{1, \|U_h^n\|_2^{-1}\}$ ,  $\tau = \lambda h^2$  avec  $0 < \lambda \leq 1/2$ . Il montre dans la Proposition 1 (voir [51]) la convergence de la solution numérique vers la solution du problème continu et dans la Proposition 2, la convergence du temps d'explosion de la solution numérique vers celui de la solution exacte. Cette méthode numérique sera plus tard améliorée et étendue à un terme de réaction  $f(u)$  plus général ( $f(u) = u^p, p > 1$  ou  $f(u) = e^u$ ) par certains auteurs. À ce propos, nous pouvons voir les travaux d'Abia, López-Marcos et Martínez [1, 2, 3]. Nous avons aussi d'autres méthodes numériques permettant d'approximer le temps d'explosion d'un problème de Cauchy, notamment celle proposée par Cho [13]. La plupart de ces méthodes nécessitent pour l'explosion de la solution numérique, des hypothèses sur la donnée initiale en plus de celles assurant l'explosion de la solution exacte. Il existe

une bibliographie assez riche traitant de l'explosion numérique des solutions des problèmes paraboliques surtout ceux qui sont semi-linéaires ([6, 10, 20, 38, 50, 53]).

Dans cette thèse, nous utilisons la méthode proposée par Ushijima [59]. Elle s'applique aux problèmes paraboliques du second ordre admettant une unique solution que nous notons  $u(\cdot, t)$  dans un espace de fonction  $\mathcal{X}$ , cette solution devant exploser en un temps fini  $T$ . Sa méthode se résume en quatre théorèmes (voir [59]). Elle est beaucoup intéressante et surtout efficace en ce sens qu'elle permet de montrer l'explosion de la solution semi-discrète en espace et la convergence de son temps d'explosion vers celui du problème continu sans toutefois imposer à la donnée initiale des conditions autres que celles assurant l'explosion de la solution du problème continu. Nous mettons en annexe deux des théorèmes de Ushijima que nous utilisons dans cette thèse. Après l'étude du schéma semi-discret, nous nous sommes inspirés des travaux de Hirota et Ozawa [36] pour écrire un programme sous MATLAB nous permettant d'obtenir une bonne valeur approchée du temps d'explosion. Pour cela, nous commençons par transformer le schéma semi-discret en espace (qui est un système d'EDO singulier) en un système d'EDO non singulier par la méthode de la transformation de la longueur d'arc (voir sous-section 1.1.3 du Chapitre 1). Le programme est essentiellement constitué de deux parties. La première partie utilise un solveur d'EDO (pour nos simulations, nous avons choisi DOP54) qui nous permet, à travers le système d'EDO non singulier, d'obtenir une suite de temps convergent linéairement vers le temps d'explosion réel et l'autre partie, à l'aide d'un algorithme accélérateur de la vitesse de convergence des suites numériques convergentes (l'algorithme  $\Delta^2$  d'Aitken voir la sous-section 1.1.4 du Chapitre 1), nous accélérons de façon significative la convergence de la suite de temps obtenue dans la première partie.

Cette thèse intitulée "Étude théorique et numérique du temps d'explosion de certaines équations aux dérivées partielles paraboliques quasi-linéaires" donne un aperçu de l'étude théorique, notamment l'existence et l'unicité d'une solution régulière, les conditions d'explosion en temps fini de cette solution et son ensemble d'explosion pour

- un problème parabolique quasi-linéaire issu de la mécanique des fluides (voir (2.1)-(2.3));

- un problème parabolique quasi-linéaire dont l'équation principale est connue sous le nom d'équation en milieu poreux lorsque le paramètre  $m$  est tel que  $0 < m < 1$  et d'équation de diffusion rapide lorsque  $m > 1$  (voir problème (3.1)-(3.3));

- un problème parabolique semi-linéaire avec un terme d'absorption dans l'équation principale et un flux au bord (voir problème (4.1)-(4.3)).

Le but principal de cette thèse est de proposer une méthode numérique pratique et peu contraignante du point de vue des conditions d'explosion de la solution numérique et qui soit capable de déterminer de bonnes valeurs approchées des temps d'explosion des problèmes paraboliques. En effet, l'ingénierie de nos jours a besoin de valeurs de plus en plus précises pour faire face au défi d'une technologie et une industrie de pointe. Malheureusement, la bibliographie sur l'étude numérique des EDP paraboliques quasi-linéaires reste insuffisante ([19, 20, 46]). Ce qui justifie notre intérêt pour l'étude numérique des EDP paraboliques quasi-linéaires, et nous montrons aussi que notre méthode s'applique aux EDP paraboliques semi-linéaires qui sont en réalité des EDP paraboliques quasi-linéaires particulières.

Nous structurons notre travail comme suit :

Dans le Chapitre 1, nous présentons des outils mathématiques qui seront très utiles pour la suite, surtout pour l'étude numérique de chacun de nos problèmes.

Nous abordons le Chapitre 2 avec des références prouvant l'existence et l'unicité d'une solution régulière du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u^{1+\gamma}(x, t)u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = -u^q(0, t), \quad u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (\text{I})$$

où  $\gamma > 0$  et  $q > 0$  sont des paramètres donnés. Nous montrons ensuite quelques propriétés qualitatives de la solution de ce problème, notamment la positivité, la croissance en temps et la décroissance en espace de cette solution pour une donnée initiale vérifiant certaines hypothèses. Nous terminons la première section de ce chapitre avec l'explosion en temps fini et l'ensemble d'explosion de la solution du problème. Dans la deuxième section de ce Chapitre, nous construisons un schéma numérique à partir du problème (I) par la méthode des différences finies. Ce schéma est appelé schéma semi-discret en espace. Nous prouvons par la suite que ce schéma admet une unique solution. Sous les mêmes hypothèses mentionnées dans l'étude du problème continu, nous montrons que la solution numérique possède les mêmes propriétés qualitatives que celles de la solution du problème continu. Ensuite, nous montrons que la solution numérique converge vers celle du problème continu lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Nous prouvons aussi que la solution numérique explose en un temps fini et que son temps d'explosion converge vers celui de la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Nous déterminons le taux et l'ensemble d'explosion de la solution numérique. Enfin, nous présentons des résultats

numériques pour illustrer nos analyses.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} (u^m)_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u^q(1, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (\text{II})$$

avec  $m > 0$  et  $q > 0$  des paramètres donnés. Dans la première section de ce chapitre, nous énonçons un théorème d'existence et d'unicité d'une solution régulière du problème (II). Nous rappelons quelques propriétés qualitatives de la solution de ce problème, les preuves étant similaires à celles de la solution du problème (I). Nous énonçons aussi les conditions théoriques d'explosion en temps fini et donnons l'ensemble d'explosion de la solution du problème. Dans la deuxième section dudit chapitre, nous construisons un schéma semi-discret en espace associé au problème (II) par la méthode des différences finies. Nous montrons que le schéma semi-discret en espace admet une unique solution qui reproduit les mêmes propriétés que celles de la solution du problème continu. Nous prouvons de plus que cette solution semi-discrete approxime bien la solution du problème continu (II) lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. L'explose en un temps fini et la convergence du temps d'explosion de la solution numérique vers celui de la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro sont aussi établies et nous terminons ce chapitre par des résultats numériques qui illustrent nos analyses.

Remarquons que les problèmes (I) et (II) peuvent se mettre sous une forme plus générale

$$\begin{cases} u_t(x, t) = f(u(x, t))u_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = g(u(0, t)), \quad u_x(1, t) = g(u(1, t)), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

où  $f(u(x, t)) = u^{1+\gamma}(x, t)$ ,  $g(u(0, t)) = -u^q(0, t)$  et  $g(u(1, t)) = 0$  pour le problème (I), et  $f(u(x, t)) = \frac{1}{m}u^{1-m}(x, t)$ ,  $g(u(0, t)) = 0$  et  $g(u(1, t)) = u^q(1, t)$  pour le problème (II).

Le Chapitre 4 traite le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - \lambda u^p(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u^q(1, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (\text{III})$$

où  $p > 1$ ,  $q > 1$  et  $\lambda > 0$  sont des paramètres donnés. Tout comme les chapitres 2 et 3, le Chapitre 4 comprend deux grandes parties. La première fait un état des résultats théoriques du problème (III) obtenu par Gómez, Márquez et Wolanski [32] et par Chipot, Fila et Quittner [12]. La deuxième partie traite de l'étude numérique du temps d'explosion de la solution du problème continu. Nous obtenons un schéma semi-discret en espace par la méthode des différences finies dont l'unique solution est une bonne approximation de la solution du problème continu (III). Cette solution numérique reproduit les mêmes propriétés qualitatives que la solution du problème continu. De plus, elle explose en un temps fini et son temps d'explosion converge vers le temps d'explosion réel quand le pas de discrétisation tend vers zéro. Par ailleurs, l'ensemble d'explosion de la solution du problème semi-discret coïncide avec celui de la solution réelle lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Finalement, au travers de résultats numériques obtenus par simulation, nous illustrons notre analyse.

En annexe, nous avons les théorèmes de comparaison et les principes du maximum issus de [62], les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions issus de [4, 52]. Les annexes contiennent aussi quelques résultats de Ushijima [59] portant sur l'explosion et la convergence du temps d'explosion de la solution d'un schéma semi-discret en espace et les quatre publications ([27, 28, 29, 30]) tirées de la présente thèse. Il s'agit des articles suivants :

- *Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Far East Journal of Mathematical Sciences, **114**(1) (2019), 19–38.
- *Blow-up for Semidiscretization of Semilinear Parabolic Equation With Nonlinear Boundary Condition*, Journal of Mathematics Research, **11**(5) (2019), 1–10.
- *Numerical blow-up on whole domain for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Advances in Mathematics : Scientific Journal **9**(1) (2020), 49–58.
- *Numerical blow-up for nonlinear diffusion equation with neumann boundary conditions*, J. Nonlinear Sci. Appl., **14** (2021), 80–88.

# Généralités

## 1.1 Outils de base

### 1.1.1 Inégalité de Jensen

- **Forme intégrale [11] :**

Soit  $|\Omega| < \infty$ . Soient  $j : \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction convexe non identiquement égale à  $+\infty$  et  $f \in L^1(\Omega)$  telles que  $j(f) \in L^1(\Omega)$ . Alors

$$j\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} j(f)$$

- **Forme discrète [54] :**

Soient  $f$  une fonction convexe définie sur un intervalle  $K$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels positifs tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

### 1.1.2 Formule de Taylor-Lagrange [23]

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur le segment  $[a, b]$ , ( $a \neq b$ ) et soit  $n \geq 0$  un entier. On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  sur le segment  $[a, b]$  et  $n + 1$  fois dérivable sur le segment  $]a, b[$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$



### 1.1.3 Méthode de la transformation de la longueur d'arc pour les Équations Différentielles Ordinaires [39]

La solution de certaine EDO peut admettre une singularité en un point. Par exemple pour les EDO dépendant du temps, la solution peut diverger lorsqu'elle approche un certain temps fini. Les schémas numériques obtenues sans aucune transformation préalable de ce type d'EDO connaissent une instabilité qu'il faut chercher à contrôler, ce qui n'est pas toujours aisé. C'est ainsi que plusieurs méthodes dont le but est de contourner la singularité ont vu le jour ([17], [44]). Les méthodes présentées dans [17] et [44] sont limitées car elles ne s'appliquent pas à un système d'équations (schéma semi-discret par exemple) mais à une équation scalaire. Ainsi, l'élimination de la singularité apparaît comme l'une des méthodes les plus intéressantes.

La méthode de la transformation de la longueur d'arc consiste à faire un changement de variable pour éliminer la singularité. Elle a été développée par Riks [56]. Vu son efficacité, cette méthode a été reprise par certains auteurs pour la résolution d'un certain nombre de problèmes [37, 39, 43].

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires avec condition initiale

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= f(y(t)), \quad 0 < t < T, \\ y(0) &= y^0, \end{aligned}$$

où  $y = (y_0, y_1, \dots, y_I)^T$ ,  $f(y) = (f_0(y), f_1(y), \dots, f_I(y))^T$  et  $y^0 = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_I^0)^T$ . Supposons qu'une ou plusieurs composantes de la solution divergent en un temps fini. Appelons  $\ell$  la *longueur d'arc* définie comme suit :

$$d\ell^2 = dt^2 + \sum_{i=0}^I dy_i^2$$

Considérons maintenant que les variables  $t$  et  $y_i$  sont des fonctions de la longueur d'arc  $\ell$ . Alors les variables  $t(\ell)$  et  $y_i(\ell)$  satisfont le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ y_0 \\ \vdots \\ y_I \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \ell < +\infty, \\ t(0) &= 0, \quad y(0) = y^0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

La transformation qui permet d'obtenir le système (1.1) s'appelle la *transformation de la longueur d'arc* et ce système n'a pas de singularité pour tout  $\ell$  fini (voir [36, 39] pour plus de détails). Notons que cette transformation s'applique aux systèmes d'EDO. Nous l'appliquons aussi aux EDP puisque celles-ci deviennent systèmes d'EDO par semi-discrétisation en espace (schéma semi-discret en espace).

#### 1.1.4 L'algorithme $\Delta^2$ d'Aitken [33]

C'est un algorithme très puissant qui a pour but d'accélérer la vitesse de convergence des suites numériques convergentes. Il s'établit comme suit : considérons une suite numérique  $S_0^{(0)}, S_1^{(0)}, \dots, S_I^{(0)}$  dont la convergence est lente. À partir de la suite des  $S_k^{(0)}$ , on forme une nouvelle suite  $S_k^{(1)}$  obtenue de la manière suivante :

$$S_k^{(1)} = S_{k+2}^{(0)} - \frac{\left(S_{k+2}^{(0)} - S_{k+1}^{(0)}\right)^2}{S_{k+2}^{(0)} - 2S_{k+1}^{(0)} + S_k^{(0)}}$$

À partir de la dernière suite formée, celle des  $S_k^{(1)}$ , on obtient une autre suite au moyen du même procédé. On note qu'à chaque construction d'une nouvelle suite, le nombre d'éléments de la suite diminue de deux unités. L'application successive de ce processus permet d'accélérer la convergence de la suite numérique considérée. Lorsque le processus est répété  $j + 1$  fois, alors on a :

$$S_k^{(j+1)} = S_{k+2}^{(j)} - \frac{\left(S_{k+2}^{(j)} - S_{k+1}^{(j)}\right)^2}{S_{k+2}^{(j)} - 2S_{k+1}^{(j)} + S_k^{(j)}}$$

## 1.2 Notion sur l'explosion de solutions dans les problèmes de Cauchy

Soit  $u = u(x, t)$  solution d'un problème de Cauchy avec  $t \in \mathbb{R}_+$ , la variable temporelle et  $x \in \Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , la variable spatiale.

**Définition 1.1.** On dit que la solution  $u$  du problème de Cauchy explose en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_b$  tel que  $\|u(\cdot, t)\|_\infty < +\infty$  pour  $t \in [0, T_b[$  mais

$$\lim_{t \rightarrow T_b} \|u(\cdot, t)\|_\infty = +\infty.$$

L'existence de la solution  $u$  est dite **globale** lorsque  $T_b = +\infty$ .

**Définition 1.2.** Un point  $x_0 \in \bar{\Omega}$  est dit point d'explosion de  $u$  s'il existe une suite  $(x_n, t_n) \subset \Omega \times ]0, T_b[$ , telle que  $t_n \rightarrow T_b$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  et  $u(x_n, t_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Définition 1.3.** On appelle ensemble d'explosion de  $u$ , l'ensemble de tous les points d'explosion de  $u$ . On le note  $B(u)$ .

Pour mieux comprendre le phénomène de l'explosion, voyons l'exemple classique de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dv(t)}{dt} = v^2(t) \text{ pour } t > 0. \quad (1.2)$$

Lorsque l'on se donne une condition initiale  $v_0 = a > 0$ , et que l'on construit une solution positive à partir de celle-ci, cette solution est locale en temps, c'est-à-dire qu'elle existe jusqu'à un certain temps fini.

En effet, l'unique solution positive de cet exemple est  $v(t) = \frac{1}{T_b - t}$  et est définie seulement dans l'intervalle  $[0, T_b[$ , où  $T_b = \frac{1}{a}$ . On voit que  $\lim_{t \rightarrow T_b} v(t) = +\infty$ . On dit que la solution de (1.2) explose au temps fini  $T_b$ .

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} = v^2(t) &\iff \frac{dv(t)}{v^2(t)} = dt \\ &\iff \int \frac{dv(t)}{v^2(t)} = \int dt \\ &\iff -\frac{1}{v(t)} + c = t \\ &\iff v(t) = \frac{1}{c - t} \end{aligned}$$

existe et est positive pour  $t \in [0, c[$ ,  $c$  étant une constante.

Condition initiale :  $a = v(0) = \frac{1}{c}$  donc  $c = \frac{1}{a}$  d'où l'unique solution de ce problème est :

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{a} - t} = \frac{1}{T_b - t}$$

avec

$$T_b = \frac{1}{a}.$$

□

# Étude du temps d'explosion d'un problème parabolique quasi-linéaire

Les problèmes de type parabolique ont fait l'objet d'étude de plusieurs chercheurs tant sur le plan théorique que numérique, mais la plupart des références portant sur l'étude numérique concernent des problèmes semi-linéaires. Dans ce chapitre, nous prouvons quelques résultats théoriques d'un problème parabolique quasi-linéaire dans la première section, et dans la deuxième, nous étudions numériquement ce problème et nous obtenons de bonnes valeurs approchées du temps d'exposition pour différentes valeurs des paramètres intervenant dans le problème continu.

## 2.1 Présentation du problème continu (2.1)-(2.3)

On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique suivante :

$$u_t(x, t) = u^{1+\gamma}(x, t)u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (2.1)$$

soumise aux conditions aux bords de Neumann

$$u_x(0, t) = -u^q(0, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

et à la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.3)$$

où  $\gamma > 0$  et  $q > 0$  sont des paramètres donnés, et  $u_0$  est une fonction strictement positive et suffisamment régulière définie sur  $[0, 1]$  telle que

$$u'_0(0) = -u_0^q(0) \text{ et } u'_0(1) = 0. \quad (2.4)$$

Les problèmes de ce type sont issus de la dynamique des fluides qui est essentiellement l'étude des gaz et des liquides en mouvement. Ils permettent de déterminer diverses propriétés d'un fluide particulier telles que sa vitesse, sa pression, sa température ou sa densité. Ces équations s'appliquent aussi dans de nombreux domaines tels que le calcul des forces s'exerçant sur un avion, la détermination du débit massique du pétrole dans un canal et la prévision des phénomènes météorologiques. Certains de ses principes sont même utilisés dans l'ingénierie du trafic, où le trafic est traité comme un fluide continu (voir [41]).

### 2.1.1 Existence et unicité de la solution du problème continu

L'existence et l'unicité de la solution régulière du problème continu (2.1)-(2.3) sont fournies par la théorie classique des équations paraboliques, notamment grâce aux résultats de Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [42]. Nous pouvons aussi nous référer aux résultats de H. Amann [4] (voir Théorème A.5 en annexe).

### 2.1.2 Quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu

Dans cette sous-section, nous donnons un lemme de comparaison et quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu (2.1)-(2.3).

**Lemme 2.1.** *Soient  $T > 0$ ,  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{2,1}(]0, 1[ \times ]0, T[)$  vérifiant*

$$u_t - u^{1+\gamma}u_{xx} \leq v_t - v^{1+\gamma}v_{xx}, \quad \text{dans } [0, 1] \times ]0, T[ \quad (2.5)$$

$$u_x \leq v_x \quad \text{sur } \{0, 1\} \times ]0, T[ \quad (2.6)$$

$$u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0) \quad \text{dans } [0, 1]. \quad (2.7)$$

Alors, on a :

$$u \leq v \text{ dans } [0, 1] \times ]0, T[.$$

*Démonstration.* Elle résulte du principe de comparaison voir [62] (Théorème A.1 en annexe)  $\square$

**Lemme 2.2.** Soient  $u$  la solution du problème continu (2.1)-(2.3) et  $T_{\max}$  son temps d'existence maximal. Alors, on a :

$$u > 0 \text{ dans } [0, 1] \times ]0, T_{\max}[.$$

*Démonstration.* Soit  $t_0 \in ]0, T_{\max}[$ . La solution  $u$  du problème continu (2.1)-(2.3) vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}) & \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0[, \\ u_x(0, \cdot) + u^q(0, \cdot) = 0, u_x(1, \cdot) = 0 & \text{dans } ]0, t_0[, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) > 0 & \text{dans } [0, 1], \end{cases}$$

où  $F(x, t, a, b, c) = u^{1+\gamma}(x, t)c$ ,  $(x, t, a, b, c) \in [0, 1] \times [0, t_0] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

La fonction  $F$  est croissante par rapport à la variable  $c$  et vérifie :  $F(x, t, 0, 0, 0) = 0$ .

De plus, en prenant une constante  $L \geq 0$ , on a :

$$a_1 \geq a_2 \implies 0 = F(x, t, a_1, b, c) - F(x, t, a_2, b, c) \leq L(a_1 - a_2).$$

La condition de Lipschitz unilatérale (A.1) (voir annexe) est vérifiée. En utilisant le Corollaire A.2 (voir annexe), on obtient :  $u \geq 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, t_0[$ . Les relations (2.1)-(2.3) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} u_t &\geq \mathcal{D}[u] && \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0[, \\ u_x(0, \cdot) + u^q(0, \cdot) &\geq 0, u_x(1, \cdot) \geq 0 && \text{dans } ]0, t_0[, \\ u(\cdot, 0) &> 0 && \text{dans } [0, 1], \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{D}[u] = \mathcal{H}(x, t, u_{xx}) + g(x, t, u, u_x)$  où  $\mathcal{H}(x, t, u_{xx}) = u^{1+\gamma}(x, t)u_{xx}(x, t)$  et  $g(x, t, u, u_x) = 0$ .

Pour une constante  $C > 0$ , la fonction  $g$  vérifie :

$$g(\cdot, \cdot, \cdot, b) \geq -C|b|.$$

On peut donc appliquer le Théorème A.3 (en annexe) pour obtenir :

$$m = \min_{[0, 1] \times [0, t_0]} (u) = \min_{[0, 1]} (u_0),$$

et si ce minimum  $m$  est atteint dans  $[0, 1] \times ]0, t_0[$ , alors  $u \equiv m$  dans  $[0, 1] \times [0, t_0]$ .

En utilisant la relation (2.2), on a :  $m = 0$ , et en particulier  $u_0 = 0$ . Ce qui contredit (2.3).

Par conséquent, on a :

$$u > m \geq 0 \text{ dans } [0, 1] \times ]0, t_0], \quad (2.8)$$

d'où le lemme. □

**Lemme 2.3.** Soient  $u$  la solution du problème continu (2.1)-(2.3) et  $T_{\max}$  son temps d'existence maximal. On suppose que la condition initiale  $u_0$  en (2.3) satisfait

$u'_0 \leq 0$  et  $u''_0 \geq 0$  dans  $[0, 1]$ . Alors,

- 1)  $u_t > 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ ;
- 2)  $u_{xx} > 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ ;
- 3)  $u_x < 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ .

*Démonstration. Montrons 1)*

Soit  $t_0 \in ]0, T_{\max}[$ . Étant donné que  $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  et vérifie  $u''_0 \geq 0$  dans  $[0, 1]$ , alors les résultats de régularité classiques issus de [42] impliquent que  $u \in \mathcal{C}^{2,2}([0, 1] \times [0, t_0])$ .

Ainsi, en posant  $y = u_t$ , on a  $y \in \mathcal{C}^{2,1}([0, 1] \times [0, t_0])$  et vérifie

$$\begin{aligned} y_t &= u^{1+\gamma} y_{xx} + (1 + \gamma) u^{-1} y^2 && \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0] \\ y_x(0, \cdot) &= -q u^{q-1}(0, \cdot) y(0, \cdot), \quad y_x(1, \cdot) = 0 && \text{dans } ]0, t_0] \end{aligned}$$

Par continuité, la condition (2.1) implique  $y(\cdot, 0) = u_0^{1+\gamma}(\cdot) u''_0(\cdot) \geq 0$  dans  $[0, 1]$ . D'où

$$y_t = u^{1+\gamma} y_{xx} + (1 + \gamma) u^{-1} y^2 \quad \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0], \quad (2.9)$$

$$y_x(0, \cdot) = -q u^{q-1}(0, \cdot) y(0, \cdot), \quad y_x(1, \cdot) = 0 \quad \text{dans } ]0, t_0], \quad (2.10)$$

$$y(\cdot, 0) \geq 0 \quad \text{dans } [0, 1]. \quad (2.11)$$

Une solution  $y$  du problème ci-dessus vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} y_t = F(x, t, y, y_x, y_{xx}) & \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0], \\ y_x(0, \cdot) + q u^{q-1}(0, \cdot) y(0, \cdot) = 0, \quad y_x(1, \cdot) = 0 & \text{dans } ]0, t_0], \\ y(\cdot, 0) \geq 0 & \text{dans } [0, 1], \end{cases}$$

où  $F(x, t, a, b, c) = u^{1+\gamma}(x, t) c + (1 + \gamma) u^{-1}(x, t) y(x, t) a$ ,  $(x, t, a, b, c) \in [0, 1] \times [0, t_0] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

La fonction  $F$  est croissante par rapport à la variable  $c$  et vérifie  $F(x, t, 0, 0, 0) = 0$ . De

plus,  $u$  et  $y$  étant bornées sur  $[0, 1] \times [0, t_0]$  avec  $u(x, t) \neq 0 \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_0]$ , on a :

$$a_1 \geq a_2 \implies F(x, t, a_1, b, c) - F(x, t, a_2, b, c) \leq Q(a_1 - a_2)$$

avec

$$Q = (1 + \gamma) \sup_{[0,1] \times [0,t_0]} (|u^{-1}y|)$$

La condition de Lipschitz unilatérale (A.1) (voir annexe) est vérifiée. En utilisant le Corollaire (A.2) (annexe), on obtient :  $y = u_t \geq 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, t_0]$ . Des relations (2.9)-(2.11), nous pouvons écrire

$$y_t \geq D(x, t, y_{xx}) + g(x, t, y, y_x) \quad \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0], \quad (2.12)$$

$$y_x(0, \cdot) + qu^{q-1}(0, \cdot)y(0, \cdot) = 0, \quad y_x(1, \cdot) = 0 \quad \text{dans } ]0, t_0], \quad (2.13)$$

$$y(\cdot, 0) \geq 0 \quad \text{dans } [0, 1], \quad (2.14)$$

avec  $D(x, t, y_{xx}) = u^{1+\gamma}y_{xx}$  et  $g(x, t, y, y_x) = 0$ .

Considérons la fonction  $g$  définie par  $g(x, t, a, b) = 0$ . Pour une constante  $C > 0$ , cette fonction vérifie :

$$g(\cdot, \cdot, \cdot, b) \geq -C|b|.$$

En appliquant le Théorème A.3 (annexe), on obtient :

$$\hat{m} = \min_{[0,1] \times [0,t_0]} (y) = \min_{[0,1]} (y(\cdot, 0)).$$

Si ce minimum  $\hat{m}$  est atteint dans  $[0, 1] \times ]0, t_0]$ , alors  $y \equiv \hat{m}$  dans  $[0, 1] \times [0, t_0]$ .

Et en utilisant la relation (2.13), on a  $u_t(0, \cdot) = y(0, \cdot) = 0$ . Ainsi,  $u(\cdot, t) = u_0(\cdot)$  pour tout  $t \in [0, t_0]$ . Par conséquent  $u$  atteint son minimum dans  $[0, 1] \times ]0, t_0]$ , ce qui est impossible selon la relation (2.8). Donc la fonction  $u_t$  est strictement positive dans  $[0, 1] \times ]0, t_0]$ . Cela termine la preuve.

*Montrons 2)*

Nous tirons 2) de relation (2.1) et du 1).

*Montrons 3)*

En posant  $z = -u_x$ , on obtient des relations (2.1)-(2.3)

$$z_t = u^{1+\gamma}z_{xx} + [(1 + \gamma)u^{-1}u_t]z \quad \text{dans } [0, 1] \times ]0, t_0],$$

$$z_x + B[z] = 0 \quad \text{sur } \{0, 1\} \times ]0, t_0],$$

$$z(\cdot, 0) \geq 0 \quad \text{dans } [0, 1],$$



où  $-B[z(0, \cdot)]$  représente l'expression (en fonction de  $z(0, \cdot)$ ) de  $z_x(0, \cdot)$  et  $-B[z(1, \cdot)]$  celle de  $z_x(1, \cdot)$  dans  $]0, t_0]$ .

Les fonctions  $u$  et  $u_t$  étant bornées dans  $[0, 1] \times [0, t_0]$  avec  $u(x, t) \neq 0 \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, t_0]$ , nous appliquons le même procédé utilisé dans la preuve du 1) pour obtenir le résultat souhaité.  $\square$

### 2.1.3 Explosion en temps fini et ensemble d'explosion de la solution du problème continu

**Théorème 2.4.** [34] Soit  $q > 0$ . Alors pour toute donnée initiale strictement positive, bornée et régulière  $u_0$ , la solution du problème continu (2.1)-(2.3) explose en un temps fini  $T_b$ .

*Démonstration.* Nous savons du Lemme 2.2 que  $u(x, t) > 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $t > 0$ .

Introduisons la fonction suivante :

$$N(t) = \int_0^1 u^{-q}(x, t) dx.$$

En dérivant  $N(t)$  et en utilisant (2.1)-(2.2), on obtient

$$N'(t) = -\gamma u^q(0, t).$$

Puisque  $q > 0$ , il existe une constante  $\eta > 0$  telle que

$$N'(t) \leq -\eta.$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle de temps  $[0, t_1]$ , on aboutit à

$$N(t_1) \leq N(0) - \eta t_1.$$

$N(0)$  étant strictement positif, il existe un temps fini  $T_b$  en lequel la fonction  $N$  s'annule, ce qui conduit à l'explosion de la solution  $u$  en  $T_b$ .  $\square$

**Théorème 2.5.** [34] Soit  $u$  la solution du problème continu (2.1)-(2.3) associée à la donnée initiale  $u_0$  telle que  $u'_0 \leq 0$ ,  $u''_0 \geq 0$  sur  $[0, 1]$ . Alors,

- 1) si  $q > 1$ ,  $u$  explose seulement en  $x = 0$ ;
- 2) si  $0 < q < 1$ ,  $u$  explose sur  $[0, 1]$ .

*Démonstration.* Nous savons déjà que  $u_x < 0$ ,  $u_{xx} > 0$  et  $u_t > 0$ . Donc  $x = 0$  est toujours un point d'explosion car  $u$  est décroissante par rapport à  $x$ .

*Montrons 1).*

Supposons par l'absurde qu'il existe un autre point d'explosion  $x = a \in ]0, 1]$  lorsque  $q > 1$ . Alors tout point  $b \in [0, a]$  est aussi un point d'explosion. Maintenant, prenons  $b \in ]0, a[$  et définissons la fonction suivante

$$J(x, t) = u_x(x, t) + \varepsilon h(x)u^q(x, t), \quad \text{où } h(x) = (x - b)^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Après manipulations, nous obtenons

$$\begin{aligned} J_t - u^{1+\gamma}J_{xx} - (1 + \gamma)u^\gamma u_x J_x &= -\varepsilon(\gamma + q)qhu^{\gamma+q-1}u_x^2 \\ &\quad - \varepsilon(1 + \gamma + 2q)h'u^{\gamma+q}u_x - \varepsilon h''u^{\gamma+q+1} \\ &\leq 0 \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]0, T_b[. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $J(b, t) < 0$  pour  $t \in ]0, T_b[$  et  $J(0, t) = -u^q(0, t)(1 - \varepsilon b^2) \leq 0$  pour tout  $t \in ]0, T_b[$ , si  $\varepsilon < 1/b^2$ . En choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit, et le fait que  $u_x(x, T_b/2) < 0$ ,  $x \in [0, b]$ , nous avons  $J(x, T_b/2) \leq 0$  pour tout  $x \in [0, b]$ . En vertu du principe du maximum (Théorème A.3 en annexe),  $J(x, t) \leq 0$ ,  $(x, t) \in [0, 1] \times [T_b/2, T_b[$ , c'est-à-dire

$$-u^{-q}(x, t)u_x(x, t) \geq \varepsilon(x - b)^2, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [T_b/2, T_b[.$$

Par intégration par rapport à  $x$ , de 0 à  $b$ , on a :

$$\frac{u^{1-q}(b, t) - u^{1-q}(0, t)}{q - 1} \geq \varepsilon \int_0^b (x - b)^2 dx = \frac{\varepsilon b^3}{3}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times ]T_b/2, T_b[.$$

Lorsque  $t$  tend vers  $T_b^-$ , on obtient  $0 \geq \varepsilon b^3/3$ , ce qui est impossible. D'où la preuve de 1).

*Montrons maintenant 2).*

Soit  $0 < q < 1$ . Puisque  $u_{xx} > 0$ , alors  $u_x(x, t) \geq u_x(0, t) = -u^q(0, t)$ . On en déduit par intégration que  $u(x, t) - u(0, t) \geq -xu^q(0, t)$ . D'où

$$u(x, t) \geq u(0, t)[1 - u^{q-1}(0, t)], \quad x \in [0, 1].$$

Puisque  $u$  explose en  $x = 0$  et  $0 < q < 1$ , alors on a le résultat souhaité.  $\square$

## 2.2 Étude numérique du problème (2.1)-(2.3)

Dans cette section, nous construisons un schéma semi-discret en espace par la méthode des différences finies. Nous montrons que l'unique solution de ce schéma approxime bien celle du problème continu. La méthode numérique utilisée ici a l'avantage de permettre de montrer l'explosion en temps fini de la solution semi-discrète et la convergence de son temps d'explosion vers celui de la solution continue tout en utilisant les mêmes hypothèses (sur la donnée initiale) que celles qui assurent l'explosion de la solution continue. Le taux d'explosion de la solution numérique est établie ainsi que son ensemble d'explosion. À l'aide d'un algorithme efficace, nous programmons et obtenons sous MATLAB des résultats numériques satisfaisants.

### 2.2.1 Construction du schéma semi-discret

On se donne une subdivision de  $[0, 1]$ , c'est-à-dire une suite de points  $(x_i)_{i=0, \dots, I}$  tels que  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{I-1} < x_I = 1$ , où  $I \geq 3$  est un entier naturel. Dans notre étude, nous choisissons comme pas de discrétisation de l'espace,  $h = \frac{1}{I}$  constant, et nous avons  $h = x_{i+1} - x_i$  pour tout  $i = 0, \dots, I-1$ . Ce qui implique que

$$x_{i+1} = x_i + h \text{ pour } i = 0, \dots, I-1, \text{ avec } x_0 = 0 \text{ et } x_I = 1$$

et

$$x_i = ih \text{ pour } i = 0, \dots, I.$$

Soit  $T$  un réel strictement positif tel que  $[0, T]$  soit un intervalle de temps sur lequel la solution  $u$  du problème continu (2.1)-(2.3) est définie.

Le principe de la méthode des différences finies consiste à écrire le problème continu aux points de discrétisation  $x_i$  comme suit : pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} u_t(x_i, t) = u^{1+\gamma}(x_i, t)u_{xx}(x_i, t), & i = 1, \dots, I-1, \\ u_x(x_0, t) = -u^q(x_0, t), \quad u_x(x_I, t) = 0, \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i), & i = 0, \dots, I, \end{cases} \quad (2.15)$$

puis à approximer les opérateurs différentiels (ici  $u_{xx}$  et  $u_x$ ) par des quotients différentiels, de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnues discrètes par rapport à l'espace sensées représenter des approximations de  $u$  aux points de discrétisation.

Supposons  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$ . Le développement de Taylor à l'ordre 3 permet

d'obtenir :

pour  $i = 0, \dots, I - 1$ , et  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}, t) &= u(x_i + h, t) \\
&= u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\xi_{i1}, t) \\
&= u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + O(h^3); \tag{2.16}
\end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, I$ , et  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned}
u(x_{i-1}, t) &= u(x_i - h, t) \\
&= u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\theta_{i1}, t) \\
&= u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + O(h^3); \tag{2.17}
\end{aligned}$$

où

$\xi_{i1}$  est une valeur intermédiaire entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, I - 1$ ,

$\theta_{i1}$  est une valeur intermédiaire entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ .

En faisant la soustraction des égalités (2.16) et (2.17), on obtient :

$$u_x(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - u(x_{i-1}, t)}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I - 1, t \in [0, T]. \tag{2.18}$$

Procédant de la même manière, le développement de Taylor à l'ordre 4 de  $u$  donne pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}, t) &= u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t) + O(h^4), \quad i = 0, \dots, I - 1, \\
u(x_{i-1}, t) &= u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t) + O(h^4), \quad i = 1, \dots, I.
\end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités précédentes, on exprime  $u_{xx}(x_i, t)$  comme suit :

$$u_{xx}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I - 1, t \in [0, T] \tag{2.19}$$

Élargissons maintenant l'ensemble des indices  $\{0, \dots, I\}$  à  $\{-1, \dots, I + 1\}$  en introduisant deux points fictifs  $x_{-1}$  et  $x_{I+1}$  tels que

$$u(x_{-1}, t) = u(x_1, t) + 2hu_x(x_0, t) \quad \text{et} \quad u(x_{I+1}, t) = u(x_{I-1}, t). \tag{2.20}$$

Pour  $h$  suffisamment petit,  $O(h^2)$  devient négligeable. L'utilisation des relations (2.18)-(2.20) dans (2.15) nous conduisent aux approximations suivantes :

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t) &\approx u^{1+\gamma}(x_i, t) \frac{u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ u_t(x_0, t) &\approx u^{1+\gamma}(x_0, t) \left( \frac{2u(x_1, t) - 2u(x_0, t)}{h^2} + \frac{2}{h} u^q(x_0, t) \right), \\ u_t(x_I, t) &\approx u^{1+\gamma}(x_I, t) \frac{2u(x_{I-1}, t) - 2u(x_I, t)}{h^2}, \\ u(x_i, 0) &= u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

Soit  $U_h(t) = (U_0(t), U_1(t), \dots, U_I(t))^T \in \mathbb{R}^{I+1}$  un vecteur tel que chaque  $U_i(t)$  de  $U_h(t)$  soit une approximation de  $u(x_i, t)$  pour  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in [0, T]$ . Nous en déduisons alors le schéma numérique suivant qui représente le problème semi-discret en espace associé au problème continu (2.1)-(2.3).

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = U_i^{1+\gamma}(t) \delta^2 U_i(t), \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.21)$$

$$\frac{dU_0(t)}{dt} = U_0^{1+\gamma}(t) \left( \delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h} U_0^q(t) \right), \quad (2.22)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (2.23)$$

où

$$\begin{aligned} \delta^2 U_i(t) &= \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} \quad \text{et} \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

La suite de cette section concerne l'étude du problème semi-discret (2.21)-(2.23) qui se soldera par des simulations numériques.

Notons

$$\delta_*^2 U_i(t) = \begin{cases} \delta^2 U_i(t) & \text{si } i = 1, \dots, I, \\ \delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h} U_0^q(t) & \text{si } i = 0, \end{cases}$$

et

$$\varphi_h = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T.$$

## 2.2.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23)

**Théorème 2.6.** *Le problème semi-discret (2.21)-(2.23) admet une unique solution maximale  $([0, T_{\max}^h[, U_h(\cdot))$ , où  $T_{\max}^h > 0$  désigne le temps d'existence maximale de la solution maximale  $U_h$ .*

*Démonstration.* Le problème semi-discret (2.21)-(2.23) est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{dU_i(t)}{dt} &= U_i^{1+\gamma}(t) \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ \frac{dU_0(t)}{dt} &= U_0^{1+\gamma}(t) \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_0^{1+\gamma+q}(t), \\ \frac{dU_I(t)}{dt} &= U_I^{1+\gamma}(t) \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}, \\ U_i(0) &= \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

On considère la fonction  $F$  de la variable  $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_I(t))^T$  définie sur  $\mathbb{R}^{I+1}$  par

$$F(X(t)) = (f_0(X(t)), f_1(X(t)), \dots, f_I(X(t)))^T,$$

où

$$\begin{aligned} f_i(X) &= X_i^{1+\gamma}(t) \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_0(X) &= X_0^{1+\gamma}(t) \frac{2X_1(t) - 2X_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h} X_0^{1+\gamma+q}(t), \\ f_I(X) &= X_I^{1+\gamma}(t) \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2}, \\ X_i(0) &= \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

La fonction  $F$  ainsi définie est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{I+1}$ . Nous déduisons du Théorème A.10 (Annexe) que le problème semi-discret (2.21)-(2.23) admet une unique solution maximale définie sur  $[0, T_{\max}^h[$ .

$T_{\max}^h > 0$  est alors le temps d'existence maximale de la solution maximale.  $\square$

Désormais, lorsqu'on parlera de solution, il s'agira de la solution maximale.

## 2.2.3 Propriétés du schéma semi-discret (2.21)-(2.23)

Ici, nous énonçons et prouvons des lemmes qui nous seront utiles plus tard.

**Lemme 2.7.** Soit  $U_h$  la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23). Alors

$$U_i(t) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Fixons  $T_0 < T_{\max}^h$ , et posons  $V_h(t) = U_h(t)e^{-\lambda t}$  où  $\lambda$  est une constante positive vérifiant

$$\lambda > \max_{1 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} |U_i^\gamma(t)\delta^2 U_i(t)| \quad \text{et} \quad \lambda > \max_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ |U_0^\gamma(t)\delta^2 U_0(t)| + \frac{2}{h}|U_0^{\gamma+q}(t)| \right\}.$$

Soit  $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} V_i(t)$ . La fonction  $V_i(t)$  étant continue pour chaque  $i \in \{0, \dots, I\}$ , alors il existe  $t_0 \in [0, T_0]$  tel que  $m = V_{i_0}(t_0)$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ .

– Si  $t_0 = 0$ , nous avons  $m > 0$ .

– Si  $t_0 > 0$ , nous obtenons

$$\frac{dV_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{V_{i_0}(t_0) - V_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0. \quad (2.24)$$

Supposons que  $m < 0$ .

Des relations (2.21)-(2.23), il vient que

$$\begin{aligned} \frac{dV_{i_0}(t_0)}{dt} &= m (U_{i_0}^\gamma(t_0)\delta^2 U_{i_0}(t_0) - \lambda) > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I, \\ \frac{dV_0(t_0)}{dt} &= m \left( U_0^\gamma(t_0)\delta^2 U_0(t_0) + \frac{2}{h}U_0^{\gamma+q}(t_0) - \lambda \right) > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \end{aligned}$$

mais ces deux dernières relations contredisent (2.24), d'où le lemme.  $\square$

**Lemme 2.8.** Soit  $U_h$  la solution de (2.21)-(2.23) associée à la condition initiale  $\varphi_h$  en (2.23) telle que  $\delta_*^2 \varphi_h > 0$ . Alors,

$$\frac{dU_i(t)}{dt} \geq 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Fixons  $T_0 < T_{\max}^h$ . Nous définissons le vecteur  $W_h(t)$  tel que

$W_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}$  pour  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_0]$ . Nous avons ainsi

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = ((1 + \gamma)U_i^\gamma(t)\delta^2 U_i(t)) W_i(t) + U_i^{1+\gamma}(t)\delta^2 W_i(t), \quad 1 \leq i \leq I, \quad (2.25)$$

$$\frac{dW_0(t)}{dt} = \left( (1 + \gamma)U_0^\gamma(t)\delta^2 U_0(t) + \frac{2(1 + \gamma + q)}{h}U_0^{\gamma+q}(t) \right) W_0(t) + U_0^{1+\gamma}(t)\delta^2 W_0(t). \quad (2.26)$$

Soit  $K$  une constante positive satisfaisant

$$K > \max_{1 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} \{(1 + \gamma)U_i^\gamma(t)|\delta^2 U_i(t)|\}$$

et

$$K > \max_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ (1 + \gamma)U_0^\gamma(t)|\delta^2 U_0(t)| + \frac{2(1 + \gamma + q)}{h}U_0^{\gamma+q}(t) \right\}.$$

Considérons maintenant le vecteur  $Z_h(t) = W_h(t)e^{-Kt}$ . Il est clair que  $Z_h(0) \geq 0$  car  $W_h(0) \geq 0$ .

Soit  $t_0$  le premier  $t \in ]0, T_0]$  tel que  $Z_i(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'inégalité ci-dessus. Nous obtenons alors

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad (2.27)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 1, \quad (2.28)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \quad (2.29)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I. \quad (2.30)$$

Des relations (2.25)-(2.26) et (2.28)-(2.30), nous montrons que

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &\geq ((1 + \gamma)U_{i_0}^\gamma(t_0)\delta^2 U_{i_0}(t_0) - K) Z_{i_0}(t_0) > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I, \\ \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &\geq \left( (1 + \gamma)U_0^\gamma(t_0)\delta^2 U_0(t_0) + \frac{2(1 + \gamma + q)}{h}U_0^{\gamma+q}(t_0) - K \right) Z_0(t_0) > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \end{aligned}$$

et ces inégalités sont en contradiction avec (2.27), ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Remarque 2.9.** Sous l'hypothèse du Lemme 2.8, la solution  $U_h$  du problème semi-discret (2.21)-(2.23) vérifie :

$$U_h(t) > 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T_{\max}^h[.$$

**Lemme 2.10.** Soit  $U_h$  la solution de (2.21)-(2.23) associée à la condition initiale  $\varphi_h$  en (2.23) telle que  $\varphi_i > \varphi_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I - 1$ . Alors, on a :

$$U_i(t) > U_{i+1}(t), \quad 0 \leq i \leq I - 1, \quad t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Posons  $Z_i(t) = U_i(t) - U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I - 1$ ,  $t \in ]0, T_{\max}^h[$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I - 1\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit



nombre entier naturel vérifiant l'égalité ci-dessus. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\
\delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 2, \\
\delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \\
\delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I - 1.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Un calcul direct conduit à

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= U_{i_0}^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + (1 + \gamma) \eta_{i_0}^\gamma(t_0) Z_{i_0}(t_0) \delta^2 U_{i_0+1}(t_0) \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\
&= U_{i_0}^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) > 0,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_0(t_0)}{dt} &= U_0^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_0(t_0) + \frac{2}{h} U_0^{1+\gamma+q}(t_0) + (1 + \gamma) \eta_0^\gamma(t_0) Z_0(t_0) \delta^2 U_1(t_0) \quad \text{si } i_0 = 0, \\
&= U_0^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_0(t_0) + \frac{2}{h} U_0^{1+\gamma+q}(t_0) > 0,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

où  $\eta_{i_0}(t_0)$  est une valeur intermédiaire entre  $U_{i_0}(t_0)$  et  $U_{i_0+1}(t_0)$ ,  $0 \leq i_0 \leq I - 1$ .

Les relations (2.32) et (2.33) contredisent (2.31), ce qui met fin à la preuve.  $\square$

## 2.2.4 Convergence de la solution du problème semi-discret

(2.21)-(2.23)

**Lemme 2.11.** Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . Si  $V_h, W_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  et  $a_h \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+^{I+1})$  sont tels que

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - a_i(t) \delta^2 V_i(t) - f(V_i(t)) < \frac{dW_i(t)}{dt} - a_i(t) \delta^2 W_i(t) - f(W_i(t)), \quad 0 \leq i \leq I, t \in ]0, T], \tag{2.34}$$

$$V_i(0) < W_i(0), \quad 0 \leq i \leq I, \tag{2.35}$$

alors on a :  $V_i(t) < W_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Posons  $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$ . Soit  $t_0$  le premier  $t \in ]0, T]$  tel que  $Z_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ ,  $0 \leq i \leq I$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ .

Il est aisé de voir que

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{si } i_0 = I, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - a_{i_0}(t_0)\delta^2 Z_{i_0}(t_0) + f(W_{i_0}(t_0)) - f(V_{i_0}(t_0)) \leq 0,$$

mais cette inégalité contredit (2.34) d'où le lemme.  $\square$

Le théorème suivant nous montre que sous certaines hypothèses, la solution semi-discrète converge vers la solution continue.

**Théorème 2.12.** *Soit  $T > 0$ . Supposons que le problème continu (2.1)-(2.3) a une solution  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  et la condition initiale en (2.23) satisfait*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0, \quad (2.36)$$

où  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Alors, pour  $h$  suffisamment petit, le problème semi-discret (2.21)-(2.23) a une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telle que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha > 0$  tel que

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \alpha \text{ pour } t \in [0, T]. \quad (2.38)$$

D'après le Théorème 2.6, le problème semi-discret (2.21)-(2.23) admet une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0, T_{\max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ . Notons  $t(h)$  la plus grande valeur de temps pour laquelle  $t(h) \leq T_{\max}^h$  et, pour tout  $t \in [0, t(h)[$ ,

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \quad (2.39)$$

La relation (2.36) implique  $t(h) > 0$  pour  $h$  suffisamment petit. Maintenant, posons  $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$ .

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ pour } t \in ]0, t^*(h)],$$

ce qui conduit à

$$\|U_h(t)\|_\infty < 1 + \alpha \text{ pour } t \in ]0, t^*(h)]. \quad (2.40)$$

Soit  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  l'erreur de discretisation. En se servant des relations (2.21)-(2.23) d'une part et (2.15), (2.19), (2.20) d'autre part, on a pour  $t \in ]0, t^*(h)]$  :

$$\begin{aligned} \frac{de_i(t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_i, t)\delta^2 e_i(t) &= ((1 + \gamma)\xi_i^\gamma(t)\delta^2 U_i(t)) e_i(t) + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq I, \\ \frac{de_0(t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_0, t)\delta^2 e_0(t) &= \left( (1 + \gamma)\xi_0^\gamma(t)\delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h}(1 + \gamma + q)\theta_0^{\gamma+q}(t) \right) e_0(t) + O(h^2), \end{aligned}$$

où

$\xi_i(t)$  est une valeur intermédiaire entre  $U_i(t)$  et  $u(x_i, t)$  pour  $i \in \{1, \dots, I\}$  ;

$\theta_0(t)$  est une valeur intermédiaire entre  $U_0(t)$  et  $u(x_0, t)$ .

En utilisant les relations (2.38) et (2.40), il existe des constantes positives  $M$  et  $Q$  telles que

$$\frac{de_i(t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_i, t)\delta^2 e_i(t) \leq M|e_i(t)| + Qh^2, \quad 1 \leq i \leq I, \quad (2.41)$$

$$\frac{de_0(t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_0, t)\delta^2 e_0(t) \leq \frac{M}{h}|e_0(t)| + Qh^2. \quad (2.42)$$

Considérons maintenant la fonction  $Z \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  telle que

$$Z(x, t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Kh^2)e^{(L+1)t+C(x-1)^2},$$

$C$ ,  $K$  et  $L$  sont des constantes positives à choisir plus tard.

Les différentes dérivées partielles de  $Z$  donnent :

$$Z_t(x, t) = (L + 1)Z(x, t),$$

$$Z_x(x, t) = 2C(x - 1)Z(x, t),$$

$$Z_{xx}(x, t) = (2C + 4(x - 1)^2C^2)Z(x, t).$$

De ces dérivées partielles, nous obtenons le problème suivant

$$\begin{aligned} Z_t(x, t) - u^{1+\gamma}(x, t)Z_{xx}(x, t) &= [(L+1) - (2C + 4(x-1)^2C^2)u^{1+\gamma}(x, t)]Z(x, t), \\ Z_x(0, t) &= -2CZ(0, t), \quad Z_x(1, t) = 0, \\ Z(x, 0) &= (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Kh^2)e^{C(x-1)^2}. \end{aligned}$$

En utilisant un développement de type Taylor, on arrive à :

$$\frac{Z(x_i, t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_i, t)\delta^2 Z(x_i, t) = [(L+1) - (2C + 4(x_i-1)^2C^2)u^{1+\gamma}(x_i, t)]Z(x_i, t) + O(h^2),$$

$$1 \leq i \leq I,$$

$$\begin{aligned} \frac{Z(x_0, t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_0, t)\delta^2 Z(x_0, t) &= [(L+1) - (2C + 4(x_0-1)^2C^2)u^{1+\gamma}(x_0, t)]Z(x_0, t) \\ &\quad + \frac{2}{h}Cu^{1+\gamma}(x_0, t)Z(x_0, t) + O(h^2), \end{aligned}$$

$$Z(x_i, 0) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Kh^2)e^{C(x_i-1)^2}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Choisissons les constantes  $L$ ,  $C$  et  $K$  de sorte que

$$\frac{Z(x_i, t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_i, t)\delta^2 Z(x_i, t) > M|Z(x_i, t)| + Qh^2, \quad 1 \leq i \leq I, \quad (2.43)$$

$$\frac{Z(x_0, t)}{dt} - u^{1+\gamma}(x_0, t)\delta^2 Z(x_0, t) > \frac{M}{h}|Z(x_0, t)| + Qh^2, \quad (2.44)$$

$$Z(x_i, 0) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Kh^2)e^{C(x_i-1)^2} > |e_i(0)|, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (2.45)$$

En tenant compte des relations (2.41), (2.42) et (2.43)-(2.45), nous appliquons le Lemme 2.11 pour avoir

$$e_i(t) < Z(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, t^*(h)].$$

Par le même procédé, nous montrons aussi que

$$-e_i(t) < Z(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, t^*(h)].$$

D'où

$$|e_i(t)| < Z(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, t^*(h)].$$

Ce qui entraîne

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty + Kh^2)e^{(L+1)t+C}, \quad t \in [0, t^*(h)]. \quad (2.46)$$

Il nous reste à montrer que  $t^*(h) = T$  pour  $h$  suffisamment petit. Pour cela, nous sup-

posons que  $t^*(h) < T$ . Alors  $t^*(h) = t(h)$ , et des relations (2.39) et (2.46), nous avons

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq e^{(L+1)T+C} \left( \|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty + Kh^2 \right).$$

Le terme de droite de l'inégalité ci-dessous tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro. Par conséquent,  $1 \leq 0$  qui est impossible.  $\square$

## 2.2.5 Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23)

**Définition 2.13.** La solution  $U_h$  du problème semi-discret (2.21)-(2.23) explose en un temps fini, s'il existe un temps fini  $T_h > 0$  tel que  $\|U_h(t)\|_\infty < +\infty$  pour  $t \in [0, T_h[$  et

$$\lim_{t \rightarrow T_h} \|U_h(t)\|_\infty = +\infty$$

où  $\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$ .

Le temps  $T_h$  est appelé temps d'explosion de la solution  $U_h$ .

Posons l'hypothèse (H) :  $u_0 > 0$ ,  $u'_0 \leq 0$  et  $u''_0 \geq 0$  dans  $[0, 1]$ .

**Théorème 2.14.** Si la solution du problème continu (2.1)-(2.3) a une solution  $u$  dans  $\mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T_b])$  qui explose au temps fini  $T_b$  et que la condition initiale  $\varphi_h$  en (2.23) vérifie  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  quand  $h \rightarrow 0$ , alors sous l'hypothèse (H), la solution  $U_h$  de (2.21)-(2.23) explose en temps fini  $T_h$  pour  $h$  suffisamment petit. De plus nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b.$$

*Démonstration.* Nous montrons le théorème en deux parties.

Premier cas :  $0 < q < 1$ .

Introduisons la fonctionnelle suivante :

$$J_1[u](t) = \int_0^1 u^\beta(x, t) dx, \quad t \in [0, T_b[,$$

avec  $\beta = \frac{1-q}{\varepsilon(q)}$  où  $\varepsilon(q) > \frac{1-q}{q}$ .

Nous savons que la solution  $u$  du problème continu explose au temps fini  $T_b$  sur tout l'espace  $[0, 1]$  lorsque  $0 < q < 1$ . Il s'en suit que

$$\lim_{t \rightarrow T_b} J_1[u](t) = +\infty.$$

Posons  $\alpha = u(1, 0) = u_0(1) > 0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1[u](t)}{dt} &= \beta \int_0^1 u^{\beta-1}(x, t) u_t(x, t) dx \\ &\geq \beta \alpha^{\beta+\gamma} \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx \\ &= \beta \alpha^{\beta+\gamma} u^q(0, t) \\ &\geq \beta \alpha^{\beta+\gamma} \int_0^1 u^q(x, t) dx. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen à la dernière inégalité obtenue, nous aboutissons à

$$\frac{dJ_1[u](t)}{dt} \geq \beta \alpha^{\beta+\gamma} (J_1[u](t))^{\frac{q}{\beta}}. \quad (2.47)$$

Notons que  $\frac{q}{\beta} = \frac{q\varepsilon(q)}{1-q} > 1$  car  $\varepsilon(q) > \frac{1-q}{q}$ .

Définissons maintenant  $J_{1h}[U_h]$ , une approximation numérique de  $J_1[u]$  comme suit :

$$J_{1h}[U_h](t) = \sum_{i=0}^I h U_i^\beta(t). \quad (2.48)$$

La dérivée de  $J_{1h}[U_h]$  par rapport à  $t$  donne

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{1h}[U_h](t)}{dt} &= h\beta \sum_{i=0}^I U_i^{\beta-1}(t) \frac{dU_i(t)}{dt} \\ &= h\beta \left[ U_0^{\beta+\gamma}(t) \left( \delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h} U_0^q(t) \right) + U_I^{\beta+\gamma}(t) \delta^2 U_I(t) + \sum_{i=1}^{I-1} U_i^{\beta+\gamma}(t) \delta^2 U_i(t) \right] \\ &\geq h\beta \varphi_I^{\beta+\gamma} \left( \delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h} U_0^q(t) + \delta^2 U_I(t) + \sum_{i=1}^{I-1} \delta^2 U_i(t) \right) \\ &= h\beta \varphi_I^{\beta+\gamma} \left( \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_0^q(t) + \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h\beta\varphi_I^{\beta+\gamma} \left( \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h}U_0^q(t) + \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h^2} - \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_i(t) - U_{i-1}(t)}{h^2} \right) \\
&= h\beta\varphi_I^{\beta+\gamma} \left[ \left( \frac{U_1(t) - U_0(t)}{h^2} + \frac{1}{h}U_0^q(t) \right) + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h^2} + \frac{1}{h}U_0^q(t) \right] \\
&\geq \beta\varphi_I^{\beta+\gamma}U_0^q(t) \tag{2.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta\varphi_I^{\beta+\gamma} \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1}U_0^q(t) \\
&\geq \beta\varphi_I^{\beta+\gamma} \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1}U_i^q(t). \tag{2.50}
\end{aligned}$$

On obtient l'égalité (2.49) en remarquant que

$$\frac{U_1(t) - U_0(t)}{h^2} + \frac{1}{h}U_0^q(t) = \frac{1}{2}\delta_*^2 U_0(t) > 0 \text{ et } \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h^2} = \frac{1}{2}\delta_* U_I(t) > 0.$$

De plus, en utilisant la forme discrète de l'inégalité de Jensen, on a :

$$\sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1}U_i^q(t) \geq \left( \frac{I}{I+1} \right)^{\frac{q}{\beta}} \left( \sum_{i=0}^I hU_i^\beta(t) \right)^{\frac{q}{\beta}} = \left( \frac{I}{I+1} \right)^{\frac{q}{\beta}} (J_{1h}[U_h](t))^{\frac{q}{\beta}}.$$

Par conséquent, l'inégalité (2.50) devient

$$\frac{dJ_{1h}[U_h](t)}{dt} \geq \left( \frac{I}{I+1} \right)^{\frac{q}{\beta}} \beta\varphi_I^{\beta+\gamma} (J_h[U_h](t))^{\frac{q}{\beta}}. \tag{2.51}$$

Posons  $G(s) = \Gamma_1 s^{\frac{q}{\beta}}$  où  $\Gamma_1 = \left( \frac{I}{I+1} \right)^{\frac{q}{\beta}} \beta\varphi_I^{\beta+\gamma} > 0$ . De la définition de la fonction  $G$  et de la relation (2.51), il est clair que

$$\frac{dJ_{1h}[U_h](t)}{dt} \geq G(J_h[U_h](t)),$$

et il existe  $s_0 > 0$  tel que

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{pour tout } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < +\infty & \text{car } \frac{q}{\beta} > 1. \end{cases}$$

Montrons maintenant que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |J_1[u](t) - J_{1h}[U_h](t)| = 0.$$

Pour cela, introduisons pour tout  $t \in [0, T_b - \epsilon]$ , la somme de Riemann de  $u^\beta(\cdot, t)$  sur  $[0, 1]$  liée à la subdivision  $(x_i)_{i=0, \dots, I}$  (voir section 2.2.1 pour plus de détails sur la subdivision), définie par

$$S_h(u^\beta(\cdot, t)) = \sum_{i=0}^{I-1} h u^\beta(x_i, t).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|J_1[u](t) - J_{1h}[U_h](t)| \leq |J_1[u](t) - S_h(u^\beta(\cdot, t))| + |S_h(u^\beta(\cdot, t)) - J_{1h}[U_h](t)|.$$

Pour tout  $t \in [0, T_b - \epsilon]$ , la fonction  $u^\beta(\cdot, t)$  est définie en tout point du segment  $[0, 1]$ . Par conséquent, la somme de Riemann  $S_h(u^\beta(\cdot, t))$  converge vers  $J_1[u](t)$  lorsque le pas  $h$  tend vers zéro. D'où  $\lim_{h \rightarrow 0} |J_1[u](t) - S_h(u^\beta(\cdot, t))| = 0$  pour tout  $t \in [0, T_b - \epsilon]$ .

Nous avons par ailleurs

$$\begin{aligned} |S_h(u^\beta(\cdot, t)) - J_{1h}[U_h](t)| &= \left| \sum_{i=0}^{I-1} h u^\beta(x_i, t) - \sum_{i=0}^I h U_i^\beta(t) \right| \\ &= \left| -h U_I^\beta(t) + h \sum_{i=0}^{I-1} [u^\beta(x_i, t) - U_i^\beta(t)] \right| \\ &\leq h \sum_{i=0}^{I-1} |u^\beta(x_i, t) - U_i^\beta(t)| \\ &= h \beta \sum_{i=0}^{I-1} \zeta_i^{\beta-1}(t) |u(x_i, t) - U_i(t)| \\ &\leq h \beta \zeta \sum_{i=0}^{I-1} |u(x_i, t) - U_i(t)| \\ &\leq \beta \zeta \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |u(x_i, t) - U_i(t)|, \end{aligned}$$

où  $\zeta_i(t)$  est une valeur intermédiaire entre  $u(x_i, t)$  et  $U_i(t)$ , et  $\zeta = \max_{\substack{0 \leq i \leq I \\ 0 \leq t \leq T_b - \epsilon}} \zeta_i^{\beta-1}(t)$ . D'après le Théorème 2.12, il existe une constant  $C > 0$  telle que

$$|S_h(u^\beta(\cdot, t)) - J_{1h}[U_h](t)| \leq \beta \zeta C (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

On en déduit que  $\lim_{h \rightarrow 0} |S_h(u^\beta(\cdot, t)) - J_{1h}[U_h](t)| = 0$  pour tout  $t \in [0, T_b - \epsilon]$ .



Finalement, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |J_1[u](t) - J_{1h}[U_h](t)| = 0.$$

Grâce au Théorème A.11 (annexe), nous concluons que  $U_h$  explose en un temps fini  $T_h$  tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b$ .

Deuxième cas :  $q > 1$ .

Pour ce cas, la solution  $u$  du problème continu (2.1)-(2.3) explose seulement en  $x = 0$ .

Nous savons déjà que  $u > 0$ ,  $u_x < 0$ ,  $u_t > 0$  et  $u_{xx} > 0$ .

Introduisons maintenant  $J_2[u]$  comme suit :

$$J_2[u](t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad t \in [0, T_b[.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_2[u](t)}{dt} &= \int_0^1 u_t(x, t) dx \\ &\geq \alpha^{1+\gamma} \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx \\ &= \alpha^{1+\gamma} u^q(0, t) \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} &\geq \alpha^{1+\gamma} \int_0^1 u^q(x, t) dx \\ &\geq \alpha^{1+\gamma} (J_2[u](t))^q \end{aligned} \tag{2.53}$$

où  $\alpha = u(1, 0) = u_0(1) > 0$ . Nous avons la relation (2.53) en utilisant l'inégalité de Jensen.

Posons  $H(t) = \alpha^{1+\gamma} u^q(0, t)$ ,  $t \in [0, T_b[$ .

D'après (2.52),  $\frac{dJ_2[u](t)}{dt} \geq H(t)$ ,  $t \in [0, T_b[$  et  $\lim_{t \rightarrow T_b} H(t) = +\infty$  puisque  $u$  explose en  $x = 0$ .

Désignons par  $J_{2h}[U_h]$  et  $H_h$ , des approximations numériques de  $J_2[u]$  et  $H$  respectivement :

$$J_{2h}[U_h](t) = \sum_{i=0}^I h U_i(t), \tag{2.54}$$

$$H_h(t) = \alpha_h^{1+\gamma} U_0^q(t) \text{ avec } \alpha_h = \varphi_I. \tag{2.55}$$

Tout comme précédemment, nous montrons que

$$\frac{dJ_{2h}[U_h](t)}{dt} \geq H_h(t) \quad \text{et} \quad \frac{dJ_{2h}[U_h](t)}{dt} \geq \left(\frac{I}{I+1}\right)^q \alpha_h^{1+\gamma} (J_h[U_h](t))^q.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{2h}[U_h](t)}{dt} &= h \sum_{i=0}^I \frac{dU_i(t)}{dt} \\ &= h \sum_{i=0}^I U_i^{1+\gamma}(t) \delta_*^2 U_i(t) \\ &\geq h \varphi_I^{1+\gamma} \left( \delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h} U_0^q(t) + \delta^2 U_I(t) + \sum_{i=1}^{I-1} \delta^2 U_i(t) \right) \\ &= h \varphi_I^{1+\gamma} \left( \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_0^q(t) + \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} \right) \\ &= h \varphi_I^{1+\gamma} \left( \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_0^q(t) + \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h^2} - \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_i(t) - U_{i-1}(t)}{h^2} \right) \\ &= h \varphi_I^{1+\gamma} \left[ \left( \frac{U_1(t) - U_0(t)}{h^2} + \frac{1}{h} U_0^q(t) \right) + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h^2} + \frac{1}{h} U_0^q(t) \right] \\ &\geq \varphi_I^{1+\gamma} U_0^q(t) = H_h(t) \\ &= \varphi_I^{1+\gamma} \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_0^q(t) \\ &\geq \varphi_I^{1+\gamma} \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^q(t). \end{aligned}$$

L'utilisation de la forme discrète de l'inégalité de Jensen nous permet d'avoir

$$\sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^q(t) \geq \left(\frac{I}{I+1}\right)^q \left(\sum_{i=0}^I h U_i(t)\right)^q = \left(\frac{I}{I+1}\right)^q (J_{2h}[U_h](t))^q.$$

D'où

$$\frac{dJ_{2h}[U_h](t)}{dt} \geq \left(\frac{I}{I+1}\right)^q \alpha_h^{1+\gamma} (J_{2h}[U_h](t))^q$$

Par ailleurs, nous avons  $\frac{dH_h(t)}{dt} = \alpha_h^{1+\gamma} q U_0^{q-1}(t) \frac{dU_0(t)}{dt} \geq 0$ .

En posant  $G(s) = \Gamma_2 s^q$  avec  $\Gamma_2 = \left(\frac{I}{I+1}\right)^q \alpha_h^{1+\gamma} > 0$ , il est clair que

$$\frac{dJ_{2h}[U_h](t)}{dt} \geq G(J_{2h}[U_h](t)),$$

et il existe  $s_0 > 0$  tel que

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{pour } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < +\infty & \text{car } q > 1. \end{cases}$$

Finalement, en utilisant pour  $t \in [0, T_b - \epsilon]$  la somme de Riemann de  $u(\cdot, t)$  sur  $[0, 1]$  liée à la subdivision  $(x_i)_{i=0, \dots, I}$  et le Théorème 2.12, par le même procédé que ce qui précède, on arrive à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T - \epsilon]} |J_2[u](t) - J_{2h}[U_h](t)| = 0.$$

Et

$$\begin{aligned} |H(t) - H_h(t)| &= |u_0^{1+\gamma}(1)u^q(0, t) - \varphi_I^{1+\gamma}U_0^q(t)| \\ &\leq \varphi_I^{1+\gamma}|u^q(0, t) - U_0^q(t)| + u^q(0, t)|u_0^{1+\gamma}(1) - \varphi_I^{1+\gamma}|. \end{aligned}$$

Ainsi, par le Théorème 2.12, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T - \epsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

En vertu du Théorème A.12 (annexe), nous avons l'explosion de  $U_h$  en un temps fini  $T_h$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b$ . □

## 2.2.6 Taux et ensemble d'explosion

**Théorème 2.15.** *Soit  $q > 1$ . Sous les hypothèses des lemmes 2.8 et 2.10, on a pour  $t$  suffisamment proche de  $T_h$ ,*

$$U_0(t) \sim (T_h - t)^{-1/(\gamma+q)}$$

au sens qu'il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$C_1(T_h - t)^{-1/(\gamma+q)} \leq U_0(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(\gamma+q)}$$

*Démonstration.* Sachant que  $U_0(t) > U_1(t)$  (voir Lemme 2.10), nous tirons de la relation (2.22) l'inégalité suivante :

$$\frac{dU_0(t)}{dt} \leq \frac{2}{h} U_0^{1+\gamma+q}(t).$$

En intégrant cette inégalité de  $t$  à  $T_h$ , on obtient

$$C_1(T_h - t)^{-1/(\gamma+q)} \leq U_0(t),$$

avec  $C_1 = \left(\frac{2(\gamma+q)}{h}\right)^{-1/(\gamma+q)}$ .

De la même relation (2.22), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dU_0(t)}{dt} &= \left( U_0^{-q}(t) \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2}{h} \right) U_0^{1+\gamma+q}(t) \\ &= \frac{2}{h} \left( 1 - \frac{U_0^{1-q}(t)}{h} \left( 1 - \frac{U_1(t)}{U_0(t)} \right) \right) U_0^{1+\gamma+q}(t) \end{aligned}$$

Nous savons que  $\left(1 - \frac{U_1(t)}{U_0(t)}\right) \in ]0, 1[$  et  $\left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right) \in ]0, 1[$ . Puisque  $q > 1$  et  $U_h$  explose seulement en  $x_0 = 0$ , alors il existe  $T_0 \in [0, T_h[$  tel que pour tout  $t \in [T_0, T_h[$ ,  $U_0^{1-q}(t) \left(1 - \frac{U_1(t)}{U_0(t)}\right) \leq \varphi_0^{1-q} \left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right)$ . Ainsi, pour tout  $t \in [T_0, T_h[$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dU_0(t)}{dt} &= \frac{2}{h} \left( 1 - \frac{U_0^{1-q}(t)}{h} \left( 1 - \frac{U_1(t)}{U_0(t)} \right) \right) U_0^{1+\gamma+q}(t) \\ &\geq \frac{2}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_0^{1-q}}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \right) U_0^{1+\gamma+q}(t). \end{aligned} \tag{2.56}$$

De l'hypothèse  $\delta_*^2 \varphi_0 > 0$ , il vient que  $1 - \frac{\varphi_0^{1-q}}{h} \left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0}\right) > 0$ .

Posons

$$C_0 = \frac{2}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_0^{1-q}}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right) \right).$$

Pour tout  $t \in [T_0, T_h[$ , l'inégalité (2.56) devient :

$$\frac{dU_0(t)}{dt} \geq C_0 U_0^{1+\gamma+q}(t),$$

d'où

$$\frac{dU_0(t)}{U_0^{1+\gamma+q}(t)} \geq C_0 dt.$$

En intégrant cette inégalité de  $t \geq T_0$  à  $T_h$ , on obtient

$$U_0(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(\gamma+q)}, \tag{2.57}$$

avec  $C_2 = [(\gamma + q)C_0]^{-1/(\gamma+q)}$  □

**Théorème 2.16.** *Soit  $q > 1$ . Pour  $h$  suffisamment petit, l'ensemble d'explosion de la solution du problème semi-discret (2.21)-(2.23) coïncide avec celui de la solution du problème continu (2.1)-(2.3).*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est inspirée de celle de R. Ferreira [18].

Notons  $B(u)$  et  $B(U_h)$  les ensembles d'explosion respectifs de la solution du problème continu et de celle du problème semi-discret. Définissons la distance usuelle entre deux ensembles  $A$  et  $B$  par  $\text{dist}(A, B) = \inf \{|x - y| : x \in A, y \in B\}$ .

Soient les fonctions  $\Phi$  et  $\psi$  définies par

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \text{dist}(x, B(u)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi : [m, M] &\rightarrow [0, +\infty[ \\ a &\mapsto \inf_{t \in ]0, T_b[} \{u^{-1}(x, t) : \text{dist}(x, B(u)) \geq a\} \end{aligned}$$

où  $m = \min \{\psi(x), x \in [0, 1]\}$  et  $M = \max \{\psi(x), x \in [0, 1]\}$ .

La fonction  $\Phi$  ainsi définie est continue et croissante. De plus,

$\Phi(0^+) = 0$  et  $u^{-1}(x, t) \geq \Phi(\text{dist}(x, B(u)))$  pour tout  $t \in ]0, T_b[$ .

Soit  $x_k \in B(U_h)$ , alors  $\Phi(\text{dist}(x_k, B(u))) \leq u^{-1}(x_k, t) \leq U_k^{-1}(t) + |u^{-1}(x_k, t) - U_k^{-1}(t)|$ , que l'on réécrit comme suit :

$$\Phi(\text{dist}(x_k, B(u))) \leq u^{-1}(x_k, t) \leq U_k^{-1}(t) + U_k^{-1}(t)u^{-1}(x_k, t)|U_k(t) - u(x_k, t)|. \quad (2.58)$$

Soit  $\rho > 0$ .

On sait du Théorème 2.14 que  $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b$  et  $\lim_{t \rightarrow T_h} U_k^{-1}(t) = 0$  car  $x_k \in B(U_h)$ .

Alors il existe  $\tilde{h} > 0$ ,  $t_1 < \min\{T_h, T_b\}$  tels que

$$U_k^{-1}(t_1) < \rho \text{ pour tout } h \leq \tilde{h}. \quad (*)$$

De même, par le Théorème 2.12, il existe  $\hat{h} > 0$  tel que

$$|U_k(t_1) - u(x_k, t_1)| < Ch^2 \text{ pour tout } h \leq \hat{h}, \quad (**)$$

où  $C$  est une constante positive.

En tenant compte de (\*) et (\*\*) dans (2.58), on obtient pour tout  $h \leq \min\{\tilde{h}, \hat{h}\}$

$$\begin{aligned}\Phi(\text{dist}(x_k, B(u))) &\leq \rho + \rho K h^2 \\ \text{dist}(x_k, B(u)) &\leq \Phi^{-1}(\rho + \rho K h^2)\end{aligned}$$

avec  $K = C u^{-1}(x_k, t_1)$ . Lorsque  $\rho$  et  $h$  tendent vers 0, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0, ce qui conclut la preuve pour le cas où  $B(u)$  est un singleton, c'est-à-dire  $q > 1$ .

□

**Remarque 2.17.** *Il ressort de la preuve du théorème précédent que si un problème continu admet une unique solution classique  $u$  qui explose en un temps fini  $T_b$  dont l'ensemble d'explosion est un singleton, et  $U_h$  solution d'un schéma semi-discret en espace issu du problème continu avec  $U_h$  qui explose en  $T_h$ , et si  $U_h$  et  $T_h$  convergent respectivement vers  $u$  et  $T_b$  lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, alors l'ensemble d'explosion de  $U_h$  coïncide avec celui de  $u$  lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.*

## 2.2.7 Résultats numériques

Dans cette sous section, nous présentons des résultats numériques consignés dans des tableaux et aussi sous forme graphiques pour différentes valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $q$ . Puis nous ferons quelques remarques au vu de ces résultats.

Nous commençons par transformer le système d'équations différentielles ordinaires singulier (2.21)-(2.23) en un système d'EDO non singulier par méthode de la transformation de la longueur d'arc (Chapitre 1 page 9) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \ell < +\infty, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I, \end{array} \right. \quad (2.59)$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{h^2} U_0^{1+\gamma} (U_1 - U_0 + hU_0^q), \\ f_i &= \frac{1}{h^2} U_i^{1+\gamma} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_I &= \frac{2}{h^2} U_I^{1+\gamma} (U_{I-1} - U_I). \end{aligned}$$

" $\ell$ " est appelée la longueur d'arc et est telle que  $d\ell^2 = dt^2 + \sum_{i=0}^I dU_i^2$ .

Les variables  $t$  et  $U_i$  sont vues comme des fonctions de  $\ell$ . Dans [36], Hirota et Ozawa ont montré que

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} t(\ell) = T_h \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \|U_h(\ell)\|_\infty = +\infty.$$

Ils ont aussi prouvé le résultat suivant (Théorème 9 [36]) :

Soit  $U_h$  la solution d'un système d'EDO telle qu'il existe au moins un noeud  $k$  et un temps fini  $T_h > 0$  vérifiant  $\lim_{t \rightarrow T_h} U_k(t) = +\infty$  et  $U_k \sim (T_h - t)^{-1/p}$ ,  $t \uparrow T_h$ ,  $p > 0$ . Soit  $\{\ell_j\}$  une suite géométrique définie par  $\ell_j = \ell_0 \cdot \mu^j$ ,  $\ell_0 > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , alors la suite de temps  $\{t_j\}$  définie par

$$t_j = t(\ell_j) = \int_0^{\ell_j} \frac{d\ell}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

converge linéairement vers  $T_h$ .

Dans le cas du schéma semi-discret (2.21)-(2.23), nous obtenons la suite de temps  $\{t_j\}$  en intégrant le système (2.59) avec le code DOP54 sous MATLAB. Ce code est basé sur la méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre (4) 5 et est la version MATLAB du célèbre code DOPRI5 (version FORTRAN) écrit par Hairer et Wanner [35]. Dans DOP54, nous avons trois paramètres de contrôles : *AbsTol*, *RelTol* et *InitialStep*.

Les paramètres *AbsTol* et *RelTol* permettent respectivement de spécifier les erreurs absolue et relative. *InitialStep* permet de choisir la manière dont les erreurs sont contrôlées (voir [36]).

La suite de temps  $\{t_j\}$  étant obtenue, nous accélérons sa convergence à l'aide de l'algorithme  $\Delta^2$  d'Aitken (voir Chapitre 1 page 10). Pour la simulation, nous prenons

$$AbsTol = RelTol = 10^{-15}, \quad InitialStep = 0,$$

la suite géométrique

$$\ell_j = 2^{10} \cdot 2^j, \quad j = 0, \dots, 10$$

et la donnée initiale

$$\varphi_i = 0.5 * (i * h)^2 - i * h + 1, \quad 0 \leq i \leq I.$$

### Tables et graphiques obtenus avec le schéma semi-discret (2.21)-(2.23)

Dans les tableaux 2.1-2.9, en lignes, nous présentons les temps d'explosion numériques et le nombre d'itérations nécessaires pour l'explosion numérique correspondant aux maillages  $I$ .

**Premier cas :**  $\gamma > 0$  et  $0 < q < 1$  (Explosion sur l'espace tout entier).

TABLEAU 2.1 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $\gamma = 0, 2$ ;  $q = 0, 7$

$I$	$T_h$	$n$
16	1,305 924 510	130827
32	1,306 085 572	256853
64	1,306 125 844	636465
128	1,306 135 913	2042966

TABLEAU 2.2 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $\gamma = 0, 2$ ;  $q = 0, 9$

$I$	$T_h$	$n$
16	1,020 510 601	60012
32	1,020 628 801	113554
64	1,020 658 359	220576
128	1,020 665 750	500129

TABLEAU 2.3 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $\gamma = 0, 5$ ;  $q = 0, 9$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,899 241 218	62475
32	0,899 440 092	118469
64	0,899 489 819	230738
128	0,899 502 252	528716



**Deuxième cas :**  $\gamma > 0$  et  $q > 1$  (explosion au bord  $x = 0$ ).

TABLEAU 2.4 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $\gamma = 1$ ;  $q = 2, 5$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,173 221 542	3596
32	0,172 749 511	7101
64	0,172 628 837	13903
128	0,172 598 389	27241
256	0,172 590 749	54370
512	0,172 588 836	123706
1024	0,172 588 357	389004

TABLEAU 2.5 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $\gamma = 1$ ;  $q = 3$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,127 301 254	2687
32	0,126 519 834	5232
64	0,126 314 220	10176
128	0,126 261 502	19845
256	0,126 248 156	39330
512	0,126 244 798	86031
1024	0,126 243 957	257672

TABLEAU 2.6 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $\gamma = 1$ ;  $q = 4$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,079 089 766	1800
32	0,077 859 669	3424
64	0,077 517 079	6586
128	0,077 425 864	12753
256	0,077 402 182	25059
512	0,077 396 123	52469
1024	0,077 394 587	145195

TABLEAU 2.7 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $\gamma = 1, 5; q = 3$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,127 392 357	2696
32	0,126 942 686	5385
64	0,126 827 206	10615
128	0,126 798 001	20858
256	0,126 790 664	41542
512	0,126 788 826	91737
1024	0,126 788 366	278256

TABLEAU 2.8 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $\gamma = 3; q = 3$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,131 201 018	2854
32	0,1314809070	6040
64	0,131 552 154	12273
128	0,131 570 054	24535
256	0,131 574 535	49485
512	0,131 575 656	112619
1024	0,131 575 936	354437

TABLEAU 2.9 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $\gamma = 4; q = 3$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,136 063 254	3044
32	0,136 730 778	6628
64	0,136 898 206	13675
128	0,136 940 088	27599
256	0,136 950 560	56098
512	0,136 953 178	130550
1024	0,136 953 833	418703

**Remarque 2.18.** Nous observons des tableaux précédents qu'il y'a une relation entre le temps d'explosion  $T_h$ , les paramètres du flux  $q$  et de diffusion  $\gamma$ . En effet, pour tous les cas, lorsque le paramètre  $q$  croît, le temps d'explosion diminue donc l'explosion survient tôt, on dit qu'elle est accélérée. Par contre, lorsque le paramètre  $\gamma$  croît, dans le cas où l'explosion est sur l'espace tout entier, on constate une diminution au niveau du temps d'explosion. L'explosion est donc accélérée (Tables 2.2 et 2.3). Et le cas où l'explosion a lieu au bord  $x = 0$ , la croissance de  $\gamma$  entraîne une augmentation du temps d'explosion, l'explosion est donc retardée (Tables 2.5, 2.7-2.9).

Nous présentons maintenant des graphiques illustrant l'évolution de la solution numérique en fonction de l'espace et/ou du temps.

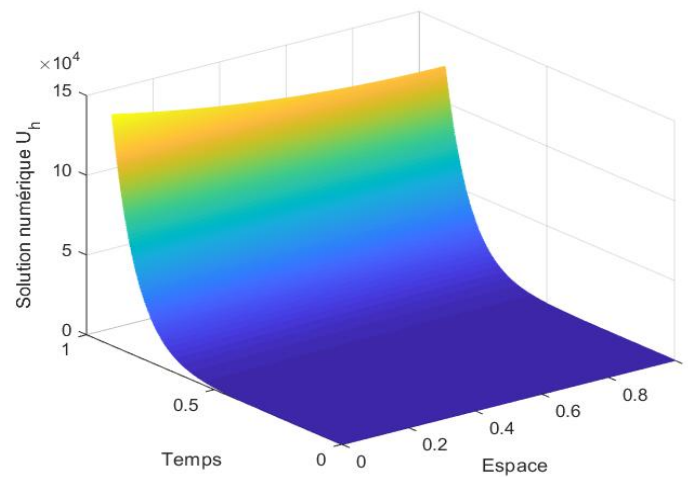


FIGURE 2.1 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 64$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $q = 0,9$  (cas où  $\gamma > 0$  et  $0 < q < 1$ ).

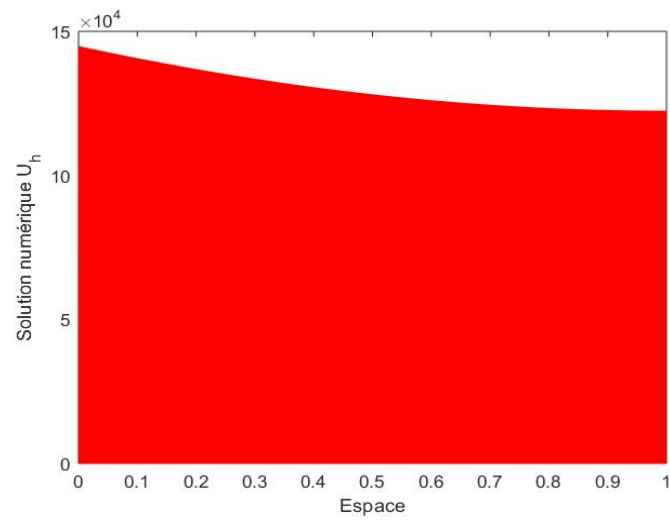


FIGURE 2.2 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 64$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $q = 0,9$  (cas où  $\gamma > 0$  et  $0 < q < 1$ ).

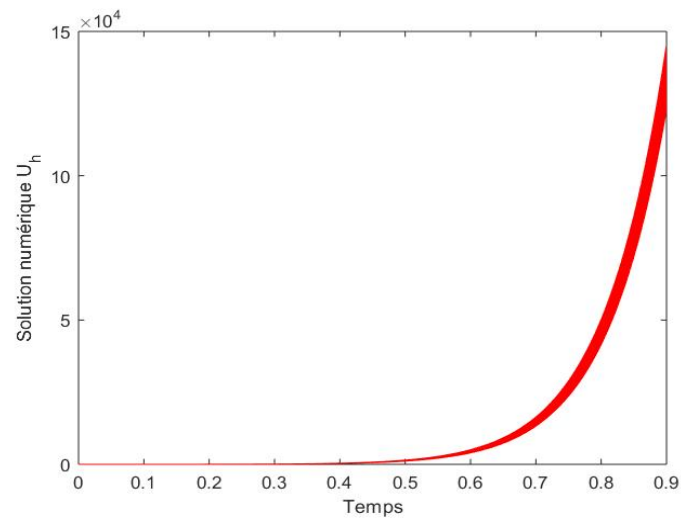


FIGURE 2.3 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 64$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $q = 0,9$  (cas où  $\gamma > 0$  et  $0 < q < 1$ ).

Les autres figures concernent le cas où  $\gamma > 0$  et  $q > 1$ .

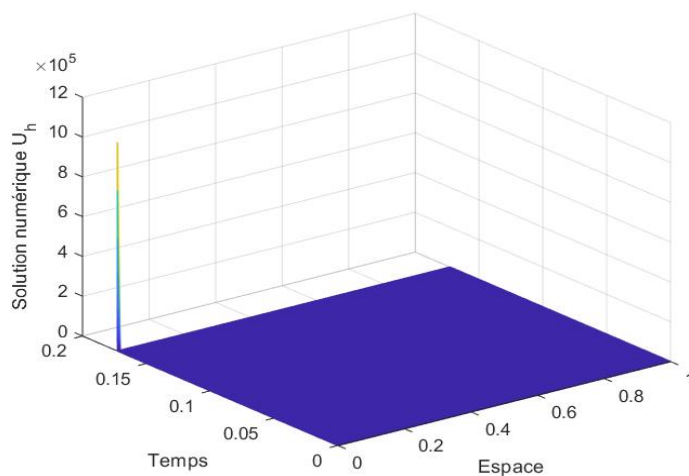


FIGURE 2.4 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 128$ ;  $\gamma = 1$ ;  $q = 2, 5$ .

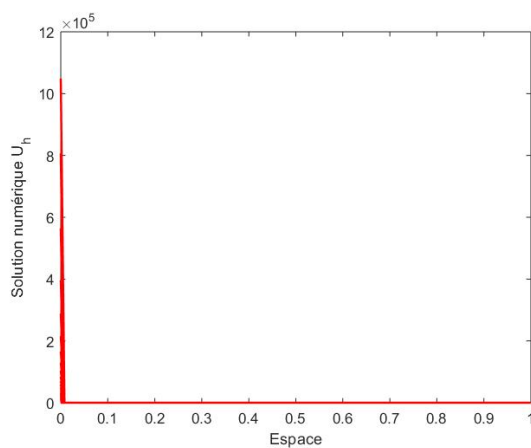


FIGURE 2.5 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 128$ ;  $\gamma = 1$ ;  $q = 2, 5$ .

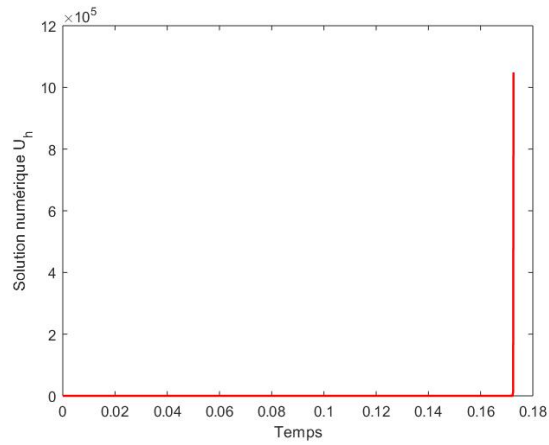


FIGURE 2.6 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 128$ ;  $\gamma = 1$ ;  $q = 2, 5$ .

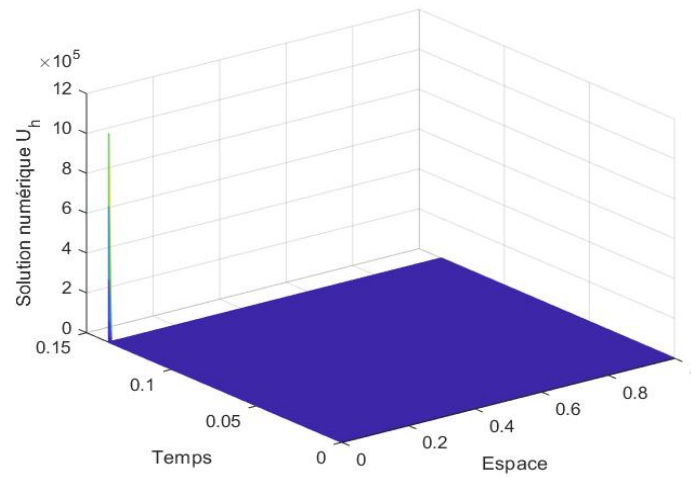


FIGURE 2.7 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 128$ ;  $\gamma = 4$ ;  $q = 3$ .

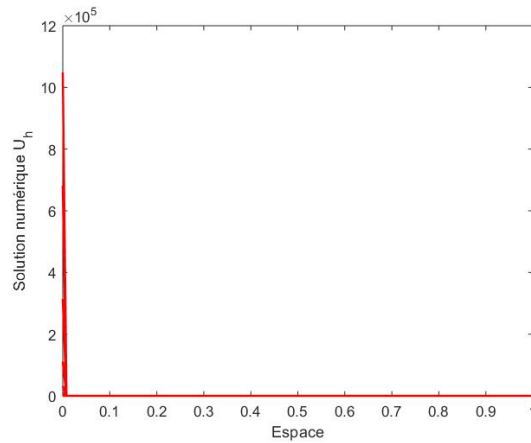


FIGURE 2.8 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 128$ ;  $\gamma = 4$ ;  $q = 3$ .

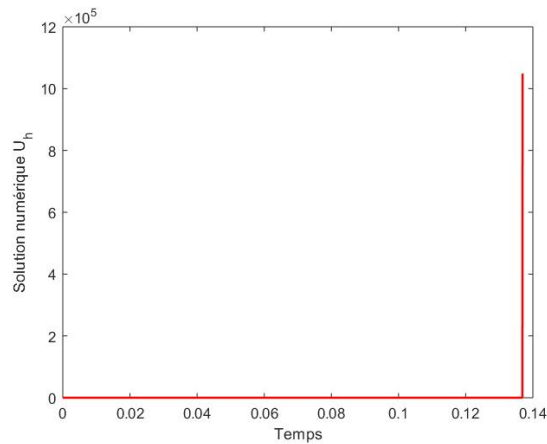


FIGURE 2.9 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 128$ ;  $\gamma = 4$ ;  $q = 3$ .

**Remarque 2.19.** – Les figures 2.1-2.3 révèlent que pour  $\gamma > 0$  et  $0 < q < 1$ , la solution numérique explose en un temps fini en tous les noeuds, ce qui correspond à l'explosion sur l'espace tout entier.

– Les figures 2.4-2.9 montrent que pour  $\gamma > 0$  et  $q > 1$ , la solution numérique explose bien en un temps fini au premier noeud, c'est-à-dire en  $x_0 = 0$ .

Ces deux observations sont en accord avec les résultats théoriques établis (voir [34, 41]).

# Étude du temps d'explosion d'une équation de diffusion non linéaire avec conditions de neumann aux bords

## 3.1 Présentation du problème continu (4.1)-(4.3)

Considérons l'EDP parabolique suivante :

$$(u^m)_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

soumise aux conditions aux bords de Neumann

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u^q(1, t), \quad t > 0, \quad (3.2)$$

et à la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.3)$$

où  $m > 0$ ,  $q > 0$  sont des paramètres donnés et  $u_0$  est une fonction strictement positive vérifiant les conditions de régularité et de compatibilité suivantes :

$$\text{pour tout } 0 < \alpha < 1, u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}([0, 1]) \text{ et } u'_0(0) = 0, \quad u'_0(1) = u_0^q(1). \quad (3.4)$$

L'équation (3.1) peut être réécrite sous la forme

$$u_t(x, t) = \frac{1}{m} u^{1-m}(x, t) u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (3.5)$$



Pour  $m = 1$ , l'équation (3.1) devient l'équation bien connue sous le nom d'équation de la chaleur. Pour  $0 < m < 1$ , (3.1) est appelée équation en milieu poreux ou équation de diffusion lente et pour  $m > 1$ , (3.1) est appelée équation de diffusion rapide.

Les adjectifs "lente" et "rapide" qui caractérisent la diffusion viennent du comportement du coefficient de diffusion  $u^{1-m}$  lorsque  $u$  tend vers zéro.

En posant  $v = u^m$  et  $r = 1/m$ , l'équation (3.1) devient

$$v_t = (v^r)_{xx}. \quad (3.6)$$

Ainsi, pour  $r > 1$ , l'équation (3.6) est appelée équation en milieu poreux. Lorsque  $0 < r < 1$ , elle est connue sous le nom d'équation de diffusion rapide et pour  $r = 1$ , on retrouve l'équation de la chaleur. Les équations en milieux poreux ont beaucoup été étudiées théoriquement [22, 48, 58, 67] et les livres [16, 60, 61]. Elles interviennent dans la modélisation de phénomènes physiques, principalement pour décrire des processus impliquant un écoulement de fluide, un transfert de chaleur ou une diffusion. La plus connue est certainement la description de l'écoulement d'un gaz isotrope dans un milieu poreux, modélisé indépendamment par Leibenzon [45] et Muskat [49] vers 1930. Une application antérieure portant sur l'infiltration des eaux souterraines a été faite par Boussinesq [9] en 1903. Une autre application importante concerne le rayonnement thermique dans les plasmas, développé par Zel'dovich et al. [66] vers 1950. D'autres applications ont été proposées dans la biomathématique (ensemble des méthodes et techniques mathématiques, numériques et informatiques qui permettent d'étudier et de modéliser les phénomènes et processus biologiques), la propagation des fluides visqueux et d'autres domaines.

### 3.1.1 Existence et unicité de la solution du problème continu

**Théorème 3.1.** [22] Soient  $m > 0$  et  $0 < q < +\infty$ . Supposons que la donnée initiale  $u_0$  en (3.3) vérifie l'hypothèse (3.4). Alors il existe un temps maximal  $T_{\max} > 0$  tel que le problème continu (3.1)-(3.3) ait une unique solution classique  $u \in \mathcal{C}^{2,1}([0, 1] \times [0, T_{\max}[)$ .

De plus,  $u(x, t) > 0$  pour tout  $(x, t) \in [0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ .

### 3.1.2 Quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu

**Lemme 3.2.** Soient  $u$  la solution du problème continu (3.1)-(3.3) et  $T_{\max}$  son temps d'existence maximal. On suppose que la condition initiale  $u_0$  en (3.3) satisfait

$u'_0 \geq 0$  et  $u''_0 \geq 0$  dans  $[0, 1]$ . Alors,

$$1) \quad u_x \geq 0 \text{ dans } [0, 1] \times ]0, T_{\max}[;$$

$$2) \quad u_t \geq 0 \text{ dans } [0, 1] \times ]0, T_{\max}[.$$

*Démonstration.* Il suffit d'écrire le problème (3.1)-(3.3) sous la forme suivante :

$$u_t(x, t) = \frac{1}{m} u^{1-m}(x, t) u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (3.7)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u^q(1, t), \quad t > 0, \quad (3.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.9)$$

et de suivre la méthode utilisée dans la preuve du Lemme 2.3. □

### 3.1.3 Explosion en temps fini et ensemble d'explosion de la solution du problème continu

**Théorème 3.3.** [22] Soit  $u$  la solution du problème continu (3.1)-(3.3) associée à la donnée initiale  $u_0$  en (3.3) telle que  $u'_0 \geq 0$  et  $u''_0 \geq 0$ . Alors  $u$  explose en un temps fini  $T_b$  si  $0 < m < 1$  et  $q > m$  ou si  $m > 1$  et  $2q > m + 1$ .

**Théorème 3.4.** [22] Supposons que la solution  $u$  du problème (3.1)-(3.3) explose en un temps fini  $T_b$ . Alors l'ensemble d'explosion de  $u$  est :

$$1) \quad [0, 1] \text{ si } 0 < m < q \leq 1;$$

$$2) \quad \text{le singleton } \{1\} \text{ si } 0 < m < 1 < q \text{ ou si } 1 < m < q.$$

## 3.2 Étude numérique du problème (3.1)-(3.3)

### 3.2.1 Construction du schéma semi-discret

Soit  $T$  un réel strictement positif tel que  $[0, T]$  est un intervalle de temps sur lequel la solution  $u$  du problème continu (3.1)-(3.3) est définie. Nous utilisons la même méthode et la même subdivision que celles de la sous section 2.2.1 du Chapitre 2 pour obtenir le schéma semi-discret en espace (3.10)-(3.12) ci-dessous :

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \frac{1}{m} U_i^{1-m}(t) \delta^2 U_i(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad (3.10)$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t) \left( \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t) \right), \quad (3.11)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I. \quad (3.12)$$

Notons

$$\delta_{2*}^2 U_i(t) = \begin{cases} \delta^2 U_i(t) & \text{si } i = 0, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t) & \text{si } i = I. \end{cases}$$

### 3.2.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret (3.10)-(3.12)

**Théorème 3.5.** *Le problème semi-discret (3.10)-(3.12) admet une unique solution maximale  $([0, T_{\max}^h[, U_h(\cdot))$ , où  $T_{\max}^h > 0$  désigne le temps d'existence maximale de la solution maximale  $U_h$ .*

*Démonstration.* Le problème semi-discret (3.10)-(3.12) est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{dU_i(t)}{dt} &= \frac{1}{m} U_i^{1-m}(t) \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ \frac{dU_0(t)}{dt} &= \frac{1}{m} U_0^{1-m}(t) \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \\ \frac{dU_I(t)}{dt} &= \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t) \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_I^{1-m+q}(t), \\ U_i(0) &= \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

On considère la fonction  $F$  de la variable  $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_I(t))^T$  définie sur  $\mathbb{R}^{I+1}$  par

$$F(X(t)) = (f_0(X(t)), f_1(X(t)), \dots, f_I(X(t)))^T,$$

où

$$\begin{aligned} f_i(X) &= \frac{1}{m} X_i^{1-m}(t) \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_0(X) &= \frac{1}{m} X_0^{1-m}(t) \frac{2X_1(t) - 2X_0(t)}{h^2}, \\ f_I(X) &= \frac{1}{m} X_I^{1-m}(t) \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} X_I^{1-m+q}(t), \\ X_i(0) &= \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

La fonction  $F$  ainsi définie est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{I+1}$ . En vertu du Théorème A.10 (annexe), le problème semi-discret (3.10)-(3.12) admet une unique solution maximale définie sur  $[0, T_{\max}^h[$ .  $\square$

### 3.2.3 Propriétés du schéma semi-discret (3.10)-(3.12)

**Lemme 3.6.** Soit  $U_h$  la solution du problème semi-discret (3.10)-(3.12). Alors

$$U_i(t) > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Le problème semi-discret (3.10)-(3.12) peut être réécrit comme suit :

$$\frac{d(U_i^m(t))}{dt} = \delta^2 U_i(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad t \in ]0, T_{\max}^h[, \quad (3.13)$$

$$\frac{d(U_I^m(t))}{dt} = \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t), \quad t \in ]0, T_{\max}^h[, \quad (3.14)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I. \quad (3.15)$$

Puisque la fonction  $U_i$  est continue sur  $[0, T_{\max}^h[$  pour tout  $i = 0, \dots, I$  et  $U_i(0) = \varphi_i > 0$ , alors supposons  $t_0$  le premier  $t \in ]0, T_{\max}^h[$  tel que  $U_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ ,  $0 \leq i \leq I$ , mais  $U_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'égalité ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d(U_{i_0}^m(t_0))}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_{i_0}^m(t_0) - U_{i_0}^m(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &> 0. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \frac{d(U_{i_0}^m(t_0))}{dt} - \delta^2 U_{i_0}(t_0) &< 0 \quad \text{si } 0 \leq i_0 \leq I-1, \\ \frac{d(U_I^m(t_0))}{dt} - \delta^2 U_I(t_0) - \frac{2}{h} U_I^q(t_0) &< 0 \quad \text{si } i_0 = I, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec (3.13)-(3.14) et on obtient le résultat souhaité.  $\square$

**Lemme 3.7.** Soit  $U_h$  la solution de (3.10)-(3.12) associée à la condition initiale  $\varphi_h$  en (3.12) telle que  $\delta_{2*}^2 \varphi_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Alors,

$$\frac{dU_i(t)}{dt} \geq 0 \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Fixons  $T_0 < T_{\max}^h$ . Soit le vecteur  $W_h(t)$  tel que  $W_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}$  pour

$0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_0]$ . Alors on a :

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{m}U_i^{1-m}(t)\delta^2W_i(t) + \frac{1-m}{m}U_i^{-m}(t)\delta^2U_i(t)W_i(t), \quad 0 \leq i \leq I-1, \quad (3.16)$$

$$\frac{dW_I(t)}{dt} = \frac{1}{m}U_I^{1-m}(t)\delta^2W_I(t) + \left( \frac{1-m}{m}U_I^{-m}(t)\delta^2U_I(t) + \frac{2(1-m+q)}{mh}U_I^{q-m}(t) \right) W_I(t). \quad (3.17)$$

Prenons  $K$  une constante positive satisfaisant

$$K > \max_{0 \leq i \leq I-1, 0 \leq t \leq T_0} \left\{ \left| \frac{1-m}{m}U_i^{-m}(t)\delta^2U_i(t) \right| \right\} \quad \text{et}$$

$$K > \max_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ \left| \frac{1-m}{m}U_I^{-m}(t)\delta^2U_I(t) \right| + \frac{2|1-m+q|}{mh}U_I^{q-m}(t) \right\}.$$

Considérons maintenant le vecteur  $Z_h(t) = W_h(t)e^{-Kt}$ . Il est clair que  $Z_h(0) \geq 0$  car  $W_h(0) \geq 0$ . Soit  $t_0$  le premier  $t \in ]0, T_0]$  tel que  $Z_i(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'inégalité ci-dessus. On a

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad (3.18)$$

$$\delta^2Z_{i_0}(t_0) > 0. \quad (3.19)$$

Des relations (3.16), (3.17) et (3.19), nous montrons que

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} > \left( \frac{1-m}{m}U_{i_0}^{-m}(t_0)\delta^2U_{i_0}(t_0) - K \right) Z_{i_0}(t_0) > 0 \quad \text{si } 0 \leq i_0 \leq I-1,$$

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} > \left( \frac{1-m}{m}U_I^{-m}(t_0)\delta^2U_I(t_0) + \frac{2(1-m+q)}{mh}U_I^{q-m}(t_0) - K \right) Z_I(t_0) > 0 \quad \text{si } i_0 = I,$$

ce qui est en contradiction avec (3.18) et le lemme est démontré.  $\square$

**Lemme 3.8.** Soit  $U_h$  la solution de (3.10)-(3.12) associée à la donnée initiale  $\varphi_h$  en (3.12) telle que  $\varphi_i < \varphi_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ . Alors,

$$U_i(t) < U_{i+1}(t) \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq I-1, t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Posons  $Z_i(t) = U_i(t) - U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,  $t \in [0, T_{\max}^h[$ . Chaque  $Z_i$  étant continue sur  $[0, T_{\max}^h[$ , soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $Z_i(t) < 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ , mais  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I-1\}$ . Supposons sans perte de généralité que

$i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'égalité ci-dessus. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \geq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &< 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Un calcul simple conduit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \frac{1}{m} U_{i_0+1}^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + \frac{1}{m} (U_{i_0}^{1-m}(t_0) - U_{i_0+1}^{1-m}(t_0)) \delta^2 U_{i_0}(t_0) \quad \text{si } 0 \leq i_0 \leq I-2, \\ &= \frac{1}{m} U_{i_0+1}^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0, \\ \frac{dZ_{I-1}(t_0)}{dt} &= \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{I-1}(t_0) + \frac{1}{m} (U_{I-1}^{1-m}(t_0) - U_I^{1-m}(t_0)) \delta^2 U_{I-1}(t_0) \\ &\quad - \frac{2}{mh} U_I^{1-m+q}(t_0) \quad \text{si } i_0 = I-1, \\ &= \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{I-1}(t_0) - \frac{2}{mh} U_I^{1-m+q}(t_0) < 0, \end{aligned}$$

qui sont en contradiction avec (3.20), d'où le lemme.  $\square$

### 3.2.4 Convergence de la solution du problème semi-discret (3.1)-(3.3)

**Théorème 3.9.** Soit  $T > 0$ . Supposons que le problème continu (3.1)-(3.3) a une solution  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  et la condition initiale  $\varphi_h$  en (3.12) satisfait

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

où  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Alors, pour  $h$  suffisamment petit, le problème semi-discret (3.10)-(3.12) a une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telle que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Se référer à la preuve du Théorème 2.12  $\square$

### 3.2.5 Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret (3.1)-(3.3)

Le théorème suivant donne des conditions sous lesquelles la solution du problème semi-discret (3.10)-(3.12) explose en temps fini et la convergence du temps d'explosion numérique vers celui du problème continu.

**Théorème 3.10.** Soit  $0 < m < q \leq 1$  ou  $0 < m < 1 < q$  ou  $1 < m < q$ . Si le problème continu (3.1)-(3.3) a une solution  $u$  dans  $\mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T_b[)$  qui explose au temps fini  $T_b$  et que la donnée initiale  $\varphi_h$  en (3.12) vérifie  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  quand  $h \rightarrow 0$ , alors la solution  $U_h$  de (3.10)-(3.12) explose en un temps fini  $T_h$  pour  $h$  suffisamment petit. De plus, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b.$$

*Démonstration.* Définissons la fonctionnelle  $J[u]$  comme suit :

$$J[u](t) = \int_0^1 u^m(x, t) dx, \quad t \in [0, T_b[.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dJ[u](t)}{dt} &= \int_0^1 (u^m)_t(x, t) dx \\ &= \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx \\ &= u^q(1, t) \\ &\geq \int_0^1 u^q(x, t) dx, \\ &\geq \left( \int_0^1 u^m(x, t) dx \right)^{\frac{q}{m}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ainsi,  $\frac{dJ[u](t)}{dt} \geq (J[u](t))^{q/m}$ .

Posons  $H(t) = \frac{1}{2} u^q(1, t)$ ,  $t \in [0, T_b[$ .

D'après (3.21),  $\frac{dJ[u](t)}{dt} \geq H(t)$  pour tout  $t \in [0, T_b[$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow T_b} H(t) = +\infty$  car  $x = 1$  est toujours un point d'explosion.

Soient  $J_h[U_h]$  et  $H_h$  des approximations numériques de  $J[u]$  et  $H$  respectivement, définies par :

$$J_h[U_h](t) = \sum_{i=0}^I h U_i^m(t) \tag{3.22}$$

$$H_h(t) = \frac{1}{2} U_I^q(t). \tag{3.23}$$

Cherchons à minorer la dérivée de  $J_h[U_h]$ .

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} &= h \sum_{i=0}^I \frac{dU_i^m(t)}{dt} \\
&= h \left[ \delta^2 U_0(t) + \left( \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t) \right) + \sum_{i=1}^{I-1} \delta^2 U_i(t) \right] \\
&= h \left( \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_I^q(t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} \right) \\
&= h \left( \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_I^q(t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h^2} - \sum_{i=1}^{I-1} \frac{U_i(t) - U_{i-1}(t)}{h^2} \right) \\
&= h \left( \frac{1}{2} \delta_{2*}^2 U_0(t) + \frac{1}{2} \delta_{2*}^2 U_I(t) + \frac{1}{h} U_I^q(t) \right) \\
&\geq U_I^q(t) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^q(t) \\
&\geq \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^q(t). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

L'application de la forme discrète de l'inégalité de Jensen permet d'obtenir

$$\sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^q(t) \geq \left( \frac{1}{I+1} \right)^{\frac{q}{m}} \left( \sum_{i=0}^I h U_i^m(t) \right)^{\frac{q}{m}} = \left( \frac{1}{I+1} \right)^{\frac{q}{m}} (J_h[U_h](t))^{\frac{q}{m}}.$$

Ainsi, (3.25) devient

$$\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} \geq \left( \frac{1}{I+1} \right)^{\frac{q}{m}} (J_h[U_h](t))^{\frac{q}{m}}. \tag{3.26}$$

De (3.24), nous avons  $\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} \geq H_h(t)$ . De plus,  $\frac{dH_h(t)}{dt} = \frac{q}{2} U_I^{q-1}(t) \frac{dU_I(t)}{dt} \geq 0$ .

Posons

$$G(s) = \left( \frac{1}{I+1} \right)^{\frac{q}{m}} s^{q/m}.$$



D'après (3.26), on a  $\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} \geq G(J_h[U_h](t))$ , et il existe  $s_0 > 0$  tel que

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{pour } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds}{G(s)} < +\infty & \text{car } \frac{q}{m} > 1. \end{cases}$$

Montrons maintenant que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

Pour la première limite, il suffit d'introduire la somme de Riemann  $S_h(u^m(\cdot, t)) = \sum_{i=1}^I hu^m(x_i, t)$  et d'utiliser l'inégalité triangulaire. Ce qui nous donne

$$|J[u](t) - J_h[U_h](t)| \leq |J[u](t) - S_h(u^m(\cdot, t))| + |S_h(u^m(\cdot, t)) - J_h[U_h](t)|.$$

Chaque membre de droite de l'inégalité précédente tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro pour tout  $t \in [0, T_b - \epsilon]$  (voir page 32).

Pour la deuxième limite, on a pour tout  $\epsilon > 0$  et  $t \in [0, T_b - \epsilon]$ ,

$$\begin{aligned} |H(t) - H_h(t)| &= \frac{1}{2} |u^q(1, t) - U_I^q(t)| \\ &= \frac{q}{2} \xi^{q-1}(t) |u(1, t) - U_I(t)| \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $\xi(t)$  est une valeur intermédiaire entre  $u(1, t)$  et  $U_I(t)$ . Le membre de droite de l'égalité (3.27) tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro en vertu du Théorème 3.9. Grâce au Théorème A.12 (annexe), on conclut que  $U_h$  explose en un temps fini  $T_h$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b$ .  $\square$

### 3.2.6 Taux et ensemble d'explosion

**Théorème 3.11.** Soit  $q > \max\{1, m\}$ . Sous les hypothèses des lemmes 3.7 et 3.8, on a pour  $t$  suffisamment proche de  $T_h$ ,

$$U_I(t) \sim (T_h - t)^{-1/(q-m)}$$

au sens qu'il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$C_1(T_h - t)^{-1/(q-m)} \leq U_I(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(q-m)}$$

*Démonstration.* Nous savons que  $U_{I-1}(t) < U_I(t)$ , alors de la relation (3.11) nous tirons

l'inégalité suivante

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \leq \frac{2}{mh} U_I^{1+q-m}(t).$$

En intégrant cette inégalité de  $t$  à  $T_h$ , on obtient

$$C_1(T_h - t)^{-1/(q-m)} \leq U_I(t),$$

$$\text{où } C_1 = \left( \frac{2(q-m)}{mh} \right)^{-1/(q-m)}.$$

Nous tirons aussi de la relation (3.11) ce qui suit

$$\begin{aligned} \frac{dU_I(t)}{dt} &= \frac{1}{m} \left( U_I^{-q}(t) \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} \right) U_I^{1-m+q}(t) \\ &= \frac{2}{mh} \left( 1 - \frac{U_I^{1-q}(t)}{h} \left( 1 - \frac{U_{I-1}(t)}{U_I(t)} \right) \right) U_I^{1-m+q}(t) \end{aligned}$$

Nous savons que  $\left( 1 - \frac{U_{I-1}(t)}{U_I(t)} \right) \in ]0, 1[$  et  $\left( 1 - \frac{\varphi_{I-1}}{\varphi_I} \right) \in ]0, 1[$ . Puisque  $q > 1$  et  $U_h$  explose seulement au noeud  $x_I$ , alors il existe  $0 \leq T_0 < T_h$  tel que pour tout  $t \in [T_0, T_h[$ ,  $U_I^{1-q}(t) \left( 1 - \frac{U_{I-1}(t)}{U_I(t)} \right) \leq \varphi_I^{1-q} \left( 1 - \frac{\varphi_{I-1}}{\varphi_I} \right)$ . Ainsi, pour tout  $t \in [T_0, T_h[$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{dU_I(t)}{dt} &= \frac{2}{mh} \left( 1 - \frac{U_I^{1-q}(t)}{h} \left( 1 - \frac{U_{I-1}(t)}{U_I(t)} \right) \right) U_I^{1-m+q}(t) \\ &\geq \frac{2}{mh} \left( 1 - \frac{\varphi_I^{1-q}}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_{I-1}}{\varphi_I} \right) \right) U_I^{1-m+q}(t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nous obtenons  $1 - \frac{\varphi_I^{1-q}}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_{I-1}}{\varphi_I} \right) > 0$  grâce à l'hypothèse  $\delta_{2*}^2 \varphi_I > 0$ .

Posons

$$C_I = \frac{2}{mh} \left( 1 - \frac{\varphi_I^{1-q}}{h} \left( 1 - \frac{\varphi_{I-1}}{\varphi_I} \right) \right).$$

L'inégalité (3.28) devient

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \geq C_I U_I^{1-m+q}(t).$$

D'où

$$\frac{dU_I(t)}{U_I^{1-m+q}(t)} \geq C_I dt.$$

En intégrant cette inégalité de  $t$  à  $T_h$ , on obtient

$$U_I(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(q-m)}, \quad (3.29)$$

avec  $C_2 = [(q-m)C_I]^{-1/(q-m)}$ . □

**Théorème 3.12.** Soit  $q > 1$ . Pour  $h$  suffisamment petit, l'ensemble d'explosion de la solution du problème semi-discret (3.10)-(3.12) coïncide avec celui du problème continu (3.1)-(3.3).

*Démonstration.* Se référer à la Remarque 2.17. □

### 3.2.7 Résultats numériques

Dans cette sous section, nous présentons des résultats numériques consignés dans des tableaux et aussi sous forme graphiques pour différentes valeurs des paramètres  $m$  et  $q$ . Puis nous ferons quelques remarques au vu de ces résultats.

Par la méthode de la transformation de la longueur d'arc, nous transformons le schéma semi-discret (3.10)-(3.12) au système d'EDO non singulier suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \ell < +\infty, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I, \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{mh^2} U_0^{1-m} (U_1 - U_0), \\ f_i &= \frac{1}{mh^2} U_i^{1-m} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_I &= \frac{2}{mh^2} U_I^{1-m} (U_{I-1} - U_I + hU_I^q). \end{aligned}$$

À l'instar du chapitre précédent (Chapitre 2 page 39), nous avons à définir pour les simulations, certains paramètres. Ainsi, nous prenons

$$AbsTol = RelTol = 10^{-15}, \quad InitialStep = 0,$$

la suite géométrique

$$\ell_j = 2^{10} \cdot 2^j, \quad j = 0, \dots, 12$$

et la donnée initiale

$$\varphi_i = 0.5 * (i * h)^2 + 0.5, \quad 0 \leq i \leq I.$$

**Tableaux et graphiques obtenus avec le schéma semi-discret (3.10)-(3.12)**

Dans les tableaux ci-après de ce chapitre, nous présentons en lignes, les temps d'explosion numériques et le nombre d'itérations nécessaires pour l'explosion numérique correspondant aux maillages  $I$ .

**Premier cas :**  $0 < m < q \leq 1$  (Explosion sur l'espace tout entier).

TABLEAU 3.1 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $m = 0,5$ ;  $q = 0,9$

$I$	$T_h$	$n$
16	1,116 774 883	63522
32	1,116 616 203	120086
64	1,116 576 512	233503
128	1,116 566 594	535576
256	1,116 564 124	1851197

TABLEAU 3.2 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $m = 0,5$ ;  $q = 1$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,830 207 596	3667
32	0,829 975 052	13669
64	0,829 916 864	53745
128	0,829 902 313	211469
256	0,829 898 676	828888

TABLEAU 3.3 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $m = 0,6$ ;  $q = 0,9$

$I$	$T_h$	$n$
16	1,751 974 388	62880
32	1,751 684 213	118790
64	1,751 611 687	230819
128	1,751 593 637	528135
256	1,751 589 255	1820658

**Deuxième cas :**  $0 < m < 1 < q$  (Explosion au bord  $x = 1$ ).

TABLEAU 3.4 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $m = 0,5; q = 2$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,143 979 587	5441
32	0,142 837 935	9658
64	0,142 521 477	17854
128	0,142 436 825	33966
256	0,142 414 680	66908
512	0,142 408 969	153443
1024	0,142 407 511	486550

TABLEAU 3.5 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $m = 0,5; q = 2,1$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,130 387 222	5001
32	0,129 214 965	8855
64	0,128 886 685	16339
128	0,128 798 137	31033
256	0,128 774 815	60981
512	0,128 768 768	138240
1024	0,128 767 217	432730

TABLEAU 3.6 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $m = 0,6; q = 2$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,175 990 789	5477
32	0,174 393 717	9618
64	0,173 942 934	17675
128	0,173 820 408	33520
256	0,173 787 910	65900
512	0,173 779 431	150604
1024	0,173 777 244	475987

**Troisième cas :**  $1 < m < q$  (Explosion au bord  $x = 1$ ).

TABLEAU 3.7 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $m = 1, 1; q = 2, 1$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,326 266 745	5215
32	0,319 660 682	8695
64	0,317 531 962	15498
128	0,316 872 431	28888
256	0,316 673 620	56122
512	0,316 614 882	126894
1024	0,316 597 792	407399

TABLEAU 3.8 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $m = 1, 2; q = 2, 1$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,367 246 317	5220
32	0,358 539 837	8648
64	0,355 642 071	15352
128	0,354 712 759	28547
256	0,354 422 307	55374
512	0,354 333 209	128458
1024	0,354 306 260	426901

TABLEAU 3.9 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $m = 1, 1; q = 2$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,367 306 599	5577
32	0,360 220 365	9375
64	0,357 936 256	16800
128	0,357 227 601	31424
256	0,357 013 541	61244
512	0,356 950 138	140209
1024	0,356 931 638	455441

**Remarque 3.13.** Les tableaux 3.1-3.9 mettent en évidence le rapport qui existe entre le temps d'explosion numérique  $T_h$  et les paramètres  $m$  et  $q$ . En effet, lorsque le paramètre  $m$  croît, le temps d'explosion augmente donc l'explosion est retardée (pour le premier cas : tableaux 3.1 et 3.3 ; pour le deuxième cas : tableaux 3.4 et 3.6 ; pour le troisième cas : tableaux 3.7 et 3.8) tandis qu'il diminue quand  $q$  croît. L'explosion est alors accélérée (pour le premier cas : tableaux 3.1 et 3.2 ; pour le deuxième cas : tableaux 3.4 et 3.5 ; pour le troisième cas : tableaux 3.9 et 3.7).

Nous disposons aussi de graphiques pour illustrer nos différents résultats.

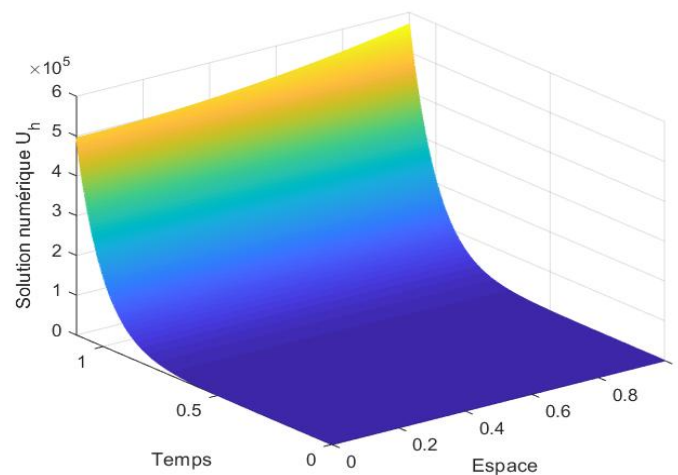


FIGURE 3.1 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 64$ ;  $m = 0,5$ ;  $q = 0,9$  (cas où  $0 < m < q \leq 1$ ).

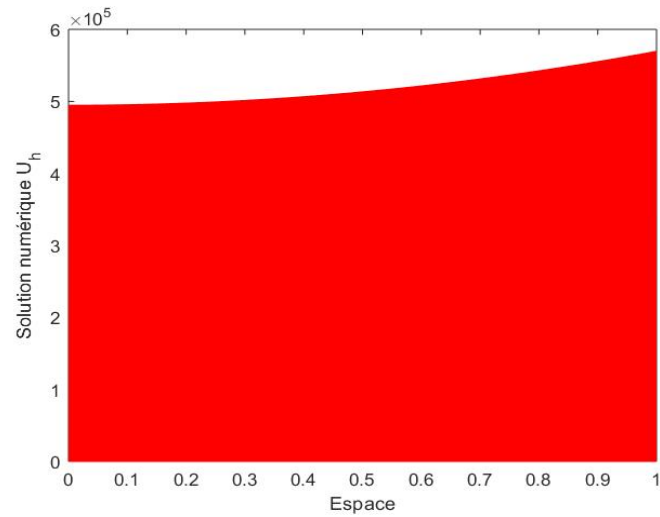


FIGURE 3.2 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 64$ ;  $m = 0,5$ ;  $q = 0,9$  (cas où  $0 < m < q \leq 1$ ).

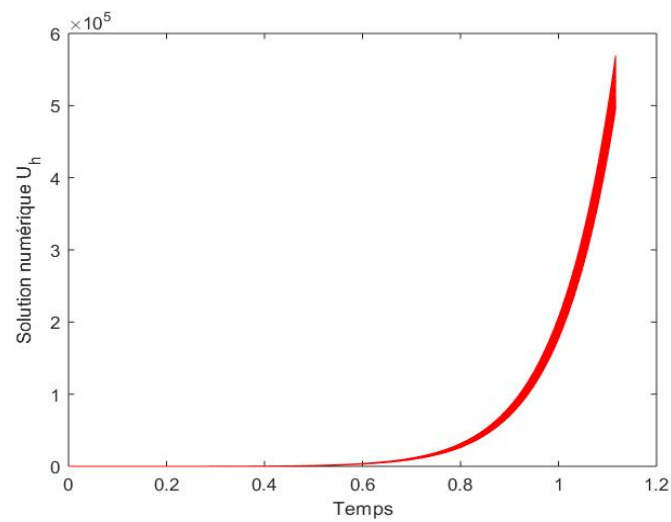


FIGURE 3.3 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 64$ ;  $m = 0,5$ ;  $q = 0,9$  (cas où  $0 < m < q \leq 1$ ).



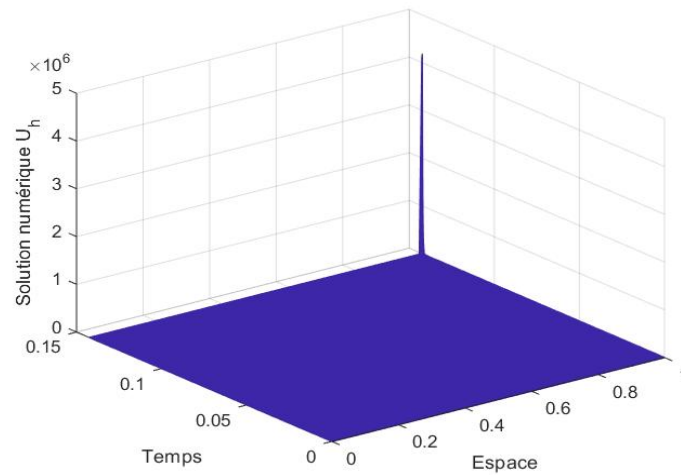


FIGURE 3.4 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 128$ ;  $m = 0,5$ ;  $q = 2$  (cas où  $0 < m < 1 < q$ ).

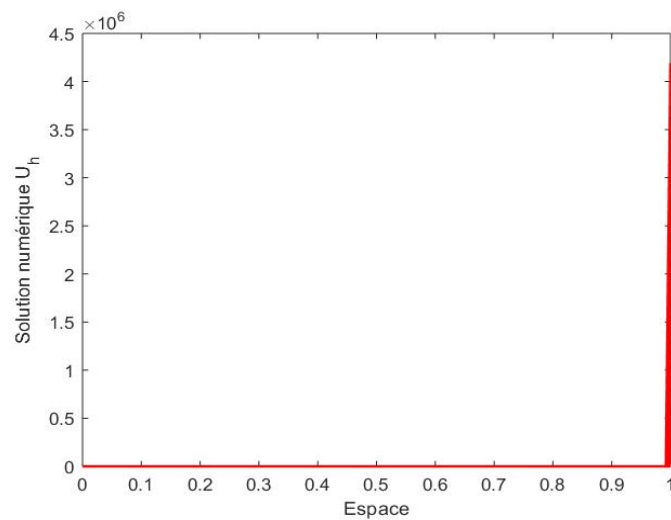


FIGURE 3.5 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 128$ ;  $m = 0,5$ ;  $q = 2$  (cas où  $0 < m < 1 < q$ ).

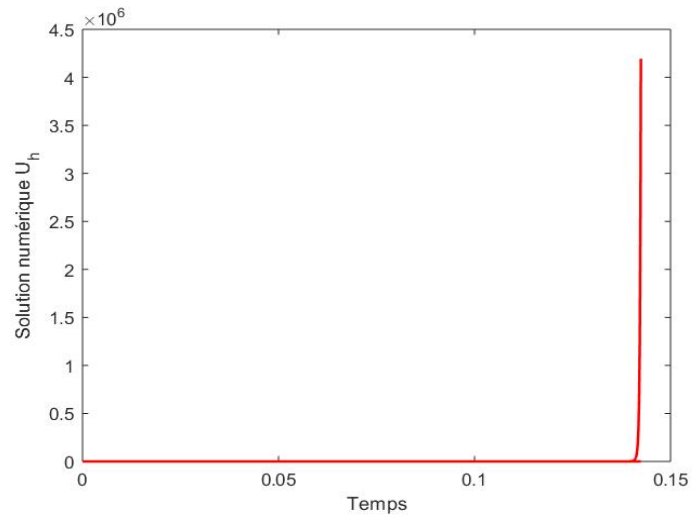


FIGURE 3.6 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 128$ ;  $m = 0,5$ ;  $q = 2$  (cas où  $0 < m < 1 < q$ ).

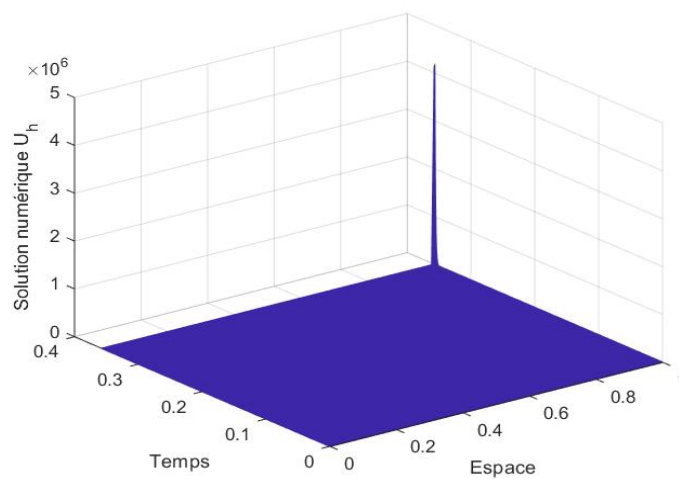


FIGURE 3.7 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 128$ ;  $m = 1,1$ ;  $q = 2$  (cas où  $1 < m < q$ ).

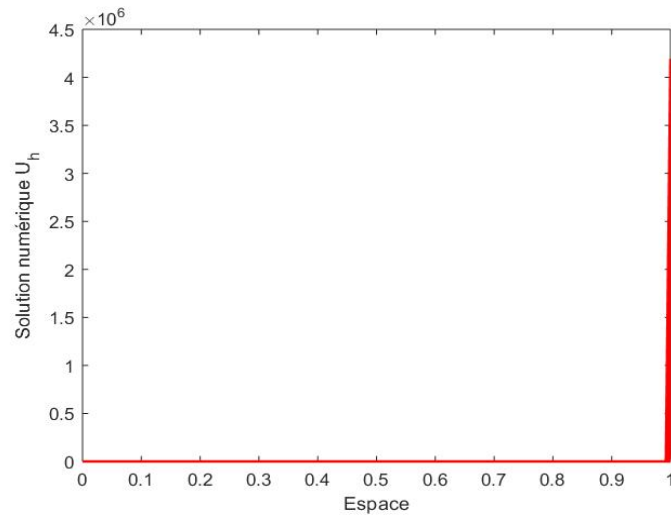


FIGURE 3.8 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 128$ ;  $m = 1, 1$ ;  $q = 2$  (cas où  $1 < m < q$ ).

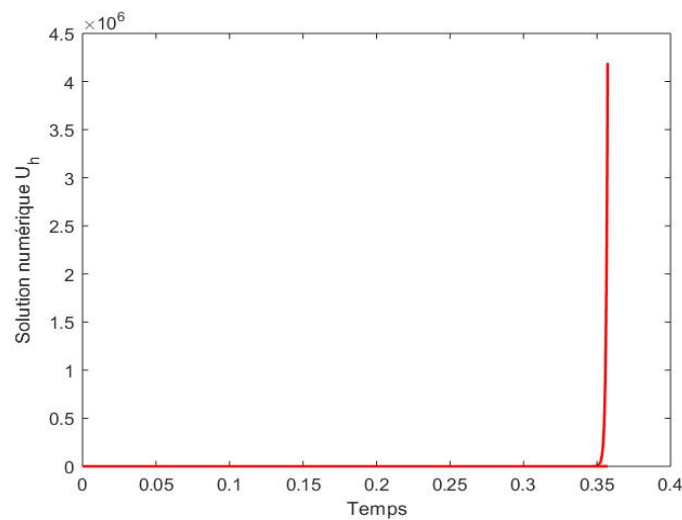


FIGURE 3.9 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 128$ ;  $m = 1, 1$ ;  $q = 2$  (cas où  $1 < m < q$ ).

**Remarque 3.14.** – Les figures 3.1-3.3 mettent en exergue l'explosion en temps fini de la solution numérique en tous les noeuds lorsque  $0 < m < q \leq 1$ , on a donc l'explosion sur l'espace tout entier.

– Nous observons aussi des figures 3.4-3.9 que la solution numérique explose en temps fini au noeud  $x_I = 1$  pour  $0 < m < 1 < q$  et  $1 < m < q$ .

Ces deux observations sont en accord avec les résultats théoriques établis (voir [22]).

# Étude du temps d'explosion d'une équation semi-linéaire avec conditions de Neumann aux bords

## 4.1 Présentation du problème continu (4.1)-(4.3)

Considérons l'EDP parabolique suivante :

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - \lambda u^p(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (4.1)$$

soumise aux conditions aux bords de Neumann

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u^q(1, t), \quad t > 0, \quad (4.2)$$

et à la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$

où  $p > 1$ ,  $q > 1$  et  $\lambda > 0$  sont des paramètres donnés, et  $u_0$  est une fonction strictement positive telle que  $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}([0, 1])$ ,  $0 < \alpha < 1$  et vérifiant les conditions de compatibilité suivantes :

$$u'_0(0) = 0 \text{ et } u'_0(1) = u_0^q(1). \quad (4.4)$$

### 4.1.1 Existence et unicité de la solution du problème continu

**Théorème 4.1.** [32] Soient  $0 < \alpha < 1$  et la donnée initiale  $u_0$  en (4.3) vérifie  $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}([0, 1])$  et l'hypothèse de compatibilité (4.4). Alors il existe un temps maximal  $T_{\max} > 0$  tel que le

problème continu (4.1)-(4.3) ait une unique solution  $u \in \mathcal{C}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}([0, 1] \times [0, T_{\max}[[$ ).  
De plus, si  $u_0 \geq 0$  alors  $u(x, t) \geq 0$  pour tout  $(x, t) \in [0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ .

### 4.1.2 Quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu

Dans cette sous section, nous donnons la définition d'une sous- et sur-solution, un lemme de comparaison et quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu (4.1)-(4.3).

**Définition 4.2.** (Sous- et sur-solution)

On dit que  $\mu$  est une sous-solution (resp. sur-solution) du problème continu (4.1)-(4.3) si  $\mu$  satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_t(x, t) - \mu_{xx}(x, t) &\leq (\text{resp. } \geq) -\lambda\mu^p(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ \mu_x(0, t) &\leq (\text{resp. } \geq) 0, \mu_x(1, t) \leq (\text{resp. } \geq) \mu^q(1, t), & t > 0, \\ \mu(x, 0) &\leq (\text{resp. } \geq) u_0(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

**Lemme 4.3.** Soient  $T > 0$ ,  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{2,1}([0, 1] \times ]0, T[)$  vérifiant

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + \lambda u^p &\leq v_t - v_{xx} + \lambda v^p && \text{dans } [0, 1] \times ]0, T[ \\ u_x &\leq v_x && \text{sur } \{0, 1\} \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) &\leq v(\cdot, 0) && \text{dans } [0, 1]. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$u \leq v \text{ dans } [0, 1] \times ]0, T[.$$

*Démonstration.* Se référer au Théorème A.1 (annexe) issu des travaux de Von Below [62]. □

**Remarque 4.4.** Il ressort de la Définition 4.2 et du Lemme 4.3 que si  $u_1$  et  $u_2$  sont respectivement sous-solution et sur-solution du problème (4.1)-(4.3), alors  $u_1 \leq u_2$ .

**Lemme 4.5.** Soient  $u$  la solution du problème continu (4.1)-(4.3) et  $T_{\max}$  son temps d'existence maximal. On suppose que la condition initiale  $u_0$  en (4.3) satisfait

$u_0 > 0$ ,  $u'_0 \geq 0$  et  $u''_0 - \lambda u_0^p > 0$  dans  $[0, 1]$ . Alors, on a :

- 1)  $u > 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ ;

- 2)  $u_x \geq 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ ;
- 3)  $u_t \geq 0$  dans  $[0, 1] \times ]0, T_{\max}[$ .

*Démonstration.* La fonction  $u_0$  est une sous-solution du problème (4.1)-(4.3). En utilisant la Remarque 4.4, on obtient  $u \geq u_0 > 0$ , d'où 1).

Le 2) et le 3) ont été prouvés dans [12] et [32]. □

### 4.1.3 Explosion en temps fini et ensemble d'explosion de la solution du problème continu

Considérons le problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} u_{xx} = \lambda u^p, & \text{dans } [0, a], a > 0, \\ u_x(0) = 0, u_x(1) = u^q(1). \end{cases} \quad (4.5)$$

**Théorème 4.6.** [32] Soient  $\lambda > 0$ ,  $p > 1$  et  $q > 1$ . Alors,

- 1) pour  $p < q$ , le problème (4.5) admet une unique solution positive  $u_\lambda$ ;
- 2) pour  $p = q$ ,
  - (i) si  $\lambda \leq a^{-1}$ , le problème (4.5) n'admet pas de solution;
  - (ii) si  $\lambda > a^{-1}$ , (4.5) admet une unique solution positive  $u_\lambda$ ;
- 3) pour  $q < p < 2q - 1$ , il existe  $\kappa > 0$  dépendant de  $p, q$  et  $a$  tel que
  - (i) si  $\lambda < \kappa$ , le problème (4.5) n'a pas de solution;
  - (ii) si  $\lambda = \kappa$ , le problème (4.5) admet une unique solution positive  $u_\lambda$ ;
  - (iii) si  $\lambda > \kappa$ , (4.5) admet deux solutions positives  $u_\lambda^1 > u_\lambda^2$ ;
- 4) pour  $p = 2q - 1$ ,
  - (i) si  $\lambda \leq q$ , (4.5) n'a pas de solution;
  - (ii) si  $\lambda > q$ , (4.5) admet une unique solution positive  $u_\lambda$ .

**Théorème 4.7.** [32] Soit  $u$  la solution du problème continu (4.1)-(4.3) associée à la donnée initiale  $u_0 \in \mathcal{C}^{2+\alpha}([0, 1])$ . Alors  $u$  explose en un temps fini  $T_b$  dans les cas suivants :

- 1)  $p < q$  et  $u_0 > u_\lambda$ ;
- 2)  $p = q$ ,  $\lambda < 1$  et  $u_0 > 0$ ;
- 3) (i)  $q < p < 2q - 1$  et  $\lambda < \kappa$ ;
- (ii)  $q < p < 2q - 1$ ,  $\lambda = \kappa$  et  $u_0 > u_\lambda$ ;
- (iii)  $q < p < 2q - 1$ ,  $\lambda > \kappa$  et  $u_0 > u_\lambda^1$ ;
- 4)  $p = 2q - 1$  et  $\lambda \leq q$ .

**Théorème 4.8.** [32] Supposons  $p \leq q$ , alors la solution  $u$  du problème (4.1)-(4.3) explose seulement au bord  $x = 1$ .

## 4.2 Étude numérique du problème (4.1)-(4.3)

### 4.2.1 Construction du schéma semi-discret

Soit  $T$  un réel strictement positif tel que  $[0, T]$  est un intervalle de temps sur lequel la solution  $u$  du problème continu (4.1)-(4.3) est définie. Nous utilisons la même méthode et la même subdivision que celles du Chapitre 2 pour obtenir, lorsque  $t \in ]0, T]$ , le schéma semi-discret (4.6)-(4.8) :

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \delta^2 U_i(t) - \lambda U_i^p(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad (4.6)$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t) - \lambda U_I^p(t), \quad (4.7)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (4.8)$$

### 4.2.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8)

**Théorème 4.9.** Le problème semi-discret (4.6)-(4.8) admet une unique solution maximale  $([0, T_{\max}^h[, U_h(\cdot))$ , où  $T_{\max}^h > 0$  désigne le temps d'existence maximale de la solution maximale  $U_h$ .

*Démonstration.* Le problème semi-discret (4.6)-(4.8) est équivalent à :

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} - \lambda U_i^p(t), \quad 1 \leq i \leq I-1,$$

$$\frac{dU_0(t)}{dt} = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} - \lambda U_0^p(t),$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_I^q(t) - \lambda U_I^p(t),$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

On considère la fonction  $F$  de la variable  $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \dots, X_I(t))^T$  définie sur  $\mathbb{R}^{I+1}$  par

$$F(X(t)) = (f_0(X(t)), f_1(X(t)), \dots, f_I(X(t)))^T,$$

où

$$\begin{aligned} f_i(X) &= \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2} - \lambda X_i^p(t), \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_0(X) &= \frac{2X_1(t) - 2X_0(t)}{h^2} - \lambda X_0^p(t), \\ f_I(X) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} X_I^q(t) - \lambda X_I^p(t), \\ X_i(0) &= \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

La fonction  $F$  ainsi définie est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{I+1}$ . En vertu du Théorème A.10 (annexe), le problème semi-discret (4.6)-(4.8) admet une unique solution maximale définie sur  $[0, T_{\max}[$ .  $\square$

### 4.2.3 Propriétés du schéma semi-discret (4.6)-(4.8)

**Lemme 4.10.** Soient  $a_h \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  et  $V_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telles que

$$\frac{dV_i}{dt} - \delta^2 V_i + a_i V_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T], \quad (4.9)$$

$$V_i(0) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (4.10)$$

alors on a  $V_i(t) \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T]$ .

*Démonstration.* Définissons le vecteur  $Z_h(t) = e^{\lambda t} V_h(t)$  où  $\lambda$  est tel que

$$a_i(t) - \lambda > 0, \quad i = 0, \dots, I, t \in [0, T].$$

Soit  $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T} Z_i(t)$ . Puisque pour  $i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $Z_i(t)$  est une fonction continue sur le segment  $[0, T]$ , il existe  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$  et  $t_0 \in [0, T]$  tels que  $m = Z_{i_0}(t_0)$ . Il découle aisément de ce qui précède que

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad (4.11)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I-1, \quad (4.12)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \quad (4.13)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{si } i_0 = I. \quad (4.14)$$



En utilisant (4.9), on a

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + (a_{i_0}(t_0) - \lambda)Z_{i_0}(t_0) \geq 0. \quad (4.15)$$

En utilisant les égalités (4.11)-(4.14), il en résulte  $(a_{i_0}(t_0) - \lambda)Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ , ce qui implique que  $Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ . On en déduit que  $V_h(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, T]$ , et la preuve est complète.  $\square$

**Lemme 4.11.** Soit  $U_h$  la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8). Alors

$$U_i(t) > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* La fonction  $U_i$  est continue sur  $[0, T_{\max}^h[$  pour tout  $i = 0, \dots, I$  et  $U_i(0) = \varphi_i > 0$ . Supposons donc  $t_0$  le premier  $t \in ]0, T_{\max}^h[$  tel que  $U_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, t_0[$ ,  $0 \leq i \leq I$ , mais  $U_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'égalité ci-dessus. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_{i_0}(t_0) - U_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{U_{i_0+1}(t_0) - 2U_{i_0}(t_0) + U_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{2U_1(t_0) - 2U_0(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{2U_{I-1}(t_0) - 2U_I(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 U_{i_0}(t_0) + \lambda U_{i_0}^p(t_0) &< 0 \quad \text{si } 0 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \frac{dU_I(t_0)}{dt} - \delta^2 U_I(t_0) - \frac{2}{h} U_I^q(t_0) + \lambda U_I^p(t_0) &< 0 \quad \text{si } i_0 = I. \end{aligned}$$

Mais ces deux dernières inégalités contredisent (4.6)-(4.8), le lemme est alors prouvé.  $\square$

**Lemme 4.12.** Soit  $U_h$  la solution de (4.6)-(4.8) associée à la condition initiale  $\varphi_h$  en (4.8) telle que  $\delta_{2*}^2 \varphi_i - \lambda \varphi_i^p > 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ . Alors,

$$\frac{dU_i(t)}{dt} > 0 \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq I, \quad t \in ]0, T_{\max}^h[.$$

*Démonstration.* Considérons les fonctions  $W_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in ]0, T_{\max}^h[$ . Soit  $t_0$  le premier  $t \in ]0, T_{\max}^h[$  tel que  $W_i(t) > 0$  pour  $t \in ]0, t_0[$ , mais  $W_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'égalité ci-dessus. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dW_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{W_{i_0}(t_0) - W_{i_0}(t_0 - k)}{k}, \\ \delta^2 W_{i_0}(t_0) &= \frac{W_{i_0+1}(t_0) - 2W_{i_0}(t_0) + W_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 W_{i_0}(t_0) &= \frac{2W_1(t_0) - 2W_0(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \\ \delta^2 W_{i_0}(t_0) &= \frac{2W_{I-1}(t_0) - 2W_I(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I. \end{aligned}$$

Eu égard à ce qui précède, nous avons

$$\frac{dW_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta W_{i_0}(t_0) + \lambda p U_{i_0}^{p-1}(t_0) < 0 \quad \text{si } 0 \leq i_0 \leq I - 1, \quad (4.16)$$

$$\frac{dW_I(t_0)}{dt} - \delta W_I(t_0) + \left( \lambda p U_I^{p-1}(t_0) - \frac{2q}{h} U_I^{p-1}(t_0) \right) W_I(t_0) < 0 \quad \text{si } i_0 = I. \quad (4.17)$$

Les inégalités (4.16)-(4.17) sont en contradiction avec (4.6)-(4.8), d'où le lemme.  $\square$

**Lemme 4.13.** Soit  $U_h$  la solution de (4.6)-(4.8) associée à la condition initiale  $\varphi_h$  en (4.8) telle que  $\varphi_i < \varphi_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I - 1$ . Alors,

$$U_i(t) < U_{i+1}(t) \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq I - 1, t \in [0, T_{\max}^h].$$

*Démonstration.* Pour tout  $i = 0, \dots, I$ , la fonction  $U_i$  est continue sur  $[0, T_{\max}^h]$ . Soit  $t_0$  le premier  $t > 0$  tel que  $U_{i+1}(t) - U_i(t) > 0$  pour  $t \in [0, T_{\max}^h]$ ,  $0 \leq i \leq I - 1$ , mais  $U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$  pour un certain  $i_0 \in \{0, \dots, I - 1\}$ . Nous supposons, sans perte de généralité que  $i_0$  est le plus petit nombre entier naturel vérifiant l'égalité ci-dessus. Posons  $Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$  pour  $0 \leq i \leq I - 1$ ,  $t \in [0, T_{\max}^h]$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 1 \leq i_0 \leq I - 2, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I - 1, \end{aligned}$$

cela permet d'avoir

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + \lambda(U_{i_0+1}^p(t_0) - U_{i_0}^p(t_0)) &< 0 \quad \text{si } 0 \leq i_0 \leq I-2, \\ \frac{dZ_{I-1}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{I-1}(t_0) - \frac{2}{h}U_I^q(t_0) + \lambda(U_I^p(t_0) - U_{I-1}^p(t_0)) &< 0 \quad \text{si } i_0 = I-1. \end{aligned}$$

Il y'a contradiction entre les relations (4.6), (4.7) et les deux dernières inégalités, ce qui prouve le lemme.  $\square$

#### 4.2.4 Convergence de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8)

**Théorème 4.14.** *Soit  $T > 0$ . Supposons que le problème continu (4.1)-(4.3) a une solution  $u \in \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  et la condition initiale  $\varphi_h$  en (4.8) satisfait*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

où  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Alors, pour  $h$  suffisamment petit, le problème semi-discret (4.6)-(4.8) a une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  telle que

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (4.19)$$

*Démonstration.* Soit  $\gamma > 0$  tel que

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \gamma \text{ pour } t \in [0, T]. \quad (4.20)$$

D'après le Théorème 4.9, le problème semi-discret (4.6)-(4.8) admet une unique solution  $U_h \in \mathcal{C}^1([0, T_{\max}^h], \mathbb{R}^{I+1})$ . Notons  $t(h)$  la plus grande valeur du temps pour laquelle  $t(h) \leq T_{\max}^h$  telle que pour tout  $t \in [0, t(h)[$ ,

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \quad (4.21)$$

La relation (4.18) implique  $t(h) > 0$  pour  $h$  suffisamment petit. Posons  $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$ . L'inégalité triangulaire permet d'avoir

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ pour } t \in ]0, t^*(h)],$$

cela entraine

$$\|U_h(t)\|_\infty < 1 + \gamma \text{ pour } t \in ]0, t^*(h)].$$

Posons  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$ ,  $t \in ]0, t^*(h)]$  l'erreur de discrétisation et considérons la fonction

$$Z(x, t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)t+Cx^2}, \quad t \in [0, T]$$

où  $M$ ,  $L$ ,  $C$  sont des constantes positives.

En suivant l'exemple de la preuve du Théorème 2.12, nous pouvons choisir  $M$ ,  $L$ ,  $C$ , tels que  $|e_i(t)| < Z(x_i, t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, t^*(h)]$ . Nous en déduisons

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)t+C}, \quad t \in [0, t^*(h)]. \quad (4.22)$$

Montrons maintenant que  $t^*(h) = T$ . Pour cela, on suppose  $t^*(h) < T$ , alors  $t^*(h) = t(h)$ . Des relations (4.21) et (4.22), on obtient

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)T+C},$$

d'où  $1 \leq 0$  lorsqu'on fait tendre  $h$  vers zéro. On aboutit à une contradiction.  $\square$

#### 4.2.5 Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8)

Nous prenons la donnée initiale  $u_0$  telle que  $u_0(1) \geq 1$ . Sous des hypothèses appropriées, nous montrons que la solution  $U_h$  explose en un temps fini et que son temps d'explosion converge vers celui de la solution continue.

Soient les hypothèses suivantes :

$$(H_1) : \quad u_0 > 0, \quad u'_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u''_0 - \lambda u_0^p > 0 \quad \text{dans} \quad [0, 1],$$

$$(H_2) : \quad p \leq q \quad \text{et} \quad 0 < \lambda < \frac{(q-1)(p+1)}{(q+1)(p-1)}.$$

**Théorème 4.15.** *Si le problème continu (4.1)-(4.3) a une solution  $u$  dans  $\mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times [0, T_b])$  qui explose au temps fini  $T_b$  et que la condition initiale  $\varphi_h$  en (4.8) vérifie  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  quand  $h \rightarrow 0$ , alors sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , la solution  $U_h$  de (4.6)-(4.8) explose en un temps fini  $T_h$ . De plus, on a :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T_b.$$

*Démonstration.* Désignons par  $I$  l'énergie associée au problème continu (4.1)-(4.3). Alors

$$I[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{q+1} u^{q+1}(1, t) + \frac{\lambda}{p+1} \int_0^1 u^{p+1}(x, t) dx, \quad t \in [0, T_b[.$$

Pour toute solution  $u$ , cette énergie est une fonction monotone et décroissante par rapport à  $t$ . En effet, nous vérifions que

$$\frac{d}{dt}I[u](t) = - \int_0^1 u_t^2(x, t) dx \leq 0.$$

Grâce à l'hypothèse  $(H_1)$ , nous avons  $u > 0$ ,  $u_t \geq 0$  (Gómez et al. [32]) et  $u_x \geq 0$  (Chipot et al. [12]).

Introduisons la fonctionnelle  $J[u]$  définie par :

$$J[u](t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx, \quad t \in [0, T_b[.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dJ[u](t)}{dt} &= 2 \int_0^1 u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= 2 \left( -2I[u](t) + \frac{q-1}{q+1} u^{q+1}(1, t) - \lambda \frac{p-1}{p+1} \int_0^1 u^{p+1}(x, t) dx \right) \\ &\geq -4I[u](t) + 2 \frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)} u^{q+1}(1, t) \quad \text{car } u_0(1) \geq 1 \text{ et } p \leq q \\ &\geq -4I[u_0] + 2 \frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)} u^{q+1}(1, t) \quad \text{car } I \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

Posons  $\alpha = 2 \frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)}$ . Compte tenu de l'hypothèse  $H_2$ ,  $\alpha > 0$ .

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{dJ[u](t)}{dt} \geq -4I[u_0] + \alpha u^{q+1}(1, t) \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} &\geq -4I[u_0] + \alpha \int_0^1 u^{q+1}(x, t) dx \\ &\geq -4I[u_0] + \alpha (J[u](t))^{(q+1)/2}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Définissons la fonction  $H$  telle que  $H(t) = -4I[u_0] + \alpha u^{q+1}(1, t)$ ,  $t \in [0, T_b[$ .

De l'inégalité (4.23), on a  $\frac{dJ[u](t)}{dt} \geq H(t)$ ,  $t \in [0, T_b[$  et  $\lim_{t \rightarrow T} H(t) = +\infty$  puisque  $u$  explose en  $x = 1$ .

Soient  $I_h[U_h]$ ,  $J_h[U_h]$  et  $H_h$  des approximations numériques de  $I[u]$ ,  $J[u]$  et  $H$  respectivement, définies par :

$$I_h[U_h](t) = \frac{1}{2h} \sum_{i=0}^{I-1} \left( U_{i+1}(t) - U_i(t) \right)^2 - \frac{1}{q+1} U_I^{q+1}(t) + \frac{\lambda h}{p+1} \sum_{i=0}^I U_i^{p+1}(t), \quad (4.25)$$

$$J_h[U_h](t) = h \sum_{i=0}^I U_i^2(t), \quad (4.26)$$

$$H_h(t) = -4I[\varphi_h] + \alpha U_I^{q+1}(t). \quad (4.27)$$

Tout comme l'énergie  $I[u]$  du problème continu,  $I_h[U_h]$  est décroissante.

Minorons maintenant la dérivée de  $J_h[U_h]$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} &= 2h \sum_{i=0}^I U_i(t) \frac{dU_i(t)}{dt} \\ &= 2h \left( U_I(t) \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^{q+1}(t) - \lambda U_I^{p+1}(t) \right) + 2h \sum_{i=0}^{I-1} U_i(t) (\delta^2 U_i(t) - \lambda U_i^p(t)) \\ &= 2h \sum_{i=1}^{I-1} U_i(t) \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} - 2\lambda h \sum_{i=0}^I U_i^{p+1}(t) + \\ &\quad 2h \left( U_0(t) \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} + U_I(t) \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} U_I^{q+1}(t) \right) \\ &= -\frac{2}{h} \sum_{i=0}^{I-1} (U_{i+1}(t) - U_i(t))^2 + 2U_I^{q+1}(t) - 2\lambda h \sum_{i=0}^I U_i^{p+1}(t) + \\ &\quad hU_0(t) \delta_{2*}^2 U_0(t) + hU_I(t) \delta_{2*}^2 U_I(t) \end{aligned}$$

Puisque  $\delta_{2*}^2 U_0(t) > 0$  et  $\delta_{2*}^2 U_I(t) > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} &\geq -\frac{2}{h} \sum_{i=0}^{I-1} (U_{i+1}(t) - U_i(t))^2 + 2U_I^{q+1}(t) - 2\lambda h \sum_{i=0}^I U_i^{p+1}(t) \\ &= -4I_h[U_h](t) + 2\frac{q-1}{q+1} U_I^{q+1}(t) - 2\lambda h \frac{p-1}{p+1} \sum_{i=0}^I U_i^{p+1}(t) \\ &= -4I_h[U_h](t) + 2\frac{q-1}{q+1} U_I^{q+1}(t) - 2\lambda \frac{p-1}{p+1} U_I^{q+1}(t) \\ &\geq -4I_h[\varphi_h] + 2\frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)} U_I^{q+1}(t) \\ &= -4I_h[\varphi_h] + \alpha U_I^{q+1}(t) \\ &\geq -4I_h[\varphi_h] + \alpha \sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^{q+1}(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

On utilise la forme discrète de l'inégalité de Jensen pour avoir

$$\sum_{i=0}^I \frac{1}{I+1} U_i^{q+1}(t) \geq \left( \frac{I}{I+1} \right)^{(q+1)/2} (J_h[U_h](t))^{(q+1)/2}.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} \geq -4I_h[\varphi_h] + \alpha \left( \frac{I}{I+1} \right)^{(q+1)/2} (J_h[U_h](t))^{(q+1)/2} \quad (4.29)$$

La relation (4.28) permet d'obtenir

$$\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} \geq H_h(t).$$

Par ailleurs,

$$\frac{dH_h(t)}{dt} = \alpha(q+1)U_I^q(t) \frac{dU_I(t)}{dt} \geq 0.$$

Posons  $G(s) = -4I_h[\varphi_h] + \alpha \left( \frac{I}{I+1} \right)^{(q+1)/2} s^{(q+1)/2}$ . D'après (4.29),

$$\frac{dJ_h[U_h](t)}{dt} \geq G(J_h[U_h](t)).$$

De plus, il existe  $s_0 > 0$  tel que

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{pour } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < +\infty & \text{car } q > 1. \end{cases}$$

Pour la suite, nous utilisons les mêmes arguments que ceux des pages 32-35 du Chapitre 2 pour montrer que quelque soit  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

En conformité avec le Théorème A.12 (annexe), nous obtenons les résultats souhaités. □

## 4.2.6 Taux et ensemble d'explosion

**Lemme 4.16.** *I est un entier naturel non nul. Soient  $U_h \in \mathbb{R}_+^{I+1}$  et  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  une fonction convexe. Alors*

$$\delta^2 g(U_i) \geq g'(U_i) \delta^2 U_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq I.$$

*Démonstration.* Du développement limité de Taylor-Lagrange on obtient

$$\begin{aligned}\delta^2 g(U_0) &= g'(U_0)\delta^2 U_0 + \frac{(U_1 - U_0)^2}{h^2}g''(\zeta_0), \\ \delta^2 g(U_I) &= g'(U_I)\delta^2 U_I + \frac{(U_{I-1} - U_I)^2}{h^2}g''(\zeta_I), \\ \delta^2 g(U_i) &= g'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2}g''(\eta_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2}g''(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, I-1,\end{aligned}$$

où  $\eta_i$  est une valeur intermédiaire entre  $U_i$  et  $U_{i+1}$  et  $\zeta_i$  celle entre  $U_i$  et  $U_{i-1}$ . Le résultat est obtenu en tenant compte de la convexité de  $g$  et du fait que  $U_h \geq 0$ .  $\square$

**Théorème 4.17.** Soit  $q > 1$ . Sous les hypothèses des lemmes 4.12 et 4.13, nous avons

$$U_I(t) \sim (T_h - t)^{-1/(q-1)}$$

au sens qu'il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$C_1(T_h - t)^{-1/(q-1)} \leq U_I(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(q-1)}$$

*Démonstration.* Sachant que  $U_{I-1}(t) < U_I(t)$ , il vient de la relation (4.7) que

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \leq \frac{2}{h}U_I^q(t).$$

Par intégration de  $t$  à  $T_h$ , on obtient

$$C_1(T_h - t)^{-1/(q-1)} \leq U_I(t),$$

avec  $C_1 = \left(\frac{2(q-1)}{h}\right)^{-1/(q-1)}$ .

Posons pour  $i = 0, \dots, I$ ,

$$K_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt} - \epsilon U_i^q(t), \quad \epsilon \in ]0, 1[.$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{dK_i(t)}{dt} - \delta^2 K_i(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \epsilon U_i^q(t) \right) - \delta^2 \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \epsilon U_i^q(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) - \epsilon q U_i^{q-1}(t) \frac{dU_i(t)}{dt} + \epsilon \delta^2 U_i^q(t)\end{aligned}$$



En appliquant le Lemme 4.16, on a  $\delta^2 U_i^q(t) \geq q U_i^{q-1}(t) \delta^2 U_i(t)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dK_i(t)}{dt} - \delta^2 K_i(t) &\geq \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) - \epsilon q U_i^{q-1}(t) \frac{dU_i(t)}{dt} + \epsilon q U_i^{q-1}(t) \delta^2 U_i(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) - \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) \epsilon q U_i^{q-1}(t) \quad (4.30) \end{aligned}$$

Pour  $i = 0, \dots, I-1$ , la relation (4.30) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dK_i(t)}{dt} - \delta^2 K_i(t) &\geq -\lambda p U_i^{p-1}(t) \frac{dU_i(t)}{dt} - \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) \epsilon q U_i^{q-1}(t) \\ &= -\lambda p U_i^{p-1}(t) K_i(t) - \lambda \epsilon p U_i^{p-1}(t) U_i^q(t) - \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) \epsilon q U_i^{q-1}(t) \\ &\geq -\lambda p U_i^{p-1}(t) K_i(t) - \epsilon q U_i^{q-1} \left( \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) + \lambda U_i^p(t) \right) \text{ car } q \geq p, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{dK_i(t)}{dt} - \delta^2 K_i(t) + \lambda p U_i^{p-1}(t) K_i(t) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I-1.$$

Pour  $i = I$ , (4.30) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dK_I(t)}{dt} - \delta^2 K_I(t) &\geq \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{h} U_I^q(t) - \lambda U_I^p(t) \right) - \left( \frac{dU_I(t)}{dt} - \delta^2 U_I(t) \right) \epsilon q U_I^{q-1}(t) \\ &\geq - \left( \lambda p U_I^{p-1}(t) - \frac{2q}{h} U_I^{q-1}(t) \right) K_I(t) \\ &\quad - \left( \frac{dU_I(t)}{dt} - \delta^2 U_I(t) - \frac{2}{h} U_I^q(t) + \lambda U_I^p(t) \right) \epsilon q U_I^{q-1}(t) \text{ car } q \geq p, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dK_I(t)}{dt} - \delta^2 K_I(t) + \left( \lambda p U_I^{p-1}(t) - \frac{2q}{h} U_I^{q-1}(t) \right) K_I(t) \geq 0.$$

$\delta_{2*}^2 \varphi_h - \lambda \varphi_h^p$  étant strictement positif et  $\varphi_h$  bornée, il existe  $\epsilon \in ]0, 1[$  tel que

$$K_i(0) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dK_i(t)}{dt} - \delta^2 K_i(t) + \lambda p U_i^{p-1}(t) K_i(t) &\geq 0, \quad i = 0, \dots, I-1, \\ \frac{dK_I(t)}{dt} - \delta^2 K_I(t) + \left( \lambda p U_I^{p-1}(t) - \frac{2q}{h} U_I^{q-1}(t) \right) K_I(t) &\geq 0, \\ K_i(0) &\geq 0, \quad i = 0, \dots, I. \end{aligned}$$

En vertu du Lemme 4.10, nous obtenons

$$K_i(t) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T_h[,$$

en particulier,  $\frac{dU_I(t)}{U_I^q(t)} \geq \epsilon dt$ . En intégrant cette dernière inégalité sur  $]t, T_h[$ , on aboutit à

$$U_I(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(q-1)} \quad (4.31)$$

avec  $C_2 = (\epsilon(q-1))^{-1/(q-1)}$ . □

**Corollaire 4.18.** *En prenant  $t = 0$  dans l'inégalité (4.31), on obtient la majoration du temps d'explosion numérique comme suit :*

$$T_h \leq \frac{\varphi_I^{-q+1}}{\epsilon(q-1)} \quad (4.32)$$

où  $\epsilon \in ]0, 1[$  est choisi de sorte que  $\delta_{2*}^2 \varphi_i - \lambda \varphi_i^p - \epsilon \varphi_i^q \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ .

**Théorème 4.19.** *Pour  $h$  suffisamment petit, l'ensemble d'explosion de la solution du problème semi-discret (4.6)-(4.8) coïncide avec celui de la solution du problème continu (4.1)-(4.3).*

*Démonstration.* Nous avons ce résultat grâce à la Remarque 2.17. □

## 4.2.7 Résultats numériques

Dans cette sous section, nous donnons des résultats numériques enregistrés dans des tableaux et présentons aussi des graphiques pour différentes valeurs des paramètres  $\lambda$ ,  $p$  et  $q$  afin de mieux illustrer les résultats théoriques.

En utilisant la méthode de la transformation de la longueur d'arc, nous transformons le schéma semi-discret (4.6)-(4.8) au système d'EDO non singulier suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, \quad 0 < \ell < +\infty, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I, \end{array} \right. \quad (4.33)$$

où

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{h^2} (U_1 - U_0) - \lambda U_0^p(t), \\ f_i &= \frac{1}{h^2} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) - \lambda U_i^p(t), \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_I &= \frac{2}{h^2} (U_{I-1} - U_I + hU_I^q(t)) - \lambda U_I^p(t). \end{aligned}$$

Concernant les simulations, nous choisissons les paramètres de contrôle, la suite géométrique et la donnée initiale (voir Chapitre 2 page 39) comme suit :

$$AbsTol = RelTol = 10^{-15}, \quad InitialStep = 0,$$

la suite géométrique

$$\ell_j = 2^{10} \cdot 2^j, \quad j = 0, \dots, 10$$

et la donnée initiale

$$\varphi_i = e^{i * h - \ln(e^1 - 1)} - \frac{i * h}{e^1 - 1}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Nous avons enregistré dans les tableaux suivants, en lignes, les temps d'explosion numériques et le nombre d'itérations nécessaires pour l'explosion numérique correspondant aux maillages  $I$ .

TABLEAU 4.1 – Temps d'explosion numérique et nombres d'itérations obtenus pour  $p = 2, 5$ ;  $q = 2, 5$ ;  $\lambda = 0, 5$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,216 071 202	4154
32	0,210 906 554	6952
64	0,209 320 480	12404
128	0,208 851 002	23101
256	0,208 715 516	44733
512	0,208 677 132	97408
1024	0,208 666 410	293764

TABLEAU 4.2 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $p = 2, 5; q = 3; \lambda = 0, 5$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,146 361 159	3086
32	0,142 014 795	5194
64	0,140 656 932	9289
128	0,140 250 111	17290
256	0,140 131 638	33341
512	0,140 097 837	70399
1024	0,140 088 342	202200

TABLEAU 4.3 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $p = 2, 5; q = 4; \lambda = 0, 5$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,084 607 888	2020
32	0,081 038 633	3425
64	0,079 895 889	6155
128	0,079 548 019	11473
256	0,079 445 569	22048
512	0,079 416 093	45078
1024	0,079 407 758	120059

TABLEAU 4.4 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $p = 2, 5; q = 3; \lambda = 1$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,184 326 256	3342
32	0,178 963 408	5666
64	0,177 345 272	10193
128	0,176 872 688	19073
256	0,176 737 698	37068
512	0,176 699 759	81769
1024	0,176 689 229	248435

TABLEAU 4.5 – Temps d’explosion numérique et nombres d’itérations obtenus pour  $p = 2, 5; q = 3; \lambda = 1, 2$

$I$	$T_h$	$n$
16	0,207 781 947	3481
32	0,201 749 362	5923
64	0,199 961 413	10684
128	0,199 446 098	20047
256	0,199 300 396	39162
512	0,199 259 776	88792
1024	0,199 248 575	276972

**Remarque 4.20.** Des tableaux 4.1-4.5, nous remarquons que lorsque le flux au bord croît, l'explosion est accélérée (tableaux 4.1-4.3) et, lorsque le terme d'absorption de l'équation principale croît, l'explosion est retardée (tableaux 4.2, 4.4 et 4.5).

Au regard de ce qui précède, nous pouvons dire que le flux au bord est la principale cause de l'explosion tandis que le terme d'absorption présent dans l'équation principale permet de l'inhiber. Nous pouvons donc contrôler l'explosion en jouant sur l'un ou l'autre de ces facteurs.

Nous présentons ci-après des graphiques mettant en exergue le phénomène de l'explosion en temps fini de la solution numérique  $U_h$ .

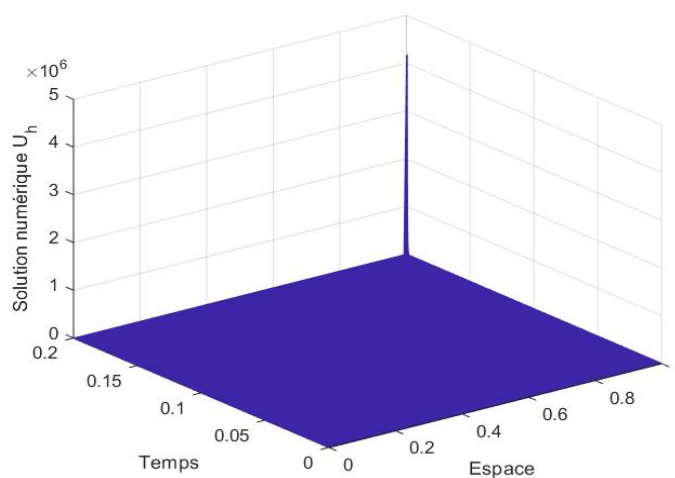


FIGURE 4.1 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace et du temps pour  $I = 128$ ;  $p = 2, 5$ ;  $q = 3$ ;  $\lambda = 1, 2$ .

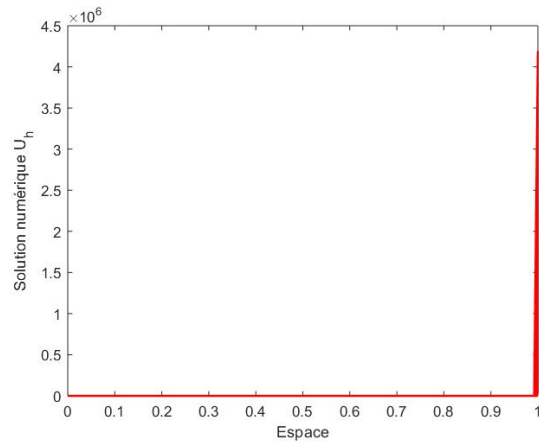


FIGURE 4.2 – Évolution de  $U_h$  en fonction de l'espace pour  $I = 128$ ;  $p = 2, 5$ ;  $q = 3$ ;  $\lambda = 1, 2$ .

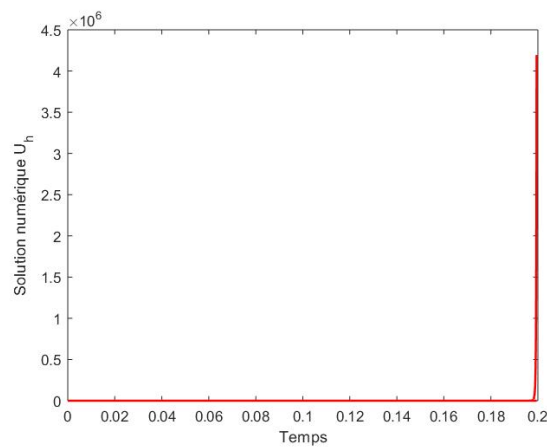


FIGURE 4.3 – Évolution de  $U_h$  en fonction du temps pour  $I = 128$ ;  $p = 2, 5$ ;  $q = 3$ ;  $\lambda = 1, 2$ .

**Remarque 4.21.** Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent que la solution  $U_h$  explose effectivement en un temps fini au noeud  $x_I = 1$ , ce qui est conforme aux résultats théoriques obtenus par Gómez et al. [32] et Chipot et al. [12].

# Conclusion et Perspectives

Dans la présente thèse, nous avons passé en revue l'explosion de la solution de certains problèmes continus paraboliques quasi-linéaires, et nous avons aussi prouvé l'explosion des solutions des problèmes semi-discrets approximant chacun des problèmes continus. Bien que les équations paraboliques quasi-linéaires aient été moins étudiées sur le plan numérique, certainement du fait de la présence d'un coefficient de diffusion (le coefficient de  $u_{xx}$ ), qui est une fonction de  $x, t, u$  ou  $u_x$ , nous avons réussi à prouver l'explosion numérique tout en gardant les mêmes conditions sur la donnée initiale que celles assurant l'explosion de la solution continue. Cela est une avancée majeure dans le domaine de l'étude numérique des EDP. Les résultats numériques obtenus montrent que l'explosion est plus rapide pour de grandes valeurs du flux au bord. Le flux au bord joue donc un grand rôle dans l'explosion de la solution numérique, ce qui est en phase avec la théorie. Les graphiques révèlent aussi que les solutions numériques explosent effectivement et que les ensembles d'explosion numériques et théoriques coïncident lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Un puissant algorithme, accélérateur de la vitesse de convergence des suites numériques convergentes a été utilisé pour accélérer la convergence des temps d'explosion numériques. Nous obtenons ainsi une très bonne approximation du temps d'explosion de chacun des problèmes continus étudiés. L'unicité de la solution pour une condition initiale donnée a été prouvée, et cela n'a pas seulement qu'une portée mathématique. En effet, l'unicité stipule que connaissant l'état initial d'un phénomène, il existe une et une seule évolution possible de ce dernier, c'est-à-dire qu'on peut connaître le futur du phénomène. Nous sommes alors parvenus à étudier tant théoriquement que numériquement des problèmes paraboliques quasi-linéaires, et nous pensons que ces travaux seront très utiles à la communauté scientifique et en particulier, aux ingénieurs qui ont beaucoup besoin de résultats numériques précis.

Néanmoins des questions restent encore à élucider, et la fondamentale pour nous est

de savoir ce qui se passe après l'explosion.

En perspective, nous pourrions choisir une autre méthode de discrétisation (par exemple la méthode des éléments finis ou celle des volumes finis) afin de comparer la précision d'approximation par rapport à celle des différences finies utilisée dans cette thèse. Également, nous envisageons mener une étude numérique des EDP soumises à des conditions aux bords dynamiques, mieux, faire des études en dimension 2 d'espace.



# **Annexes**



# Quelques résultats utilisés dans la thèse

## A.1 Principes de comparaison et du maximum

Cette section est inspirée de la thèse de N'Guessan Koffi [52]. Nous rappelons quelques résultats qualitatifs (principe de comparaison, principe du maximum et la positivité de la solution) dans l'étude des problèmes continus. Ces résultats sont issus de [62].

On considère  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , dont le bord  $\partial\Omega$  se décompose en deux parties disjointes

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \uplus \partial_2\Omega,$$

où  $\partial_2\Omega$  est une partie relativement ouverte dans  $\partial\Omega$ . Les cas  $\partial_2\Omega = \partial\Omega$  et  $\partial_2\Omega = \emptyset$  ne sont pas exclus. Pour  $\tau > 0$  on définit

$$\overline{\mathcal{Q}}_\tau := \overline{\Omega} \times [0, \tau],$$

puis l'intérieur parabolique

$$\mathcal{Q}_\tau := (\Omega \cup \partial_2\Omega) \times ]0, \tau],$$

et le bord parabolique

$$\mathfrak{q}_\tau := \overline{\mathcal{Q}}_\tau \setminus \mathcal{Q}_\tau.$$

Soit une fonction

$$F \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{Q}}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2})$$

croissante par rapport à la variable dans  $\mathbb{R}^{N^2}$ . On supposera que la fonction  $F$  vérifie

la condition de Lipschitz unilatérale suivante :

$$w \geq u \implies F(x, t, w, p, q) - F(x, t, u, p, q) \leq L(w - u) \quad (\text{A.1})$$

dans  $\overline{\mathcal{Q}}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$ , où  $L \geq 0$  est une constante ne dépendant que de la fonction  $F$ . On considère l'équation parabolique dans  $\overline{\mathcal{Q}}_\tau$

$$u_t = F(x, t, u, \nabla u, H^2 u),$$

où  $H^2 u$  désigne la matrice hessienne de  $u$ . Sur  $\partial_2 \Omega$ , on impose la condition dynamique  $\mathbf{B}_\sigma(u) = 0$ , avec

$$\mathbf{B}_\sigma(u) = \sigma(x, t) \partial_t u + \partial_\nu u - \rho(x, t) u,$$

où  $\sigma \geq 0$  sur  $\partial_2 \Omega \times ]0, \tau]$ . Nous avons les résultats suivants :

**Théorème A.1.** *Principe de comparaison.*

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dans  $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$  satisfaisant

$$\begin{cases} u_t - F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) \leq v_t - F(x, t, v, \nabla v, H^2 v) & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathbf{B}_\sigma(u) \leq \mathbf{B}_\sigma(v) & \text{sur } \partial_2 \Omega \times ]0, \tau]. \end{cases}$$

Alors  $u \leq v$  sur  $\mathbf{q}_\tau$  implique  $u \leq v$  dans  $\mathcal{Q}_\tau$ .

**Corollaire A.2.** *Positivité.*

Si l'on suppose en plus que  $F(\cdot, \cdot, 0, 0, 0) \geq 0$ , une solution  $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$  de

$$\begin{cases} u_t - F(x, t, u, \nabla u, H^2 u) \geq 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathbf{B}_\sigma(u) \geq 0 & \text{sur } \partial_2 \Omega \times ]0, \tau], \\ u \geq 0 & \text{sur } \mathbf{q}_\tau, \end{cases}$$

est positive dans  $\mathcal{Q}_\tau$ .

Pour la suite, on pose

$$D[u] = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + g(x, t, u, \nabla u),$$

où les coefficients  $a_{ij}$  vérifient, pour  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux constantes positives,

$$0 \leq \mu_1 \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2,$$

pour tout vecteur  $\xi$  de  $\mathbb{R}^N$ .

**Théorème A.3.** *Principe du maximum ( minimum ) fort.*

Supposons qu'il existe  $C > 0$  tel que dans  $\mathcal{Q}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  on ait

$$g(\cdot, \cdot, \cdot, p) \leq C|p| \quad \langle g(\cdot, \cdot, \cdot, p) \geq -C|p| \rangle.$$

Soit une fonction  $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}_\tau}) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{Q}_\tau)$  vérifiant

$$\begin{cases} u_t \leq D[u] \quad \langle u_t \geq D[u] \rangle & \text{dans } \mathbf{\Omega} \times ]0, \tau], \\ \mathbf{B}_\sigma(u) \leq 0 \quad \langle \mathbf{B}_\sigma(u) \geq 0 \rangle & \text{sur } \partial_2 \mathbf{\Omega} \times ]0, \tau]. \end{cases}$$

Alors

$$\max_{\mathbf{q}_\tau} u = \max_{\overline{\mathcal{Q}_\tau}} u \quad \langle \min_{\mathbf{q}_\tau} u = \min_{\overline{\mathcal{Q}_\tau}} u \rangle, \quad (\text{A.2})$$

et si  $u$  atteint son maximum  $M$  ( son minimum  $m$  ) en un point  $(x_0, t_0) \in \mathcal{Q}_\tau$ , alors  $u = M$  (  $u = m$  ) sur  $\overline{\mathcal{Q}_{t_0}}$ .

## A.2 Existence et unicité de la solution de certaines EDP paraboliques quasi-linéaires

Cette section est tirée de l'article de H. Amann [4].

Considérons le système d'EDP paraboliques quasi-linéaires suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t, u)u = f(x, t, u, Du), \quad \text{dans } \mathbf{\Omega} \times (0, T], \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{B}(t, u)u = g(x, t, u), \quad \text{sur } \partial \mathbf{\Omega} \times (0, T], \quad (\text{A.4})$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{dans } \overline{\mathbf{\Omega}}, \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathbf{\Omega}$  est un domaine lisse borné dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{A}(t, u)u$  une famille d'opérateurs différentiels du second ordre de la forme

$$\mathcal{A}(t, u)u := - \sum_{j,k=1}^n D_j(a_{jk}(\cdot, t, u)D_k u) + \sum_j^n a_j(\cdot, t, u)D_j u, \quad 0 \leq t \leq T < \infty,$$

où  $D_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ , agissant sur un vecteur de  $N$  fonctions réelles  $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$  avec

$$a_j \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{et } a_{jk} = a_{kj},$$

où  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  est l'espace des endomorphismes de  $\mathbb{R}^N$ .

Nous supposons que chaque  $\mathcal{A}(t, u)$  est un système fortement elliptique, tel que,

$$\sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^N a_{jk}^{rs}(x, t, \eta) \xi^j \xi^k \zeta_r \zeta_s > 0,$$

pour tout  $(x, t, \eta) \in \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^N$ ,  $\xi := (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , et  $\zeta := (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , avec  $a_{jk}^{rs}$  les éléments des matrices  $a_{jk}$ .

Posons

$$\mathcal{B}(t, u)u := \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\cdot, t, u) \nu^j D_k u,$$

où  $\nu := (\nu^1, \dots, \nu^n)$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

Supposons que

$$f \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN}, \mathbb{R}^N),$$

et

$$g \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \partial\Omega^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N),$$

avec  $g(\cdot, \cdot, 0) = 0$ .

**Définition A.4.** Soit un intervalle  $J \subset [0, T]$ , avec  $0 \in J$  et  $\dot{J} := J \setminus \{0\} \neq \emptyset$ . Une fonction  $u$  est solution classique de (A.3)-(A.5) si

$$u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times J, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times \dot{J}, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{2,0}(\Omega \times \dot{J}, \mathbb{R}^N),$$

et satisfait (A.3)-(A.5) ponctuellement.

Une solution classique non prolongeable est dite maximale.

**Théorème A.5.** Supposons que  $n < p < \infty$ , que  $1 + n/p < \tau \leq 2$ , et que  $u_0 \in W_p^\tau$  satisfait la condition de compatibilité

$$\mathcal{B}(t, u_0)u_0 = g(\cdot, t, u_0) \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{A.6}$$

Alors le problème (A.3)-(A.5) admet une solution classique maximale  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0, T[, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \times ]0, T[, \mathbb{R}^N)$ .

Si  $f$  est indépendante de  $Du$ , alors  $u$  est l'unique solution de (A.3)-(A.5).

### A.3 Existence et unicité de la solution de certaines EDO.

Dans cette section, nous énonçons le théorème de Cauchy-Lipschitz qui traite de l'existence et de l'unicité des EDO, et est tirée de la thèse de N'Guessan [52].

**Définition A.6.** On appelle système différentiel non linéaire autonome du premier degré, tout système de la forme

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)) \quad (\text{A.7})$$

où  $t$  est une variable réelle,

$$X(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_I(t))^T, \quad F(X) = (f_0(t), f_1(t), \dots, f_I(t))^T,$$

les  $f_i$ ,  $i \in \{0, \dots, I\}$  sont des fonctions de la variable  $X$  définies et continues sur un ouvert  $E$  de  $\mathbb{R}^{I+1}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition A.7.** Soit  $X : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$   
 $t \mapsto X(t)$ .

On dit que  $X$  est solution du système (A.7) sur l'intervalle  $J$  dans  $E$  si

- 1)  $X$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ ,
- 2) pour tout  $t \in J$ ,  $X(t) \in E$ ,
- 3)  $\frac{dX(t)}{dt} = F(X(t))$

Par abus de langage, on dira qu'une fonction  $X : J \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  est solution de (A.7) si  $(J, X(\cdot))$  est solution de (A.7).

**Définition A.8.** Une solution  $X : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  est solution de (A.7) est maximale s'il n'existe pas d'intervalle  $\tilde{J}$  contenant strictement  $J$  et de solution  $\tilde{X} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  telle que  $\tilde{X}|_J(\cdot) = X(\cdot)$ .

**Définition A.9.** On appelle condition initiale, un point de  $K \times \mathbb{R}^{I+1}$  de la forme :  $(t_0, X_0)$  avec  $X_0 = (y_0, \dots, y_I)^T$ . Résoudre le système pour une condition initiale donnée, c'est chercher une solution  $X(t)$  telle que, pour tout  $i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $x_i(t_0) = y_i$ .

**Théorème A.10.** (Théorème de Cauchy-Lipschitz).

Soit  $F : E \subseteq \mathbb{R}^{I+1} \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  une fonction. On considère le problème de Cauchy  $(P_{X_0, t_0})$  suivant

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = F(X(t)), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Si  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$ , alors

- 1)  $(P_{X_0, t_0})$  admet une unique solution maximale  $(J_{\max}, X_{\max}(\cdot))$
- 2) Les solutions de  $(P_{X_0, t_0})$  sont exactement les restrictions de l'unique solution maximale, c'est à dire les couples  $(J, X_{\max|J}(\cdot))$  avec  $J$  sous-intervalle de  $J_{\max}$ .
- 3) Si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^m$  sur  $E$ , alors  $X_{\max}$  est de classe  $\mathcal{C}^{m+1}$  sur  $J_{\max}$ .

## A.4 Théorèmes d'explosion et de convergence du temps d'explosion de solutions semi-discrètes en espace

Cette partie est tirée de l'article de Ushijima [59].

Considérons le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} u_t = F(t, x, u, \nabla u, \Delta u) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ Bu(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où  $B$  représente la condition aux limites. Nous supposons que ce problème possède une unique solution locale  $u(\cdot, t)$  dans un espace de fonctions  $\mathcal{X}$  et qu'elle explose en un temps fini  $T$ . De plus, nous supposons qu'il existe une fonctionnelle  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour toute solution explosive  $u$  de (A.8), on ait l'un des résultats (a) ou (b) suivants :

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow T} J[u](t) = \infty.$$

Il existe une fonction  $H$  telle que

$$(b) \quad \frac{d}{dt} J[u](t) \geq H(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow T} H(t) = \infty.$$

Divers exemples d'une telle fonctionnelle  $J$  peuvent être trouvées dans la plupart des problèmes d'explosion.



Nous approximons le problème (A.8) par une famille d'équations paramétrées par  $h$ .

$$\begin{cases} u_t^h = F_h(t, x_h, u^h, \nabla_h u^h, \Delta_h u^h) & x_h \in \Omega_h, t > 0 \\ u^h(x_h, 0) = u_0^h(x_h) & x_h \in \Omega_h \\ Bu^h(x_h, t) = 0 & x_h \in \partial\Omega_h, t > 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Ici, le paramètre  $h$  indique la précision de l'approximation. Cette précision est de plus en plus meilleur quand  $h$  tend vers zéro.

Les approximations de  $F, B, \nabla, \Delta, \Omega, x$  et  $u_0$  sont notées par  $F_h, B_h, \nabla_h, \Delta_h, \Omega_h, x_h$  et  $u_0^h$  respectivement. La semi-discrétisation en espace du problème (A.8) est le problème (A.9). Ainsi, le paramètre  $h$  correspond au pas de discrétisation de l'espace. Nous supposons que le problème semi-discrétisé (A.9) possède une unique solution locale dans l'espace fonctionnel  $\mathcal{X}_h$ .

Notons  $J_h : \mathcal{X}_h \rightarrow \mathbb{R}$  une approximation de la fonctionnelle  $J$  et  $H_h$ , celle de la fonction  $H$  susmentionnées.

**Théorème A.11.** *Supposons vraies les hypothèses suivantes :*

- 1) *la solution  $u$  de (A.8) explose au temps  $T$  ;*
- 2)  *$J(t)$  est une fonction continue satisfaisant la condition (a), et  $J_h(t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant l'inégalité ci-dessous pour une certaine fonction  $G$  :*

$$\frac{d}{dt} J_h(t) \geq G(J_h(t)) \quad (\text{A.10})$$

où  $G : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que

$$\begin{cases} G(s) > 0, & s > s_0 \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty ; \end{cases}$$

- 3) *La famille  $u^h$  est une approximation de  $u$  dans le sens suivant : pour tout  $\epsilon > 0$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J[u](t) - J_h[u^h](t)| = 0.$$

Alors,

*la solution approximative  $u^h$  explose en un temps fini  $T_h$  pour  $h$  suffisamment petit et  $T_h$  converge vers  $T$  quand  $h$  tend vers zéro.*

**Théorème A.12.** *Supposons vraies les hypothèses suivantes :*

- 1) la solution  $u$  de (A.8) explose au temps  $T$  ;
- 2)  $J(t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant la condition (b) pour une fonction  $H$ , et  $J_h(t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  satisfaisant l'inégalité (A.10) pour une fonction  $G$ , et l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt}J_h(t) \geq H_h(t) \text{ et } \frac{d}{dt}H_h(t) \geq 0 ;$$

- 3) La famille  $u^h$  est une approximation de  $u$  dans le sens suivant : pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J[u](t) - J_h[u^h](t)| = 0,$$

de plus, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

Alors,

la solution approximative  $u^h$  explose en un temps fini  $T_h$  pour  $h$  suffisamment petit et  $T_h$  converge vers  $T$  quand  $h$  tend vers zéro.

Annexe **B**

## Les articles publiés



## NUMERICAL BLOW-UP FOR A QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITION

Ganon Ardjouma\*, Taha M. Mathurin and Touré K. Augustin

Unité Mixte de Recherche et d'Innovation Mathématiques  
et Nouvelles Technologies de l'Information

Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro  
Côte d'Ivoire

### Abstract

This paper is concerned with the study of the numerical approximation for the following quasilinear parabolic equation:  $u_t = u^{1+\gamma}u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ , with a nonlinear boundary condition  $u_x(0, t) = -u^q(0, t)$ ,  $u_x(1, t) = 0$ ,  $t > 0$ . It is shown that the solution may blow up in finite time. We first use the finite differences method in the space variable to obtain a semidiscrete scheme. For such a scheme, we show not only the convergence of the numerical solution but also the convergence of the numerical blow-up time when the mesh size goes to zero. Next, we use an efficient numerical algorithm for estimating the blow-up time.

### 1. Introduction

Consider the following parabolic quasilinear problem:

---

Received: December 25, 2018; Revised: March 23, 2019; Accepted: March 28, 2019

2010 Mathematics Subject Classification: 35B44, 35B51, 35K59.

Keywords and phrases: quasilinear equation, numerical blow-up, nonlinear boundary, finite differences, arc length transformation, Aitken method.

\*Corresponding author

$$\begin{cases} u_t = u^{1+\gamma}u_{xx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = -u^q(0, t), \quad u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $\gamma > 0$  and  $q > 0$  are given constants, and  $u_0$  is a positive bounded smooth function defined on  $[0, 1]$  such that  $u'_0(0) = -u_0^q(0)$  and  $u'_0(1) = 0$ . In many evolution equations, the solutions may become unbounded in finite time  $T$ . Such a phenomenon is called *blow-up* and the finite time  $T$  is called the *blow-up time*. We call  $x_0 \in [0, 1]$  a *blow-up point* if there exists a sequence  $(x_n, t_n) \subset (0, 1) \times (0, T)$  such that  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $t_n \rightarrow T$ , and  $u(x_n, t_n) \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$ . The set of all the blow-up points is called the *blow-up set*.

For (1.1), if  $q > 0$ , then it is shown by Kavitha and Bhakya [7] and Guo [6] that for every positive bounded smooth initial data  $u_0$ , the solution  $u$  blows up in finite time  $T$ . Moreover, if  $q > 1$ ,  $u'_0 \leq 0$  and  $u''_0 \geq 0$  in  $[0, 1]$ , then  $x = 0$  is the only blow-up point.

The above problem arises in fluid dynamics, which is essentially the study of gases and liquids in motion. Fluid dynamics has a wide range of applications, including calculating forces and moments on aircraft, determining the mass flow rate of petroleum through pipelines, predicating weather patterns and reportedly modelling fission weapon detonation. Some of its principles are even used in traffic engineering, where traffic is treated as a continuous fluid (see [7]).

In this paper, we are interested in numerical approximations of (1.1). Since the solution  $u$  develops a singularity in finite time, it is an interesting question what can be said about numerical approximations of this kind of problems. For previous works on numerical approximations of blowing up solutions, we refer to [1, 2, 5, 8, 9] and the references therein.

This paper is arranged as follows: in the next section, we present a semidiscrete scheme of the problem (1.1). In Section 3, we give some properties of this semidiscrete scheme. In Section 4, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete scheme of (1.1) blows up in finite time and this numerical blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we illustrate our analysis by giving some numerical results.

## 2. Semidiscrete Problem

Let  $I$  be a positive integer and define the grid  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, I$ , where  $h = \frac{1}{I}$  is the mesh parameter. We approximate the solution  $u$  of the problem (1.1) by the solution  $U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$  of the following semidiscrete scheme:

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = U_i^{1+\gamma}(t)\delta^2U_i(t), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h), \quad (2.1)$$

$$\frac{dU_0(t)}{dt} = U_0^{1+\gamma}(t)\left(\delta^2U_0(t) + \frac{2}{h}U_0^q(t)\right), \quad t \in (0, T_h), \quad (2.2)$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = U_I^{1+\gamma}(t)\delta^2U_I(t), \quad t \in (0, T_h), \quad (2.3)$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad (2.4)$$

where for  $t \in (0, T_h)$ ,

$$\delta^2U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2},$$

$$\delta^2U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2},$$

and  $[0, T_h)$ , the maximal time interval on which  $\|U_h(t)\|_\infty$  is finite, with  $\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$ . When  $T_h$  is finite, we say that the solution  $U_h(t)$  *blows up in finite time* and the time  $T_h$  is called the *blow-up time* of the solution  $U_h(t)$ . Denote

$$\delta_*^2 U_i(t) = \begin{cases} \delta^2 U_i(t) & \text{if } i = 1, \dots, I, \\ \delta^2 U_0(t) + \frac{2}{h} U_0^q(t) & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

### 3. Properties of the Semidiscrete Scheme

In this section, we give some important results which will be used later. The below lemma, well known by the name of comparison lemma is another form of the maximum principle for the semidiscrete equations.

**Lemma 3.1.** *Let  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , if  $V_h, W_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  and  $a_h \in C^0([0, T], \mathbb{R}_+^{I+1})$  are such that*

$$\begin{aligned} & \frac{dV_i(t)}{dt} - a_i(t)\delta^2 V_i(t) - f(V_i(t)) \\ & < \frac{dW_i(t)}{dt} - a_i(t)\delta^2 W_i(t) - f(W_i(t)), \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$V_i(0) < W_i(0), \quad i = 0, \dots, I, \quad (3.2)$$

then we have  $V_i(t) < W_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in (0, T)$ .

**Proof.** Let us define the vector  $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T)$  such that  $Z_i(t) > 0$  for  $t \in (0, t_0)$ ,  $0 \leq i \leq I$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . It is easy to see that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0 \text{ if } 1 \leq i_0 \leq I-1, \end{aligned}$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0 \text{ if } i_0 = 0,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0 \text{ if } i_0 = I,$$

which implies that

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - a_{i_0}(t) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + f(W_{i_0}(t_0)) - f(V_{i_0}(t_0)) \leq 0,$$

but this inequality contradicts (3.1) and the proof is complete.  $\square$

**Lemma 3.2.** *Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.4) and the initial condition at (2.4) verifies  $\varphi_h > 0$ , where  $\varphi_h = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$ . Then*

$$U_i(t) \geq 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$$

**Proof.** Take  $T_0 < T_h$  fixed. Putting  $V_h(t) = U_h(t)e^{-\lambda t}$ , where  $\lambda$  is a positive constant satisfying

$$\lambda > \max_{1 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} |U_i^\gamma(t) \delta^2 U_i(t)|$$

and

$$\lambda > \max_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ |U_0^\gamma(t) \delta^2 U_0(t)| + \frac{2}{h} |U_0^{\gamma+q}(t)| \right\}.$$

Let  $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} V_i(t)$ . Since for  $i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $V_i(t)$  is a continuous function, there exists  $t_0 \in [0, T_0]$  such that  $m = V_{i_0}(t_0)$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . If  $t_0 = 0$ , then we have  $m > 0$ . Assuming  $t_0 > 0$ , it is not difficult to see that

$$\frac{d}{dt} V_{i_0}(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{V_{i_0}(t_0) - V_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I. \quad (3.3)$$



Assume  $m < 0$ . From (2.1)-(2.4), it follows that

$$\frac{d}{dt}V_{i_0}(t_0) = m(U_{i_0}^\gamma(t_0)\delta^2U_{i_0}(t_0) - \lambda) > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I,$$

$$\frac{d}{dt}V_0(t_0) = m\left(U_0^\gamma(t_0)\delta^2U_0(t_0) + \frac{2}{h}U_0^{\gamma+q}(t_0) - \lambda\right) > 0, \quad i_0 = 0,$$

but these contradict (3.3) and we obtain the desired result.  $\square$

**Lemma 3.3.** *Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.4) and the initial condition at (2.4) verifies  $\varphi_h > 0$  and  $\delta_*^2\varphi_h \geq 0$ . Then  $\frac{dU_i(t)}{dt} \geq 0$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_h)$ .*

**Proof.** Take  $T_0 < T_h$  fixed. Let us define the vector  $W_h(t)$  such that  $W_i(t) = \frac{d}{dt}U_i(t)$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_0]$ . We have

$$\frac{d}{dt}W_i(t) = ((1 + \gamma)U_i^\gamma(t)\delta^2U_i(t)W_i(t) + U_i^{1+\gamma}(t)\delta^2W_i(t)), \quad 1 \leq i \leq I, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_0(t) &= \left( (1 + \gamma)U_0^\gamma(t)\delta^2U_0(t) + \frac{2(1 + \gamma + q)}{h}U_0^{\gamma+q}(t) \right)W_0(t) \\ &\quad + U_0^{1+\gamma}(t)\delta^2W_0(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Let  $K$  be a positive constant satisfying

$$K > \max_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} \{(1 + \gamma)U_i^\gamma(t) | \delta^2U_i(t) |\}$$

and

$$K > \max_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ (1 + \gamma)U_0^\gamma(t) | \delta^2U_0(t) | + \frac{2(1 + \gamma + q)}{h}U_0^{\gamma+q}(t) \right\}.$$

Consider the function  $Z_h(t) = W_h(t)e^{-Kt}$ . Note that  $Z_h(0) \geq 0$  because  $W_h(0) \geq 0$ .

Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_0]$  such that  $Z_i(t) \geq 0$  for  $t \in [0, t_0)$ , but  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Without loss of generality, we may suppose that  $i_0$  is the smallest integer which satisfies the above inequality. Then we have

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \quad (3.6)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I-1, \quad (3.7)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \quad (3.8)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I. \quad (3.9)$$

From relations (3.4)-(3.5) and (3.7)-(3.9), we can easily show that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &\geq ((1 + \gamma)U_{i_0}^\gamma(t_0)\delta^2 U_{i_0}(t_0) - K)Z_{i_0}(t_0) > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I, \\ \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t) &\geq \left( (1 + \gamma)U_0^\gamma(t_0)\delta^2 U_0(t_0) + \frac{2(1 + \gamma + q)}{h} U_0^{\gamma+q}(t_0) - K \right) Z_0(t_0) \\ &> 0, \quad i_0 = 0, \end{aligned}$$

which is a contradiction with (3.6) and the lemma is completely proved.  $\square$

**Remark 3.1.** According to Lemma 3.3, if  $U_h$  is a solution of (2.1)-(2.4) and the initial condition at (2.4) verifies  $\varphi_h > 0$  and  $\delta_*^2 \varphi_h \geq 0$ , then  $U_h(t) > 0$  for  $t \in [0, T_h)$ .

**Lemma 3.4.** Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.4) and the initial condition at (2.4) verifies  $\varphi_h > 0$ ,  $\delta_*^2 \varphi_h \geq 0$  and  $\varphi_i > \varphi_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ . Then  $U_i(t) > U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,  $t \in [0, T_h)$ .

**Proof.** We set  $Z_i(t) = U_i(t) - U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,  $t \in (0, T_h)$ . Let  $t_0$  be the first  $t > 0$  such that  $Z_i(t) > 0$  for  $t \in (0, t_0)$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I-1\}$ . Without loss of generality, we may suppose that  $i_0$  is the smallest integer which satisfies the above inequality. We have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I-2, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I-1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

By a simple computation, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= U_{i_0}^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) \\ &\quad + (1+\gamma) \eta_{i_0}^\gamma(t_0) Z_{i_0}(t_0) \delta^2 U_{i_0+1}(t_0) \text{ if } 1 \leq i_0 \leq I-1 \\ &= U_{i_0}^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) > 0, \\ \frac{d}{dt} Z_0(t_0) &= U_0^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_0(t_0) + \frac{2}{h} U_0^{1+\gamma+q}(t_0) \\ &\quad + (1+\gamma) \eta_0^\gamma(t_0) Z_0(t_0) \delta^2 U_1(t_0) \text{ if } i_0 = 0 \\ &= U_0^{1+\gamma}(t_0) \delta^2 Z_0(t_0) + \frac{2}{h} U_0^{1+\gamma+q}(t_0) > 0, \end{aligned}$$

which contradict the relation (3.10) and the proof is complete.  $\square$

**Theorem 3.5.** *Assume that the problem (1.1) has a solution  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T_d])$  and the initial condition at (2.4) verifies*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ as } h \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

where  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Then, for  $h$  small enough, the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) has a unique solution  $U_h \in C^1([0, T_d], \mathbb{R}^{I+1})$  such that

$$\max_{0 \leq t \leq T_d} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ as } h \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

**Proof.** Let  $\alpha > 0$  be such that

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \alpha \text{ for } t \in [0, T_d]. \quad (3.13)$$

Then the problem (2.1)-(2.4) has for each  $h$  a unique solution  $U_h \in C^1([0, T_h], \mathbb{R}^{I+1})$ . Let  $t(h) \leq \min\{T_d, T_h\}$  be the greatest value of  $t > 0$  such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \quad (3.14)$$

The relation (3.11) implies  $t(h) > 0$  for  $h$  small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ for } t \in (0, t(h)),$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty < 1 + \alpha \text{ for } t \in (0, t(h)). \quad (3.15)$$

Let  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  be the discretization error. Using the Taylor's expansion, we have for  $t \in (0, t(h))$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_i(t) - U_i^{1+\gamma}(t) \delta^2 e_i(t) \\ &= ((1 + \gamma) \xi_i^\gamma(t) \delta^2 u(x_i, t)) e_i(t) + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} e_0(t) - U_0^{1+\gamma}(t) \delta^2 e_0(t) \\ &= \left( (1 + \gamma) \xi_0^\gamma(t) \delta^2 u(x_0, t) + \frac{2}{h} (1 + \gamma + q) \theta_0^{\gamma+q}(t) \right) e_0(t) + O(h^2), \end{aligned}$$

where  $\xi_i(t)$  is the intermediate value between  $U_i(t)$  and  $u(x_i, t)$  for  $i \in \{0, \dots, I\}$  and  $\theta_0(t)$  the one between  $U_0(t)$  and  $u(x_0, t)$ . Using (3.13) and (3.15), there exist  $M$  and  $K$  positive constants such that

$$\frac{d}{dt} e_i(t) - U_i^{1+\gamma}(t) \delta^2 e_i(t) \leq M |e_i(t)| + Kh^2, \quad 0 \leq i \leq I.$$

On the other hand, if we consider the vector  $Z_h(t)$ ,  $t \in (0, t(h))$  defined by

$$Z_i(t) = (\| \varphi_h - u_h(0) \|_\infty + Kh^2) e^{(M+1)t},$$

then it is clear that for  $t \in (0, t(h))$ ,

$$\frac{d}{dt} Z_i(t) - U_i^{1+\gamma}(t) \delta^2 Z_i(t) > M |Z_i(t)| + Kh^2, \quad 0 \leq i \leq I,$$

$$Z_i(0) > |e_i(0)|.$$

From Lemma 3.1, we obtain

$$e_i(t) < Z_i(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in (0, t(h)).$$

By the same argument, we also prove that

$$-e_i(t) < Z_i(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in (0, t(h)).$$

We deduce that

$$\| U_h(t) - u_h(t) \|_\infty \leq (\| U_h(0) - u_h(0) \|_\infty + Kh^2) e^{(M+1)t}, \quad t \in (0, t(h)). \quad (3.16)$$

To complete the proof of this theorem, we have to show that, for  $h$  sufficiently small,  $t(h) = T_d$ . But, if it is not true, for some  $h$ , as small as we like,  $t(h) < T_d$  and, by (3.14) and (3.16), we obtain

$$1 = \| U_h(t(h)) - u_h(t(h)) \|_\infty \leq e^{(M+1)T_d} (\| U_h(0) - u_h(0) \|_\infty + Kh^2).$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as  $h$  tends to zero, we deduce that  $1 \leq 0$ , which is impossible.  $\square$

#### 4. Numerical Blow-up

In this section, we prove that the solution  $U_h$  of the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) blows up in finite time and its semidiscrete blow-up time converges to the real one when the mesh size goes to zero. We set  $(H) : u_0 > 0, u'_0 \leq 0$  and  $u''_0 \geq 0$  in  $[0, 1]$ .

**Theorem 4.1.** *Let  $q > 1$ . Assume that the problem (1.1) has a solution  $u$  which blows up in finite time  $T$  such that  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$  and the initial condition at (2.4) verifies  $\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  as  $h \rightarrow 0$ . Under the assumption (H), the unique solution  $U_h$  of (2.1)-(2.4) blows up in finite time  $T_h$  for sufficiently small  $h$ , and we have the following relation:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

**Proof.** We shall show it by using Theorem 1.4 given by Ushijima in [10]. In this theorem, we have to check three conditions: A0, A1''' and A2' (see [10]).

**Step 1** (Condition A0). The solution  $u$  of (1.1) blows up in finite time  $T$  (see [6, 7]).

**Step 2** (Condition A1'''). We define the energy  $I$  of problem (1.1) by

$$I[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{q+1} u^{q+1}(0, t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.1)$$

From [6], we know that  $u > 0, u_x < 0, u_t > 0$  and  $u_{xx} > 0$ . For any solution  $u$ , this energy is monotone decreasing function of  $t$ . In fact, one can easily check that  $\frac{d}{dt} I[u](t) = - \int_0^1 u^{-1-\gamma}(x, t) u_t^2(x, t) dx < 0$ .

Let us define the functional  $J$  as follows:

$$J[u](t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad t \in [0, T]. \quad (4.2)$$

Denoting  $\alpha = u(1, 0) = u_0(1) > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &= \int_0^1 u_t(x, t) dx \\ &\geq \alpha^\gamma \int_0^1 u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &\geq \alpha^\gamma \frac{q-1}{q+1} u^{q+1}(0, t) - 2\alpha^\gamma I[u_0] \text{ because } I \text{ is decreasing} \quad (4.3) \\ &\geq -2\alpha^\gamma I[u_0] + \alpha^\gamma \frac{q-1}{q+1} \left( u^{q+1}(1, t) - (q+1) \int_0^1 u_x(x, t) u^q(x, t) dx \right). \end{aligned}$$

Since  $u^q$  is positive and  $u_x$  is a continuous and increasing function with respect to  $x$ , there exists  $\xi \in (0, 1)$  such that

$$\int_0^1 u_x(x, t) u^q(x, t) dx = u_x(\xi, t) \int_0^1 u^q(x, t) dx.$$

Denote  $\Gamma_1 = -2\alpha^\gamma I[u_0] + \frac{q-1}{q+1} \alpha^{\gamma+q+1}$  and

$$\Gamma_2 = \inf\{-\alpha^\gamma (q-1) u_x(\xi, t), t \in [0, T]\}.$$

Since  $q > 1$ ,  $\Gamma_2 > 0$ . Thus, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &\geq \Gamma_1 + \Gamma_2 \int_0^1 u^q(x, t) dx \\ &\geq \Gamma_1 + \Gamma_2 (J)^q. \end{aligned} \quad (4.4)$$

We obtain relation (4.4) by using Jensen's inequality.

Define  $H(t) = -2\alpha^\gamma I[u_0] + \alpha^\gamma \frac{q-1}{q+1} u^{q+1}(0, t)$ ,  $t \in [0, T)$ , where  $q > 1$ .

From (4.3), we have  $\frac{d}{dt} J(t) \geq H(t)$ ,  $t \in [0, T)$  and  $\lim_{t \rightarrow T} H(t) = \infty$ , since the blow-up point of  $u$  is  $x = 0$ .

Now, for  $t \in [0, T_h)$ , we denote by

$$I_h[U_h](t) = \frac{1}{2h} \sum_{i=0}^{I-1} (U_{i+1}(t) - U_i(t))^2 - \frac{1}{q+1} U_0^{q+1}(t), \quad (4.5)$$

$$J_h(t) = h \sum_{i=0}^I U_i(t) \quad (4.6)$$

and

$$H_h(t) = -2\alpha_h^\gamma I[\varphi_h] + \alpha_h^\gamma \frac{q-1}{q+1} U_0^{q+1}(t) \text{ with } \alpha_h = \varphi_I \quad (4.7)$$

the numerical approximations of  $I, J$  and  $H$ , respectively.

By a simple computation, we obtain for  $t \in [0, T_h)$ ,

$$\frac{d}{dt} J_h(t) \geq H_h(t) \text{ and } \frac{d}{dt} H_h(t) = \alpha_h^\gamma (q-1) U_0^q(t) \frac{d}{dt} U_0(t) \geq 0.$$

A straightforward calculation yields the following inequality:

$$\frac{d}{dt} J_h(t) \geq \Gamma'_1 + \Gamma'_2 (J_h)^q,$$

where  $\Gamma'_1 = -2\alpha_h^\gamma I[\varphi_h] + \frac{q-1}{q+1} \alpha_h^{\gamma+q+1}$  and

$$\Gamma'_2 = \inf \left\{ -\alpha_h^\gamma (q-1) \frac{U_{k_0+1}(t) - U_{k_0}(t)}{h}, t \in [0, T_h] \right\} > 0$$

with  $k_0 \in \{1, \dots, I-2\}$  fixed.



Putting  $G(s) = \Gamma_1' + \Gamma_2'(s)^q$ , it is clear that

$$\frac{d}{dt} J_h(t) \geq G(J_h),$$

and there exists  $s_0 > 0$  such that

$$\begin{cases} G(s) > 0 \text{ for } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{1}{G(s)} ds < \infty, \text{ since } q > 1. \end{cases}$$

Condition (A''') of Theorem 1.4 in [10] is satisfied. The following condition is the last one to be checked.

**Step 3** (Condition A2'). By virtue of Theorem 3.5, we show that for any  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\varepsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0 \text{ and } \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\varepsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

Finally, conditions A0, A1''' and A2' are satisfied. According to Theorem 1.4 of [10], we obtain the desired results.  $\square$

## 5. Numerical Experiments

In this section, we estimate the numerical blow-up time of (2.1)-(2.4) by using the algorithm proposed by Hirota and Ozawa [4]. This algorithm deals with the numerical blow-up time of ODEs (here, the semidiscrete scheme (2.1)-(2.4)). We first transform the semidiscrete scheme (2.1)-(2.4) into a tractable form by the arc length transformation technique like this:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, & 0 < \ell < \infty, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, & 0 \leq i \leq I, \end{cases} \quad (5.1)$$

where

$$f_0 = \frac{2}{h^2} U_0^{1+\gamma} (U_1 - U_0 + hU_0^q),$$

$$f_i = \frac{1}{h^2} U_i^{1+\gamma} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq I-1,$$

$$f_I = \frac{2}{h^2} U_I^{1+\gamma} (U_{I-1} - U_I).$$

“ $\ell$ ” is called the *arc length* and we have  $d\ell^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^I U_i^2$ . The variables  $t$  and  $U_i$  are functions of  $\ell$ . Secondly, we introduce  $\{v_j\}$  which is a sequence of the arc lengths and we apply an ODE solver to (5.1) for each value of  $v_j$  in order to generate a linearly convergent sequence to the blow-up time. This sequence is finally accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. As an ODE solver, we choose DOP54 which is one of the famous ODE codes. This code is MATLAB version of the FORTRAN code DOPRI5 which has been written by Hairer et al. [3] and in it, there are three tolerance parameters: AbsTol, RelTol and InitialStep. The parameters AbsTol and RelTol specify the tolerances of the relative and absolute errors, respectively, and InitialStep is used to choose the manner in which the errors are controlled (see [4] for more details). For our experiments, we set AbsTol = RelTol =  $1.d - 15$ , InitialStep = 0,  $v_j = 2^{10} \cdot 2^j$  ( $j = 0, \dots, 10$ ) and the initial condition

$$\varphi_i = 0.5 * (i * h)^2 - i * h + 1, \quad 0 \leq i \leq I.$$

In the following tables,  $T_h$  is the approximate blow-up time corresponding to meshes of  $I = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ,  $n$  is the number of iterations and the order ( $s$ ) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

**Table 1.** For  $\gamma = 1, q = 2.5$ 

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.1732215421	3596	-
32	0.1727495113	7101	-
64	0.1726288374	13903	1.97
128	0.1725983897	27241	1.99
256	0.1725907492	54370	1.99
512	0.1725888362	123706	2.00
1024	0.1725883576	389004	2.00

**Table 2.** For  $\gamma = 1, q = 3$ 

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.1273012545	2687	-
32	0.1265198347	5232	-
64	0.1263142204	10176	1.93
128	0.1262615022	19845	1.96
256	0.1262481563	39330	1.98
512	0.1262447989	86031	1.99
1024	0.1262439570	257672	2.00

**Table 3.** For  $\gamma = 1, q = 4$ 

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.0790897664	1800	-
32	0.0778596698	3424	-
64	0.0775170795	6586	1.84
128	0.0774258649	12753	1.91
256	0.0774021827	25059	1.95
512	0.0773961238	52469	1.97
1024	0.0773945872	145195	1.98

**Table 4.** For  $\gamma = 1.5$ ,  $q = 3$ 

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.1273923575	2696	-
32	0.1269426863	5385	-
64	0.1268272067	10615	1.96
128	0.1267980016	20858	1.98
256	0.1267906643	41542	1.99
512	0.1267888261	91737	2.00
1024	0.1267883662	278256	2.00

**Table 5.** For  $\gamma = 3$ ,  $q = 3$ 

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.1312010185	2854	-
32	0.1314809070	6040	-
64	0.1315521545	12273	1.97
128	0.1315700547	24535	1.99
256	0.1315745358	49485	2.00
512	0.1315756565	112619	2.00
1024	0.1315759367	354437	2.00

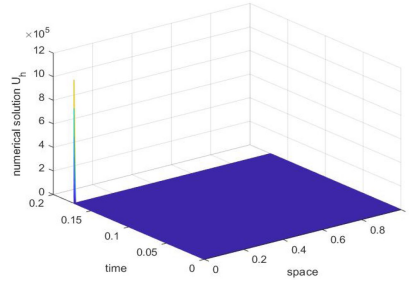
**Table 6.** For  $\gamma = 4$ ,  $q = 3$ 

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.1360632549	3044	-
32	0.1367307783	6628	-
64	0.1368982065	13675	2.00
128	0.1369400888	27599	2.00
256	0.1369505605	56098	2.00
512	0.1369531785	130550	2.00
1024	0.1369538330	418703	2.00

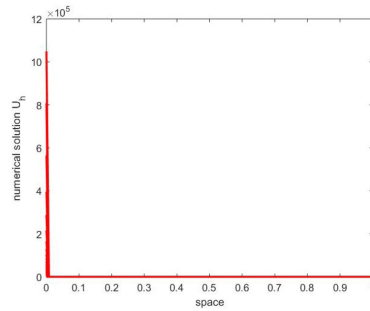
**Remark 5.1.** From the above tables, we can assure the convergence of  $T_h$  to the blow-up time of the solution of (1.1), since the rate of convergence is near 2, which is just the accuracy of the difference approximation in

space. And, it comes from these tables that there is a relationship between  $T_h$ ,  $q$  and  $\gamma$ . In fact, when  $q$  (resp.  $\gamma$ ) increases, then the blow-up is accelerated (resp. delayed).

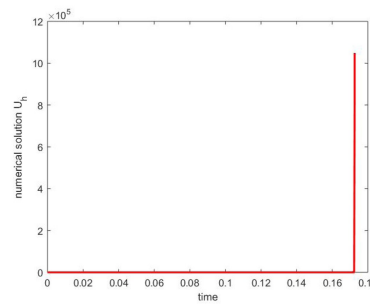
Other illustrations are given by some plots in the following figures:



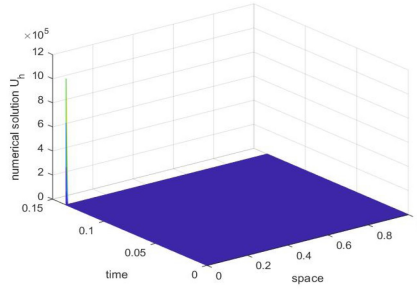
**Figure 1.** Evolution of the numerical solution for  $I = 128$ ,  $\gamma = 1$  and  $q = 2.5$ .



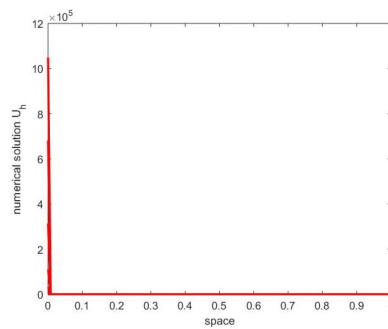
**Figure 2.** Evolution of  $U_h$  according to the node for  $I = 128$ ,  $\gamma = 1$ ,  $q = 2.5$ .



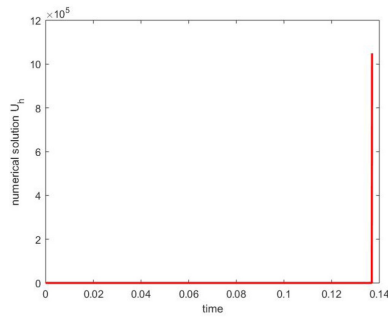
**Figure 3.** Evolution of  $U_h$  according to the time for  $I = 128$ ,  $\gamma = 1$ ,  $q = 2.5$ .



**Figure 4.** Evolution of the numerical solution for  $I = 128$ ,  $\gamma = 4$  and  $q = 3$ .



**Figure 5.** Evolution of  $U_h$  according to the node for  $I = 128$ ,  $\gamma = 4$ ,  $q = 3$ .



**Figure 6.** Evolution of  $U_h$  according to the time for  $I = 128$ ,  $\gamma = 4$ ,  $q = 3$ .

**Remark 5.2.** From Figures 1, 2, 3, 4, 5 and 6, we can observe that the numerical solution blows up in finite time at the first node for  $\gamma > 0$  and

$q > 1$ , which is in agreement with the result established theoretically (see [6, 7]).

### References

- [1] L. M. Abia, J. C. López-Marcos and J. Martínez, Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations, *Appl. Numer. Math.* 20 (1996), 145-156.
- [2] R. Ferreira, P. Groisman and J. D. Rossi, Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 12(4) (2002), 461-483.
- [3] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [4] C. Hirota and K. Ozawa, Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations - an application to the blow-up problems of partial differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 193 (2006), 614-637.
- [5] T. Ishiwata and M. Tsutsumi, Semidiscretization in space of nonlinear degenerate parabolic equations with blow-up of the solution, *J. Comput. Math.* 18(6) (2000), 571-586.
- [6] Jong-Shenq Guo, Blow-up behavior for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 18 (2007), 71-84.
- [7] S. Kavitha and K. Bhakya, Blow-up behavior for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition, *Imperial Journal of Interdisciplinary Research (IJIR)* 2(10) (2016), 93-95.
- [8] K. N'Guessan, D. Nabongo and A. K. Toure, Blow-up for semidiscretizations of some semilinear parabolic equations with a convection term, *Journal of Progressive Research in Mathematics (JPRM)* 5(2) (2015), 499-518.
- [9] Taha M. Mathurin, Touré K. Augustin and Mensah E. Patrice, Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions, *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 60(2) (2012), 125-167.
- [10] T. K. Ushijima, On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 36 (2000), 613-640.

# Blow-up for Semidiscretization of Semilinear Parabolic Equation With Nonlinear Boundary Condition

Ardjouma Ganon<sup>1</sup>, Manin Mathurin Taha<sup>1</sup> & Kidjébo Augustin Touré<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

Correspondence: Ardjouma Ganon, Unité Mixte de Recherche et d'Innovation Mathématiques et Nouvelles Technologies de l'Information, Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire.  
E-mail: ardjaganon@gmail.com

Received: July 23, 2019 Accepted: August 13, 2019 Online Published: September 9, 2019

doi:10.5539/jmr.v11n5p1 URL: <https://doi.org/10.5539/jmr.v11n5p1>

## Abstract

This paper deals with the study of the numerical approximation for the following semilinear equation with a nonlinear absorption term  $u_t = u_{xx} - \lambda u^p$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ , and a nonlinear flux boundary condition  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u_x(1, t) = u^q(1, t)$ ,  $t > 0$ . We give conditions under which the positive semidiscrete solution blows up in a finite time. Convergence of the numerical blow-up time to the theoretical one when the mesh size goes to zero is established. Finally, we use an efficient algorithm to estimate the blow-up time.

**Keywords:** semilinear equation, numerical blow-up, nonlinear boundary, finite differences, arc length transformation, Aitken  $\Delta^2$  method

## 1. Introduction

Consider the following semilinear parabolic problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \lambda u^p, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = u^q(1, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

where  $p, q > 1$ ,  $\lambda > 0$  are given constants, and  $u_0$  is a positive smooth function defined on  $[0, 1]$  such that  $u'_0(0) = 0$  and  $u'_0(1) = u_0^q(1)$ . It is proved that regularity solutions exist for this problem see (Gómez, Márquez, & Wolanski, 1993). For differential equations, solutions can become unbounded in finite time, we say that they blow up, or they can be defined for all time and we call them global solutions. We call a blow-up point, the point of the space where the solution become unbounded in finite time.

For problem (1), Gómez J. L. et al. (Gómez et al., 1993) prove that under certain conditions on  $u_0$ ,  $\lambda$ ,  $p$  and  $q$ , blow-up occurs in finite time at the boundary  $x = 1$ ; in particular,

- when  $p < q$  and  $u_0 > u_\lambda$  where  $u_\lambda$  is the unique positive stationary solution,
- when  $p = q$ ,  $u_0 > 0$  and  $\lambda < 1$ .

Rossi J. D. (Rossi, 1998) investigated the blow-up rate for positive solutions of problem (1). He also characterize the blow-up profile in similarity variables. Problem (1) can be considered as a heat conduction problem. In this case,  $u$  represents the temperature, see (Assalé, Boni, & Diabate, 2008).

we focus in this paper on the numerical approximations of (1). Since the solution  $u$  blows up in finite time, it is worth asking what can be stated about numerical approximations of this type of problems. For previous work on numerical approximations of blowing up solutions we refer to (Abia, López-Marcos, & Martínez, 1996; Adou, Touré, & Coulibaly, 2019; Assalé et al., 2008; Dratman, 2010; Edja, Touré, & Koua, 2018; Ganon, Taha, & Touré, 2019; N'dri, Touré, & Yoro, 2018; Touré, N'Guessan, & Diabate, 2015; Taha, Touré, & Mensah, 2012 and references therein).

This paper is structured as follows : in section 2, we introduce a semidiscrete scheme of the problem (1). In Section 3, we give some properties of this semidiscrete scheme. In Section 4, under suitable conditions, we show that the semidiscrete solution blows up in a finite time and this numerical blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in section 5, we illustrate our analysis by giving some numerical results.



### 2. Semidiscrete Problem

Let  $I$  be a positive integer and define the grid  $x_i = ih, i = 0, \dots, I$ , where  $h = \frac{1}{I}$  is the mesh parameter. We approximate the solution  $u$  of the problem (1) by the solution  $U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$  of the following semidiscrete scheme

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \delta^2 U_i(t) - \lambda U_i^p(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h), \tag{2}$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t) - \lambda U_I^p(t), \quad t \in (0, T_h), \tag{3}$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \tag{4}$$

where for  $t \in (0, T_h)$ ,

$$\begin{aligned} \delta^2 U_i(t) &= \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \\ \delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} \end{aligned}$$

and  $[0, T_h)$ , the maximal time interval on which  $\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$  is finite. We say that  $U_h(t)$  blows up in a finite time if the time  $T_h$  is finite, and  $T_h$  is called the blow-up time of  $U_h(t)$ .

Denote

$$\delta_*^2 U_i(t) = \begin{cases} \delta^2 U_i(t) & \text{if } i = 0, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^q(t) & \text{if } i = I. \end{cases}$$

### 3. Properties of the Semidiscrete Problem

The below comparison lemma is another form of the maximum principle for the semidiscrete equations.

**Lemma 1** Let  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , if  $V_h, W_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  are such that

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) - f(V_i(t)) < \frac{dW_i(t)}{dt} - \delta^2 W_i(t) - f(W_i(t)), \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in (0, T), \tag{5}$$

$$V_i(0) < W_i(0), \quad i = 0, \dots, I, \tag{6}$$

then we have  $V_i(t) < W_i(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in (0, T)$ .

*Proof.* Let us define the functions  $Z_i(t) = W_i(t) - V_i(t), 0 \leq i \leq I, t \in [0, T)$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T)$  such that  $Z_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0), 0 \leq i \leq I$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . It is not difficult to see that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{if } 1 \leq i_0 \leq I-1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_1(t_0) - 2Z_0(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{if } i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{2Z_{I-1}(t_0) - 2Z_I(t_0)}{h^2} \geq 0 \quad \text{if } i_0 = I, \end{aligned}$$

which implies that

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - f(W_{i_0}(t_0)) + f(V_{i_0}(t_0)) \leq 0,$$

but this inequality contradicts (5) and the proof is complete.

**Lemma 2** Let  $U_h$  be a solution of (2)-(4). Then,

$$U_i(t) > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in [0, T_h).$$

*Proof.* Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_h)$  such that  $U_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0)$ ,  $0 \leq i \leq I$ , but  $U_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . One can easily check that

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_{i_0}(t_0) - U_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{U_{i_0+1}(t_0) - 2U_{i_0}(t_0) + U_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{if } 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{2U_1(t_0) - 2U_0(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{if } i_0 = 0, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{2U_{I-1}(t_0) - 2U_I(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{if } i_0 = I, \end{aligned}$$

which implies that

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 U_{i_0}(t_0) + \lambda U_{i_0}^p(t_0) &< 0, \quad \text{if } 0 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \frac{dU_I(t_0)}{dt} - \delta^2 U_I(t_0) - \frac{2}{h} U_I^q(t_0) + \lambda U_I^p(t_0) &< 0, \quad \text{if } i_0 = I. \end{aligned}$$

But these inequalities contradict (2)-(4) and we get the expected result.

**Lemma 3** Let  $U_h$  be a solution of (2)-(4) and the initial condition at (4) verifies

$$\delta_x^2 \varphi_i - \lambda \varphi_i^p > 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Then,  $\frac{dU_i(t)}{dt} > 0$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_h)$ .

*Proof.* Consider the functions  $W_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_h)$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_h)$  such that  $W_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0)$ , but  $W_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . We may assume without loss of generality that  $i_0$  is the smallest integer which satisfies the above equality. Then we have

$$\begin{aligned} \frac{dW_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{W_{i_0}(t_0) - W_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 W_{i_0}(t_0) &= \frac{W_{i_0+1}(t_0) - 2W_{i_0}(t_0) + W_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 W_{i_0}(t_0) &= \frac{2W_1(t_0) - 2W_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 W_{i_0}(t_0) &= \frac{2W_{I-1}(t_0) - 2W_I(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I, \end{aligned}$$

which implies by a simple computation that

$$\frac{dW_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 W_{i_0}(t_0) + \lambda p U_{i_0}^{p-1}(t_0) W_{i_0}(t_0) < 0 \quad \text{if } 0 \leq i_0 \leq I - 1, \tag{7}$$

$$\frac{dW_I(t_0)}{dt} - \delta^2 W_I(t_0) + \left( \lambda p U_I^{p-1}(t_0) - \frac{2q}{h} U_I^{p-1}(t_0) \right) W_I(t_0) < 0 \quad \text{if } i_0 = I. \tag{8}$$

But inequalities (7)-(8) contradict (2)-(3), and the lemma is proved.

**Lemma 4** Let  $U_h$  be a solution of (2)-(4) and the initial condition at (4) verifies

$$\varphi_i < \varphi_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Then,  $U_i(t) < U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I - 1$ ,  $t \in [0, T_h)$ .

*Proof.* Let  $t_0$  be the first  $t > 0$  such that  $U_{i+1}(t) - U_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0)$ ,  $0 \leq i \leq I - 1$ , but  $U_{i_0+1}(t) - U_{i_0}(t) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I - 1\}$ . We may suppose without loss of generality that  $i_0$  is the smallest integer which verifies the

above equality. Let us now consider the functions  $Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$  for  $0 \leq i \leq I - 1, t \in [0, T_h]$ . We have

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I - 1, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 2, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_1(t_0) - 3Z_0(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{I-2}(t_0) - 3Z_{I-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad i_0 = I - 1, \end{aligned}$$

which implies that

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + \lambda(U_{i_0+1}^p(t_0) - U_{i_0}^p(t_0)) < 0 \quad \text{if } 0 \leq i_0 \leq I - 2, \tag{9}$$

$$\frac{dZ_{I-1}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{I-1}(t_0) - \frac{2}{h} U_I^q(t_0) + \lambda(U_I^p(t_0) - U_{I-1}^p(t_0)) < 0 \quad \text{if } i_0 = I - 1. \tag{10}$$

The inequalities (9)-(10) contradict (2)-(3) and the desired result follows.

The following theorem gives conditions under which the solution  $U_h$  of (2)-(4) converges to the corresponding one of (1).

**Theorem 1** Assume that the problem (1) has a solution  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T_d])$  and the initial condition at (4) verifies

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ as } h \rightarrow 0, \tag{11}$$

where  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Then, for  $h$  small enough, the semidiscrete problem (2)-(4) has a unique solution  $U_h \in C^1([0, T_d], \mathbb{R}^{I+1})$  such that

$$\max_{0 \leq t \leq T_d} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ as } h \rightarrow 0. \tag{12}$$

*Proof.* Let  $\gamma > 0$  be such that

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \gamma \text{ for } t \in [0, T_d]. \tag{13}$$

Then the problem (2)-(4) has for each  $h$ , a unique solution  $U_h \in C^1([0, T_h], \mathbb{R}^{I+1})$ .

Let  $t(h) \leq \min\{T_d, T_h\}$  be the greatest value of  $t > 0$  such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \tag{14}$$

The relation (11) implies  $t(h) > 0$  for  $h$  small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ for } t \in (0, t(h)),$$

which leads to

$$\|U_h(t)\|_\infty < 1 + \gamma \text{ for } t \in (0, t(h)). \tag{15}$$

Let  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t), t \in (0, t(h))$  be the discretization error and consider the function

$$Z(x, t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)t+Cx^2}$$

where  $M, L, C$  are non-negative constants. We denote by  $Z(x_i, t)$  the discretisation in space of  $Z(x, t)$ .

For suitable non-negative constants  $M, L, C$ , we prove, using Lemma 1 that

$$|e_i(t)| < Z(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in (0, t(h)), \quad \text{see (Taha et al., 2012) for more details.}$$

We deduce that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)t+C}, \quad t \in (0, t(h)). \tag{16}$$

Now, we prove that  $t(h) = T_d$ . Suppose that  $t(h) < T_d$ . From (14) and (16), we obtain

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)T_d+C}.$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as  $h$  tends to zero, we deduce that  $1 \leq 0$ , which is impossible.

**4. Numerical Blow-up**

From now on, we suppose  $u_0(1) \geq 1$ . Under suitable assumptions, we prove that the solution  $U_h$  of the semidiscrete problem (2)-(4) blows up in finite time and that its semidiscrete blow-up time converges to the real one when the mesh size goes to zero.

We set

$$(H_1) : \quad u_0 > 0, \quad u'_0 \geq 0 \quad \text{and} \quad u''_0 - \lambda u_0^p > 0 \quad \text{in} \quad [0, 1],$$

$$(H_2) : \quad p \leq q \quad \text{and} \quad 0 < \lambda < \frac{(q-1)(p+1)}{(q+1)(p-1)}.$$

**Theorem 2** *Let  $q > 2$ . Assume that the problem (1) has a solution  $u$  which blows up in finite time  $T$  such that  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T))$  and the initial condition at (4) verifies  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  as  $h \rightarrow 0$ . Under the assumptions  $(H_1)$  and  $(H_2)$ , the unique solution  $U_h$  of (2)-(4) blows up in finite time  $T_h$  for sufficiently small  $h$ , and we have :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

*Proof.* For the proof, we use the Theorem 1.4 given in (Ushijima, 2000). We have to check conditions A0, A1''' and A2' of this theorem before applying it.

**Step 1 (Condition A0)** The solution  $u$  of (1) blows up in finite time  $T$  see (Gómez et al., 1993).

**Step 2 (Condition A1''')** We define the energy  $I$  of problem (1) by

$$I[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{q+1} u^{q+1}(1, t) + \frac{\lambda}{p+1} \int_0^1 u^{p+1}(x, t) dx, \quad t \in [0, T). \tag{17}$$

For any solution  $u$ , this energy  $I$  is monotone non-increasing function of  $t$ . In fact,

$$\frac{d}{dt} I[u](t) = - \int_0^1 u_t^2(x, t) dx \leq 0.$$

Because assumption  $(H_1)$  holds, we know from (Gómez et al., 1993) that  $u > 0$ ,  $u_t \geq 0$  and from (Chipot, Fila, & Quittner, 1991) that  $u_x \geq 0$ .

Introduce the functional  $J$  as follows :

$$J[u](t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx, \quad t \in [0, T). \tag{18}$$

We have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= 2 \left( -2I[u](t) + \frac{q-1}{q+1} u^{q+1}(1, t) - \lambda \frac{p-1}{p+1} \int_0^1 u^{p+1}(x, t) dx \right) \\ &\geq -4I[u](t) + 2 \frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)} u^{q+1}(1, t) \quad \text{because } u_0(1) \geq 1 \\ &\geq -4I[u_0] + 2 \frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)} u^{q+1}(1, t) \quad \text{because } I \text{ is non-increasing.} \end{aligned} \tag{19}$$

Set  $\alpha = 2 \frac{(q-1)(p+1) - \lambda(q+1)(p-1)}{(q+1)(p+1)} > 0$  because of  $H_2$ .

Then we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(t) &\geq -4I[u_0] + \alpha u^{q+1}(1, t) \\ &= -4I[u_0] + \alpha \left( u^{q+1}(0, t) + (q+1) \int_0^1 u_x(x, t) u^q(x, t) dx \right). \end{aligned} \tag{20}$$

Since  $u_t$  is nonnegative, we have  $u_{xx} \geq 0$ . Which implies that  $u_x$  is a continuous and non-decreasing function with respect to  $x$ . Then, there exists  $\xi(t) \in (0, 1)$  such that  $\int_0^1 u_x(x, t)u^q(x, t)dx = u_x(\xi(t), t) \int_0^1 u^q(x, t)dx$ .

Denote  $\Gamma_1 = -4I[u_0] + \alpha u_0^{q+1}(0)$  and  $\Gamma_2 = \inf \{ \alpha(q+1)u_x(\xi(t), t), t \in [0, T] \}$ . Thus, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(t) &\geq \Gamma_1 + \Gamma_2 \int_0^1 u^q(x, t)dx \\ &\geq \Gamma_1 + \Gamma_2(J)^{q/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

We obtain relation (21) by using Jensen's inequality.

Define  $H(t) = -4I[u_0] + \alpha u^{q+1}(1, t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

From (19), we have  $\frac{d}{dt}J(t) \geq H(t)$ ,  $t \in [0, T]$  and  $\lim_{t \rightarrow T} H(t) = \infty$  since the blow-up point of  $u$  is  $x = 1$ .

Now, for  $t \in [0, T_h)$ , we denote by

$$I_h[U_h](t) = \frac{1}{2h} \sum_{i=0}^{I-1} (U_{i+1}(t) - U_i(t))^2 - \frac{1}{q+1} U_I^{q+1}(t) + \frac{\lambda h}{p+1} \sum_{i=0}^I U_i^{p+1}(t), \tag{22}$$

$$J_h(t) = h \sum_{i=0}^I U_i^2(t), \tag{23}$$

$$H_h(t) = -4I[\varphi_h] + \alpha U_I^{q+1}(t), \tag{24}$$

the numerical approximations of  $I, J$  and  $H$ , respectively.

By a simple computation, we obtain for  $t \in [0, T_h)$ ,

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq H_h(t) \text{ and } \frac{dH_h(t)}{dt} = \alpha(q+1)U_I^q(t) \frac{dU_I(t)}{dt} \geq 0.$$

A straightforward calculation yields the following inequality

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq \Gamma'_1 + \Gamma'_2(J_h)^{q/2},$$

where  $\Gamma'_1 = -4I[\varphi_h] + \alpha \varphi_0^{q+1}$  and

$$\Gamma'_2 = \inf \left\{ \alpha(q+1) \frac{U_{k_0+1}(t) - U_{k_0}(t)}{h}, t \in [0, T_h] \right\} > 0, \text{ with } k_0 \in \{1, \dots, I-2\} \text{ fixed.}$$

Putting  $G(s) = \Gamma'_1 + \Gamma'_2(s)^{q/2}$ , it is clear that

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq G(J_h),$$

and there exists  $s_0 > 0$  such that

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{for } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{1}{G(s)} ds < \infty & \text{since } q > 2. \end{cases}$$

Condition (A''') of theorem 1.4 in (Ushijima, 2000) is satisfied.

**Step 3 (Condition A2')** By virtue of theorem 1, we show that for any  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0 \text{ and } \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

Finally, conditions A0, A1''' and A2' are satisfied. According to theorem 1.4 of (Ushijima, 2000), we obtain the desired results.

### 5. Numerical Experiments

In this section, we estimate the blow-up time of (2)-(4) by using the algorithm proposed by C. Hirota and K. Ozawa (Hirota & Ozawa, 2006). This algorithm deals with the numerical blow-up time of ODEs (here, the semidiscrete scheme (2)-(4)). We first use the arc length transformation technique to transform the semidiscrete scheme (2)-(4) like this :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, & 0 < \ell < \infty, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I, \end{cases} \tag{25}$$

where

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{h^2}(U_1 - U_0) - \lambda U_0^p(t), \\ f_i &= \frac{1}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) - \lambda U_i^p(t), \quad 1 \leq i \leq I - 1, \\ f_I &= \frac{2}{h^2}(U_{I-1} - U_I) + \frac{2}{h} U_I^q(t) - \lambda U_I^p(t), \end{aligned}$$

" $\ell$ " is such that  $\ell^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^I U_i^2$  and is called the arc length.

The variables  $t$  and  $U_i$  are fonctions of  $\ell$ , and it is proved in (Hirota & Ozawa, 2006) that

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} t(\ell) = T_h \quad \text{and} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|U_h(\ell)\|_\infty = \infty.$$

Then we introduce  $\{\ell_j\}$ , a sequence of the arc length and we apply an ODE solver to (25) for each value of  $\{\ell_j\}$  in order to generate a sequence that converges linearly to the blow-up time. This sequence is finally accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method see (Hirota & Ozawa, 2006). As ODE solver, we have chosen DOP54. This code is MATLAB version of the well-known FORTRAN code DOPRI5 which has been written by Hairer and Wanner (Hairer, Nørsett, & Wanner, 1993). We find in DOP54, three tolerances parameters, RelTol, AbsTol and InitialStep. RelTol and AbsTol parameters indicate the tolerances of relative and absolute errors respectively, and we use InitialStep to choose how errors are controlled, see (Hirota & Ozawa, 2006) for more details. For our experiments we set RelTol= AbsTol = 1.d-15, InitialStep = 0,  $\ell_j = 2^{10} \cdot 2^j$  ( $j = 0, \dots, 12$ ) and the initial data

$$\varphi_i = e^{i^*h - \ln(e^1 - 1)} - \frac{i * h}{e^1 - 1}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

This initial data guarantees that if  $q$  increases, the flow on the boundary also increases since  $U_I(t) \geq \varphi_I = 1, t > 0$ . But it can not ensure the growth of the absorption term in the equation by that of  $p$  because  $0 < \varphi_i \leq 1, i = 0, \dots, I$ . Obviously, if  $\lambda$  increases, the absorption term in the equation also becomes large.

In the following tables,  $T_h$  is the approximate blow-up time corresponding to meshes of  $I = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ,  $n$  is the number of iterations and the order ( $s$ ) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}$$

Table 1. For  $p = 2.5, q = 2.5, \lambda = 0.5$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.216 071 202	4154	-
32	0.210 906 554	6952	-
64	0.209 320 480	12404	1.70
128	0.208 851 002	23101	1.76
256	0.208 715 516	44733	1.79
512	0.208 677 132	97408	1.82
1024	0.208 666 410	293764	1.84

Table 2. For  $p = 2.5, q = 3, \lambda = 0.5$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.146 361 159	3086	-
32	0.142 014 795	5194	-
64	0.140 656 932	9289	1.68
128	0.140 250 111	17290	1.74
256	0.140 131 638	33341	1.78
512	0.140 097 837	70399	1.81
1024	0.140 088 342	202200	1.83

Table 3. For  $p = 2.5, q = 4, \lambda = 0.5$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.084 607 888	2020	–
32	0.081 038 633	3425	–
64	0.079 895 889	6155	1.64
128	0.079 548 019	11473	1.72
256	0.079 445 569	22048	1.76
512	0.079 416 093	45078	1.80
1024	0.079 407 758	120059	1.82

Table 4. For  $p = 2.5, q = 3, \lambda = 1$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.184 326 256	3342	–
32	0.178 963 408	5666	–
64	0.177 345 272	10193	1.73
128	0.176 872 688	19073	1.78
256	0.176 737 698	37068	1.81
512	0.176 699 759	81769	1.83
1024	0.176 689 229	248435	1.85

Table 5. For  $p = 2.5, q = 3, \lambda = 1.2$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.207 781 947	3481	–
32	0.201 749 362	5923	–
64	0.199 961 413	10684	1.75
128	0.199 446 098	20047	1.79
256	0.199 300 396	39162	1.82
512	0.199 259 776	88792	1.84
1024	0.199 248 575	276972	1.86

**Remark 1**

- From the tables above, we can ensure the convergence of  $T_h$  to the blow-up time of the solution of (1), since the order ( $s$ ) of the method goes to 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space.
- It comes from these tables that there is a relationship between the blow-up time, the flow on the boundary and the absorption term in the equation. In fact, when the absorption term in the equation is constant ( $p = 2.5, \lambda = 0.5$ ) and that the flow on the boundary increases (by  $q = 2.5$  to  $q = 4$ ), then the blow-up is accelerated (from 0.208 to 0.079) see Tables 1-3. Whereas when the flow on the boundary is a constant ( $q = 3$ ) and that the absorption term in the equation becomes large (by  $\lambda = 0.5$  to  $1.2$  with  $p = 2.5$ ), then the blow-up is delayed (from 0.140 to 0.199) see Tables 2, 4, 5.
- The numerical method used in this paper has some advantages. Firstly, to obtain the numerical blow-up, we are not obliged to put an additional condition on the initial data, which is not the case of some numerical methods (see Theorem 4.3, Theorem 8.6 in (Assalé et al., 2008) and Theorem 6 in (Adou et al., 2019)). Secondly, when the mesh size goes to zero, that is  $I$  becomes large, with the method of this paper, the number of iterations  $n$  increases slowly. This fact allow us to obtain easily results for high values of  $I$  ( $I = 512, 1024$ ).

Others illustrations are given by some plots in the below figures.

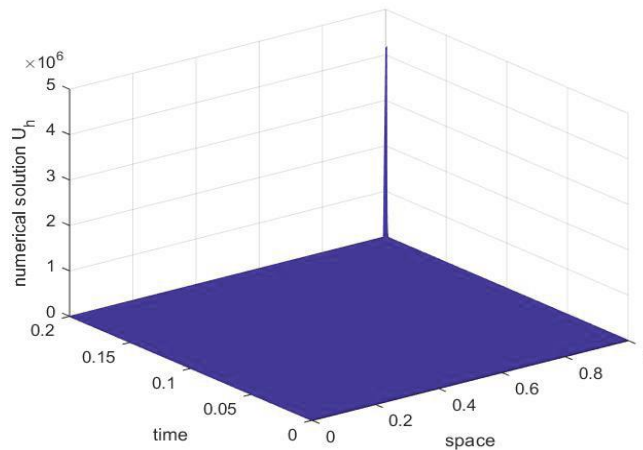


Figure 1. Evolution of the numerical solution for  $I = 128, p = 2.5, q = 3$  and  $\lambda = 1.2$

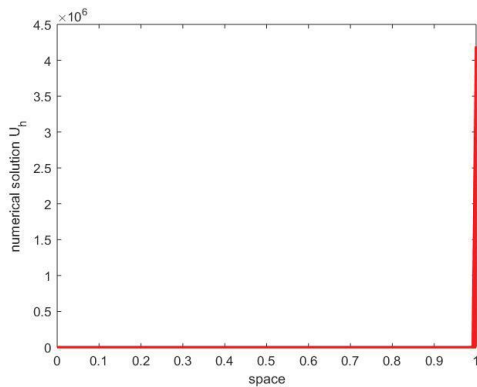


Figure 2. Evolution of  $U_h$  according to the node for  $I = 128$ ,  $p = 2.5$ ,  $q = 3$  and  $\lambda = 1.2$

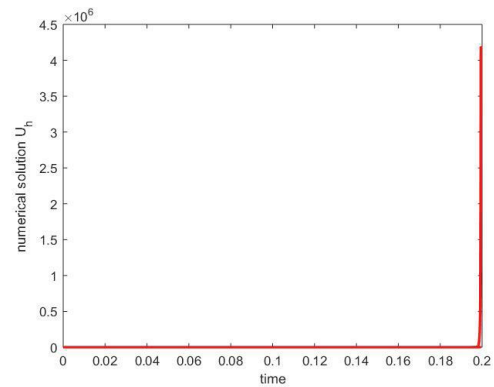


Figure 3. Evolution of  $U_h$  according to the time for  $I = 128$ ,  $p = 2.5$ ,  $q = 3$  and  $\lambda = 1.2$

### Remark 2

From the Figures 1, 2 and 3, we can observe that the numerical solution blows up in finite time at the last node, which is in agreement with the result established theoretically (Gómez et al., 1993 and Chipot et al., 1991).

### References

- Abia, L. M., López-Marcos, J. C., & Martínez, J. (1996). Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations. *Appl. Numer. Math.*, 20, 145-156. [https://doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00122-0](https://doi.org/10.1016/0168-9274(95)00122-0)
- Adou, K. A., Touré, K. A., & Coulibaly, A. (2019). On the computation of the numerical blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation. *International Journal of Numerical Methods and Applications*, 18(1), 7-18. <https://doi.org/10.17654/NM018010007>
- Assalé, L. A., Boni, T. K., & Diabate, N. (2008). Numerical Blow-Up Time for a Semilinear Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Conditions. *Journal of Applied Mathematics*, 2008, 1-30. <https://doi.org/10.1155/2008/753518>
- Chipot, M., Fila, M., & Quittner, P. (1991). Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LX(1), 35-103. <https://doi.org/10.5167/uzh-22758>
- Dratman, E. (2010). Approximation of the solution of certain nonlinear ODEs with linear complexity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233, 2339-2350. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.10.019>
- Edja, K. B., Touré, K. A., & Koua, B. J-C. (2018). Numerical Blow-up for A Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions. *Journal of Mathematics Research*, 10(5), 119-128. <https://doi.org/10.5539/jmr.v10n5p119>
- Ganon, A., Taha, M. M., & Touré, K. A. (2019). Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 114(1), 19-38. <https://doi.org/10.17654/MS114010019>
- Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff problems*. Springer Series in Comput. Math., 2nd ed., Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
- Hirota, C., & Ozawa, K. (2006). Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations—An application to the blow-up problems of partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 193, 614-637. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.069>
- Gómez, J. L., Márquez, V., & Wolanski, N. (1993). Dynamic behavior of positive solutions to reaction-diffusion problems with nonlinear absorption through the boundary. *Rev. Unión Matemática Argentina*, 38, 196-209. <https://inmabb.criba.edu.ar/revuma/pdf/v38n3y4/p196-209.pdf>
- N'dri, K. C., Touré, K. A., & Yoro, G. (2018). Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary



conditions. *International Journal of Numerical Methods and Applications*, 17, 141-160.  
<https://doi.org/10.17654/NM017340141>

Touré, K. A., N'Guessan, K., & Diabate, N. (2015). Blow-up for Semidiscretizations of some Reaction-Diffusion Equations with a Nonlinear Convection Term. *Global Journal of Pure and Applied Math*, 11(6), 4273-4296.

Rossi, J. D. (1998). The Blow-up Rate for a Semilinear Parabolic Equation with a Nonlinear Boundary Condition. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXVII(2), 343-350.

Taha, M. M., Touré, K. A., & Mensah, E. P. (2012). Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 60(2), 125-167.

Ushijima, T. K. (2000). On the Approximation of Blow-up Time for Solutions of Nonlinear Parabolic Equations. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 36, 613-640. <https://doi.org/10.2977/prims/1195142812>

### Copyrights

Copyright for this article is retained by the author(s), with first publication rights granted to the journal.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

**NUMERICAL BLOW-UP ON WHOLE DOMAIN FOR A QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITION**ARDJOURA GANON<sup>1</sup>, MATHURIN M. TAHA, AND AUGUSTIN K. TOURÉ

ABSTRACT. This paper deals with numerical approximation of the following quasilinear parabolic equation  $u_t = u^{1+\gamma}u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ , with a nonlinear boundary condition  $u_x(0, t) = -u^q(0, t)$ ,  $u_x(1, t) = 0$ ,  $t > 0$ . We show that the solution of the semidiscrete scheme, obtained by the finite differences method blows up in a finite time when  $0 < q < 1$ . Convergence of the numerical blow-up time to the theoretical one when the mesh size goes to zero is also established. Finally, we give some numerical results to illustrate certain point of our work.

**1. INTRODUCTION**

Consider the following parabolic quasilinear problem:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t = u^{1+\gamma}u_{xx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = -u^q(0, t), \quad u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases}$$

where  $\gamma > 0$  and  $q > 0$  are given constants, and  $u_0$  is a positive bounded smooth function defined on  $[0, 1]$  such that  $u'_0(0) = -u_0^q(0)$  and  $u'_0(1) = 0$ . The problem (1.1) arises in fluid dynamics, which is essentially the study of gases and liquids in motion, see [11] for more details. From the standard

<sup>1</sup>corresponding author

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35B44, 35B51, 35K59.

*Key words and phrases.* Quasilinear equation, numerical blow-up, nonlinear boundary, finite differences, arc length transformation, Aitken method.

theory of parabolic equation, local existence and uniqueness of positive solution of the above problem follow. A solution of a evolution equation is said to blow-up in finite time if this solution become unbounded in that finite time. We call blow-up point, the point of the space where solution become unbounded. The set of all blow-up points is called the blow-up set.

We know from Jong-Shenq Guo [8] and from Kavitha S., Bhakya K. [11] that, if  $q > 0$  and for every positive bounded smooth initial data  $u_0$ , the solution  $u$  of (1.1) blows up in finite time  $T$ . Moreover, if  $q > 1$ ,  $u'_0 \leq 0$  and  $u''_0 \geq 0$  in  $[0, 1]$ ,  $x = 0$  is the only blow-up point. But if  $0 < q < 1$ ,  $u'_0 \leq 0$  and  $u''_0 \geq 0$  in  $[0, 1]$ , blow-up occurs on the whole space  $[0, 1]$ , see [8].

The blow-up phenomenon has been the focus of many authors in recent years. Some were interested in the theoretical analysis [5, 8, 11], and others in the numerical one [1, 2, 4, 10, 6, 7, 12].

This work is concerned with the numerical approximations of (1.1) for the case  $0 < q < 1$ . The case  $q > 1$  has been studied in [6] by Ganon, Taha, Touré. Our aim is to prove the blow-up of the numerical solution and the convergence of the numerical blow-up time without put strong assumption on initial data (we only use assumptions that guarantee the blow-up of solution of the continuous problem), which is not the case of some numerical methods (see Theorems 5-8 in [1] and relation (35) and Remark 3.1 in [3]).

This paper is organized as follows : in the next section, we present a semidiscrete scheme of the problem (1.1). In Section 3, we give some properties of this semidiscrete scheme. In Section 4, under suitable conditions, we prove that the solution of the semidiscrete scheme of (1.1) blows up in finite time and the numerical blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we illustrate our analysis by giving some numerical results.

## 2. SEMIDISCRETE PROBLEM

Let  $I$  be a positive integer and define the grid  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \dots, I$ , where  $h = \frac{1}{I}$  is the mesh parameter. We approximate the solution  $u$  of the

problem (1.1) by the solution  $U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$  of the following semidiscrete scheme

$$(2.1) \quad \frac{dU_i(t)}{dt} = U_i^{1+\gamma}(t)\delta^2U_i(t), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h),$$

$$(2.2) \quad \frac{dU_0(t)}{dt} = U_0^{1+\gamma}(t) \left( \delta^2U_0(t) + \frac{2}{h}U_0^q(t) \right), \quad t \in (0, T_h),$$

$$(2.3) \quad \frac{dU_I(t)}{dt} = U_I^{1+\gamma}(t)\delta^2U_I(t), \quad t \in (0, T_h),$$

$$(2.4) \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I,$$

where for  $t \in (0, T_h)$ ,

$$\delta^2U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2},$$

$$\delta^2U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2},$$

and  $[0, T_h)$ , the maximal time interval on which  $\|U_h(t)\|_\infty$  is finite, with  $\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$ . When  $T_h$  is finite, we say that the solution  $U_h(t)$  blows up in finite time and the time  $T_h$  is called the blow-up time of the solution  $U_h(t)$ .

Denote

$$\delta_*^2U_i(t) = \begin{cases} \delta^2U_i(t) & \text{if } i = 1, \dots, I, \\ \delta^2U_0(t) + \frac{2}{h}U_0^q(t) & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

### 3. PROPERTIES OF THE SEMIDISCRETE SCHEME

In this section, we give some important results on the semidiscrete scheme that have been proved in [6], namely :

Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.4),

- 1) then  $U_i(t) \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ ,  $t \in (0, T_h)$  ;
- 2) if the initial data at (2.4) verifies  $\delta_*^2\varphi_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, I$ , then  $\frac{dU_i(t)}{dt} \geq 0$  and  $U_i(t) > 0$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_h)$  ;
- 3) if the initial data at (2.4) verifies  $\delta_*^2\varphi_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, I$  and  $\varphi_i > \varphi_{i+1}$ , then  $U_i(t) > U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,  $t \in [0, T_h)$ .

The following theorem, proved in [6] shows that under appropriate conditions, problem (2.1)-(2.4) has a unique solution that converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero.

**Theorem 3.1.** *Assume that the problem (1.1) has a solution  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T_d])$  and the initial condition at (2.4) verifies  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  as  $h \rightarrow 0$ , where  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Then, for  $h$  small enough, the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) has a unique solution  $U_h \in C^1([0, T_d], \mathbb{R}^{I+1})$  such that*

$$\max_{0 \leq t \leq T_d} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ as } h \rightarrow 0.$$

#### 4. NUMERICAL BLOW-UP

In this section, we prove that the solution  $U_h$  of the semidiscrete problem (2.1)-(2.4) blows up in finite time and its semidiscrete blow-up time converges to the real one when the mesh size goes to zero.

We set (H) :  $u_0 > 0$ ,  $u'_0 \leq 0$  and  $u''_0 \geq 0$  in  $[0, 1]$ .

**Theorem 4.1.** *Let  $0 < q < 1$ . Assume that the problem (1.1) has a solution  $u$  which blows up in finite time  $T$  such that  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T))$  and the initial condition at (2.4) verifies  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  as  $h \rightarrow 0$ . Under the assumption (H), the unique solution  $U_h$  of (2.1)-(2.4) blows up in finite time  $T_h$  for sufficiently small  $h$ , and we have the following relation :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

*Proof.* We prove Theorem 4.1 by using the Theorem 1.1 given in [13] by Ushijima. The proof consists in checking three conditions : conditions A0, A1 and A2 (see [13]).

**Step 1 (Condition A0)** The solution  $u$  of (1.1) blows up in finite time  $T$  (see [8, 11]).

**Step 2 (Condition A1)** From [8], we know that  $u > 0$ ,  $u_x < 0$ ,  $u_t > 0$  and  $u_{xx} > 0$ . Let us define the functional  $J$  as follows :

$$J[u](t) = \int_0^1 u^{\frac{1-q}{\varepsilon(q)}}(x, t) dx, \quad t \in [0, T),$$

where  $\varepsilon(q) > \frac{1-q}{q}$ .

It is not hard to see that

$$\lim_{t \rightarrow T} J[u](t) = \infty$$

since  $u$  blows up in the whole interval  $[0, 1]$ .

Denote  $\alpha = u(1, 0) = u_0(1) > 0$  and  $\beta = \frac{1-q}{\varepsilon(q)} > 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t)}{dt} &= \beta \int_0^1 u^{\beta-1}(x, t) u_t(x, t) dx \\ &\geq \beta \alpha^{\beta+\gamma} \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx \\ &= \beta \alpha^{\beta+\gamma} u^q(0, t) \\ &\geq \beta \alpha^{\beta+\gamma} \int_0^1 u^q(x, t) dx. \end{aligned}$$

Using Jensen's inequality to the inequality above, we obtain

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \beta \alpha^{\beta+\gamma} (J)^{\frac{q}{\beta}}.$$

Note that  $\frac{q}{\beta} = \frac{q\varepsilon(q)}{1-q} > 1$  since  $\varepsilon(q) > \frac{1-q}{q}$ .

Now, we define  $J_h$ , the semidiscretization of  $J$  by

$$J_h(t) = h \sum_{i=0}^I U_i^\beta(t), \quad t \in [0, T_h].$$

By a straightforward computation, we get

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq \beta \alpha_h^{\beta+\gamma} (J_h)^{\frac{q}{\beta}}, \quad t \in [0, T_h],$$

where  $\alpha_h = \varphi_I > 0$ .

Putting  $G(s) = \beta \alpha_h^{\beta+\gamma} (s)^{\frac{q}{\beta}}$ , it is clear that

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq G(J_h),$$

and there exists  $s_0 > 0$  such that

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{for } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty & \text{since } \frac{q}{\beta} > 1. \end{cases}$$

**Step 3 (Condition A2)** Using Theorem 3.1, we show that for any  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0.$$

Finally, conditions A0, A1 and A2 are satisfied. According to Theorem 1.1 of [13], we obtain the desired results.  $\square$

## 5. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this section, we estimate the numerical blow-up time of (2.1)-(2.4) by using the algorithm proposed by C. Hirota and K. Ozawa [9]. We first transform the semidiscrete scheme (2.1)-(2.4) into a tractable form by the arc length transformation technique like this :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\ell} \begin{pmatrix} t \\ U_0 \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^I f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_0 \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix}, & 0 < \ell < \infty, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i > 0, & 0 \leq i \leq I, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{2}{h^2} U_0^{1+\gamma} (U_1 - U_0 + hU_0^q), \\ f_i &= \frac{1}{h^2} U_i^{1+\gamma} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq I-1, \\ f_I &= \frac{2}{h^2} U_I^{1+\gamma} (U_{I-1} - U_I). \end{aligned}$$

" $\ell$ " is such that  $d\ell^2 = dt^2 + \sum_{i=0}^I dU_i^2$  and is called the arc length.

The variables  $t$  and  $U_i$  are fonctions of  $\ell$ , and C. Hirota and K. Ozawa[9] proved that

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} t(\ell) = T_h \quad \text{and} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|U_h(\ell)\|_{\infty} = \infty.$$

Secondly, we introduce  $\{v_j\}$  which is a sequence of the arc length and we apply an ODE solver (DOP54) to (5.1) for each value of  $\{v_j\}$ . We generate then a linearly convergent sequence to the blow-up time, which sequence is finally accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. The three tolerances parameters, AbsTol, RelTol and InitialStep of the DOP54 (see [9, 7] for more

details) are set as follows  $\text{AbsTol} = \text{RelTol} = 1.d-15$ ,  $\text{InitialStep} = 0$ , the sequence of the arc length  $v_j = 2^{10} \cdot 2^j$  ( $j = 0, \dots, 10$ ) and the initial condition

$$\varphi_i = 0.5 * (i * h)^2 - i * h + 1, \quad 0 \leq i \leq I.$$

In the following Tables,  $T_h$  is the approximate blow-up time corresponding to meshes of  $I = 16, 32, 64, 128$ ;  $n$  is the numbers of iterations and the order  $s$  of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}$$

Table 1 : For  $\gamma = 0.2, q = 0.7$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	1.3059245101	130827	–
32	1.3060855729	256853	–
64	1.3061258449	636465	2.00
128	1.3061359133	2042966	2.00

Table 2 : For  $\gamma = 0.2, q = 0.9$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	1.0205106012	60012	–
32	1.0206288011	113554	–
64	1.0206583598	220576	2.00
128	1.0206657500	500129	2.00

Table 3 : For  $\gamma = 0.5, q = 0.9$

$I$	$T_h$	$n$	$s$
16	0.8992412182	62475	–
32	0.8994400927	118469	–
64	0.8994898198	230738	2.00
128	0.8995022521	528716	2.00

**Remark 5.1.** *The above tables assure the convergence of the numerical blow-up time to the continuous one, since the rate of convergence is 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space.*

*We also notice that the blow-up time diminishes when the parameter  $q$  or  $\gamma$  increases.*



Others illustrations are given by some plots in the below figures.

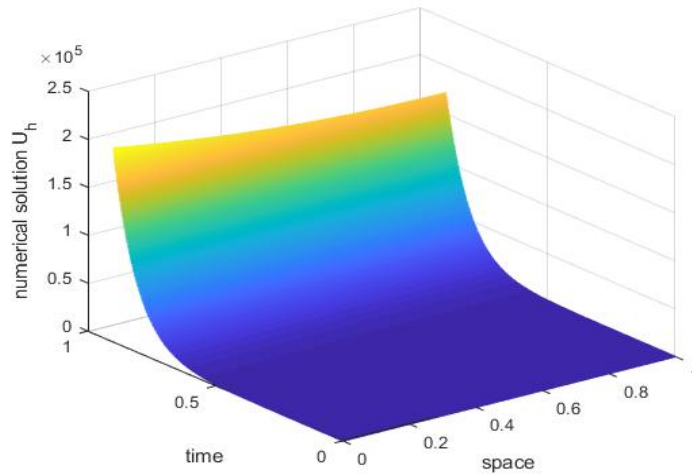


Figure 1. Evolution of the numerical solution for  $I = 32$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $q = 0.9$

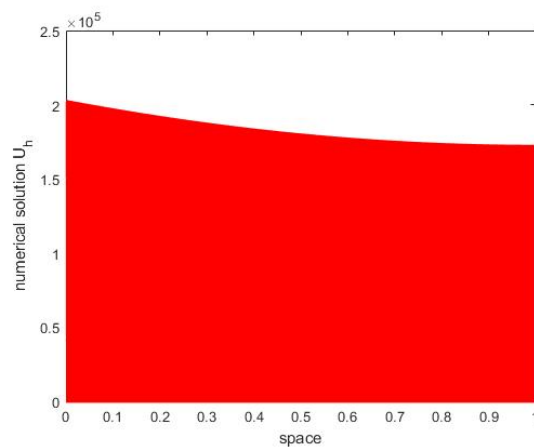


Figure 2. Evolution of  $U_h$  according to the space for  $I = 32$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $q = 0.9$

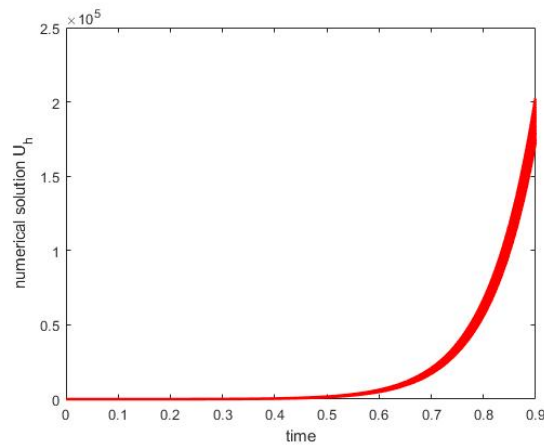


Figure 3. Evolution of  $U_h$  according to the time  
for  $I = 32$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $q = 0.9$

**Remark 5.2.** Figures 1, 2 and 3 show that the numerical solution blows up in finite time on the whole space for  $\gamma > 0$  and  $0 < q < 1$ , which is in line with the theoretically established result (see [8]).

#### REFERENCES

- [1] L. M. ABIA, J. C. LÓPEZ-MARCOS, J. MARTÍNEZ: *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math., **26**(1998), 399–414.
- [2] C. BRÄNDLE, P. GROISMAN, J. D. ROSSI: *Fully discrete adaptive methods for a blow-up problem*, Math. Models and Methods in Appl. Sc., **14**(2004), 1425–1450.
- [3] C-H. CHO: *On the computation of the numerical blow-up time*, Japan J. Indust. Appl. Math., **30**(2013), 331–349.
- [4] R. FERREIRA, P. GROISMAN, J. D. ROSSI: *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **12**(2002), 461–483.
- [5] V. A. GALAKTIONOV, J. L. VAZQUEZ: *Blow-Up for Quasilinear Heat Equations Described by Means of Nonlinear Hamilton-Jacobi Equations*, Journal of Differential Equations, **127**(1996), 1–40.
- [6] A. GANON, M. M. TAHA, A. K. TOURÉ: *Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Far East Journal of Mathematical Sciences, **114**(2019), 19–38.

- [7] A. GANON, M. M. TAHA, A. K. TOURÉ: *Blow-up for Semidiscretization of Semilinear Parabolic Equation With Nonlinear Boundary Condition*, Journal of Mathematics Research, **11**(2019), 1–10.
- [8] J-S GUO: *Blow-up Behavior for A Quasilinear Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Condition*, Disc. and Conti. Dyn. Syst., **18**(2007), 71–84.
- [9] C. HIROTA, K. OZAWA: *Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations—An application to the blow-up problems of partial differential equations*, J. of Comput. and Appl. Math., **193**(2006), 614–637.
- [10] T. ISHIWATA, M. TSUTSUMI: *Semidiscretization in space of nonlinear degenerate parabolic equations with blow-up of the solution*, J. of Comput. Math., **18**(2000), 571–586.
- [11] S. KAVITHA, K. BHAKYA: *Blow-Up Behavior for a Quasilinear Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Condition*, Imperial Journal of Interdisciplinary Research, **2**(2016), 93–95.
- [12] M. M. TAHA, A. K. TOURÉ, P. E. MENSAH: *Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Far East Journal of Mathematical Sciences, **60**(2012), 125–167.
- [13] T. K. USHIJIMA: *On the Approximation of Blow-up Time for Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36**(2000), 613–640.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
 INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY  
 UMRI MATHÉMATIQUES ET NOUVELLES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
 YAMOISSOUKRO, BP 2444, CÔTE D'IVOIRE  
*E-mail address:* ardjganon@gmail.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
 INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY  
 UMRI MATHÉMATIQUES ET NOUVELLES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
 YAMOISSOUKRO, CÔTE D'IVOIRE  
*E-mail address:* tahammath@gmail.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
 INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY  
 UMRI MATHÉMATIQUES ET NOUVELLES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
 YAMOISSOUKRO, CÔTE D'IVOIRE  
*E-mail address:* latoureci@gmail.com



## Numerical blow-up for nonlinear diffusion equation with neumann boundary conditions



Ardjouma Ganon<sup>a,\*</sup>, Manin Mathurin Taha<sup>a</sup>, N'guessan Koffi<sup>b</sup>, Augustin Kidjégbo Touré<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institut National Polytechnique Felix Houphouët-Boigny Yamoussoukro, BP 2444, Côte d'Ivoire.

<sup>b</sup>UFR SED, Université Alassane Ouattara de Bouaké, 01 BP V 18 Bouaké 01, Côte d'Ivoire.

### Abstract

This work is concerned with the study of the numerical approximation for the nonlinear diffusion equation  $(u^m)_t = u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$ , under Neumann boundary conditions  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u_x(1, t) = u^\alpha(1, t)$ ,  $t > 0$ . First, we obtain a semidiscrete scheme by the finite differences method and prove the convergence of its solution to the continuous one. Then, we establish the numerical blow-up and the convergence of the numerical blow-up time to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, we illustrate our analysis with some numerical experiments.

**Keywords:** Nonlinear diffusion equation, numerical blow-up, finite differences, arc length transformation, Aitken  $\Delta^2$  method.

**2020 MSC:** 35B44, 35B51, 35K20, 65M06.

©2021 All rights reserved.

### 1. Introduction

Consider the following nonlinear diffusion equation with neumann boundary conditions

$$\begin{cases} (u^m)_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = u^\alpha(1, t), & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq \delta > 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $m > 0$ ,  $\alpha < \infty$  and  $u_0 \in C^{2+\nu}([0, 1])$  for some  $0 < \nu < 1$ , and verifies the compatibility conditions  $u'_0(0) = 0$  and  $u'_0(1) = u_0^\alpha(1)$ . There are many evolution equations whose solutions develop singularity in finite time, namely  $T$ . Close to this finite time  $T$ , solutions become unbounded at certain points of the space. This phenomenon is called blow-up, and  $T$  is called the blow-up time. The set of points where blow-up occurs is called the blow-up set. The blow-up phenomenon has been the focus of many authors in recent years. Some were interested in the theoretical analysis [2, 5, 6, 10], and others in the numerical one [1, 3, 4, 7, 8, 11]. Existence and uniqueness of regular solution, and the following results have been proved by Filo in [6]:

\*Corresponding author

Email addresses: [ardjganon@gmail.com](mailto:ardjganon@gmail.com) (Ardjouma Ganon), [tahammath@gmail.com](mailto:tahammath@gmail.com) (Manin Mathurin Taha), [nkrasoft@yahoo.fr](mailto:nkrasoft@yahoo.fr) (N'guessan Koffi), [latoureci@gmail.com](mailto:latoureci@gmail.com) (Augustin Kidjégbo Touré)

doi: [10.22436/jnsa.014.02.03](https://doi.org/10.22436/jnsa.014.02.03)

Received: 2020-02-25 Revised: 2020-03-03 Accepted: 2020-04-12

If  $0 < m < \alpha \leq 1$ , the solution of (1.1) blows up in finite time  $T$  on the whole interval  $[0, 1]$ , but if  $0 < m < 1 < \alpha$ , blow-up occurs only at the boundary  $x = 1$ . And if  $m > 1$  with  $2\alpha > m + 1$ , every solution must blow up in a finite time. Furthermore, if  $\alpha > m > 1$ , the solution of (1.1) blows up at  $x = 1$ . He also established blow-up rate for some cases. Later, Dend and Xu [2] completed the blow-up rate results of the solution of (1.1).

This paper deals with the numerical approximations of (1.1). Our goal is to prove the blow-up of the numerical solution and the convergence of the numerical blow-up time without putting strong assumption on initial data (we only use assumptions under which the solution of the continuous problem blows up). Problem (1.1) can be rewritten in the following form

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{m}u^{1-m}u_{xx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u^\alpha(1, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \tag{1.2}$$

The rest of the work is organized as follows. In the next section, we present a semidiscrete scheme of the problem (1.1). In Section 3, we give some properties of this semidiscrete scheme. In Section 4, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete scheme of (1.1) blows up in finite time and that the numerical blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we illustrate our analysis by giving some numerical results.

### 2. Semidiscrete problem

Let  $I$  be a positive integer and define the grid  $x_i = ih, i = 0, \dots, I$ , where  $h = \frac{1}{I}$  is the mesh parameter. We approximate the solution  $u$  of the problem (1.2) by the solution  $U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$  of the following semidiscrete scheme

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \frac{1}{m}U_i^{1-m}(t)\delta^2U_i(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h), \tag{2.1}$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \frac{1}{m}U_I^{1-m}(t) \left( \delta^2U_I(t) + \frac{2}{h}U_I^\alpha(t) \right), \quad t \in (0, T_h), \tag{2.2}$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I, \tag{2.3}$$

where for  $t \in (0, T_h)$ ,

$$\delta^2U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

$$\delta^2U_0(t) = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \quad \delta^2U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2},$$

and  $[0, T_h)$ , the maximal time interval on which  $\|U_h(t)\|_\infty$  is finite, with  $\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$ . When  $T_h$  is finite, we say that the solution  $U_h(t)$  blows up in finite time and the time  $T_h$  is called the blow-up time of the solution  $U_h(t)$ . Denote

$$\delta_*^2U_i(t) = \begin{cases} \delta^2U_i(t), & \text{if } i = 0, \dots, I-1, \\ \delta^2U_I(t) + \frac{2}{h}U_I^\alpha(t), & \text{if } i = I. \end{cases}$$

### 3. Properties of the semidiscrete scheme

We give in this section some important results which will be used later.

**Lemma 3.1.** Let  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , if  $V_h, W_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$  and  $a_h \in C^0([0, T], \mathbb{R}_+^{I+1})$  are such that for  $i = 0, \dots, I$

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} - a_i(t)\delta^2 V_i(t) - f(V_i(t)) &< \frac{dW_i(t)}{dt} - a_i(t)\delta^2 W_i(t) - f(W_i(t)), \quad t \in (0, T), \\ V_i(0) &< W_i(0), \quad i = 0, \dots, I, \end{aligned} \tag{3.1}$$

then we have  $V_i(t) < W_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in (0, T)$ .

*Proof.* Let us define the vector  $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T)$  such that  $Z_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0]$ ,  $0 \leq i \leq I$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . It is easy to see that

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \quad \delta^2 Z_{i_0}(t_0) \geq 0,$$

which implies that

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) - a_{i_0}(t)\delta^2 Z_{i_0}(t_0) + f(W_{i_0}(t_0)) - f(V_{i_0}(t_0)) \leq 0,$$

but this inequality contradicts (3.1) and the proof is complete. □

**Lemma 3.2.** Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.3), then

$$U_i(t) > 0, \quad i = 0, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$$

*Proof.* The semidiscret scheme (2.1)-(2.3) can be rewritten as follows

$$\frac{d(U_i^m(t))}{dt} = \delta^2 U_i(t), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h), \tag{3.2}$$

$$\frac{d(U_I^m(t))}{dt} = \delta^2 U_I(t) + \frac{2}{h} U_I^\alpha(t), \quad t \in (0, T_h), \tag{3.3}$$

$$U_i(0) = \varphi_i > 0, \quad i = 0, \dots, I. \tag{3.4}$$

Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_h)$  such that  $U_i(t) > 0$  for  $t \in [0, t_0]$ ,  $0 \leq i \leq I$ , but  $U_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . One can easily check that

$$\frac{d(U_{i_0}^m(t_0))}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_{i_0}^m(t_0) - U_{i_0}^m(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad \delta^2 U_{i_0}(t_0) > 0,$$

which implies that

$$\begin{aligned} \frac{d(U_{i_0}^m(t_0))}{dt} - \delta^2 U_{i_0}(t_0) &< 0 \quad \text{if } 0 \leq i_0 \leq I-1, \\ \frac{d(U_I^m(t_0))}{dt} - \delta^2 U_I(t_0) - \frac{2}{h} U_I^\alpha(t_0) &< 0 \quad \text{if } i_0 = I. \end{aligned}$$

But these inequalities contradict (3.2)-(3.3) and we get the expected result. □

**Lemma 3.3.** Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.3) and the initial condition at (2.3) verifies  $\delta_*^2 \varphi_i \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq I$ .

Then,  $\frac{dU_i(t)}{dt} \geq 0$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_h]$ .

*Proof.* Take  $T_0 < T_h$  fixed. Let us define the vector  $W_h(t)$  such that  $W_i(t) = \frac{d}{dt} U_i(t)$  for  $0 \leq i \leq I$ ,  $t \in [0, T_0]$ . We have

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{m} U_i^{1-m}(t) \delta^2 W_i(t) + \frac{1-m}{m} U_i^{-m}(t) \delta^2 U_i(t) W_i(t), \quad 0 \leq i \leq I-1, \tag{3.5}$$

$$\frac{dW_I(t)}{dt} = \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t) \delta^2 W_I(t) + \left( \frac{1-m}{m} U_I^{-m}(t) \delta^2 U_I(t) + \frac{2(1-m+\alpha)}{mh} U_I^{\alpha-m}(t) \right) W_I(t). \tag{3.6}$$

Let  $K$  be a positive constant satisfying

$$K > \max_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} \left\{ \left| \frac{1-m}{m} U_i^{-m}(t) \delta^2 U_i(t) \right| \right\}$$

and

$$K > \max_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ \left| \frac{1-m}{m} U_I^{-m}(t) \delta^2 U_I(t) \right| + \frac{2|1-m+\alpha|}{mh} U_I^{\alpha-m}(t) \right\}.$$

Consider the vector  $Z_h(t) = W_h(t)e^{-Kt}$ . It is clear that  $Z_h(0) \geq 0$  since  $W_h(0) \geq 0$ . Let  $t_0$  be the first  $t \in (0, T_0]$  such that  $Z_i(t) \geq 0$  for  $t \in [0, t_0)$ , but  $Z_{i_0}(t_0) < 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ . Without loss of generality, we may suppose that  $i_0$  is the smallest integer which satisfies the above inequality. Then we have

$$\frac{d}{dt} Z_{i_0}(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0, \tag{3.7}$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) > 0. \tag{3.8}$$

From relations (3.5)-(3.6) and (3.8), we can easily show that

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &> \left( \frac{1-m}{m} U_{i_0}^{-m}(t_0) \delta^2 U_{i_0}(t_0) - K \right) Z_{i_0}(t_0) > 0 \text{ if } 0 \leq i_0 \leq I-1, \\ \frac{d}{dt} Z_{i_0}(t) &> \left( \frac{1-m}{m} U_I^{-m}(t_0) \delta^2 U_I(t_0) + \frac{2(1-m+\alpha)}{mh} U_I^{\alpha-m}(t_0) - K \right) Z_I(t_0) > 0 \text{ if } i_0 = I, \end{aligned}$$

which is a contradiction with (3.7) and the lemma is completely proved.  $\square$

**Lemma 3.4.** *Let  $U_h$  be a solution of (2.1)-(2.3) and the initial condition at (2.3) verifies  $\delta_*^2 \varphi_h \geq 0$  and  $\varphi_i < \varphi_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ . Then,  $U_i(t) < U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,  $t \in [0, T_h)$ .*

*Proof.* We set  $Z_i(t) = U_i(t) - U_{i+1}(t)$ ,  $0 \leq i \leq I-1$ ,  $t \in (0, T_h)$ . Let  $t_0$  be the first  $t > 0$  such that  $Z_i(t) < 0$  for  $t \in (0, t_0)$ , but  $Z_{i_0}(t_0) = 0$  for a certain  $i_0 \in \{0, \dots, I-1\}$ . Without loss of generality, we may suppose that  $i_0$  is the smallest integer which satisfies the above inequality. We have

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \geq 0, \quad \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0. \tag{3.9}$$

By a simple computation, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \frac{1}{m} U_{i_0+1}^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + \frac{1}{m} \left( U_{i_0}^{1-m}(t_0) - U_{i_0+1}^{1-m}(t_0) \right) \delta^2 U_{i_0}(t_0) \text{ if } 0 \leq i_0 \leq I-2, \\ &= \frac{1}{m} U_{i_0+1}^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0, \\ \frac{dZ_{I-1}(t_0)}{dt} &= \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{I-1}(t_0) + \frac{1}{m} \left( U_{I-1}^{1-m}(t_0) - U_I^{1-m}(t_0) \right) \delta^2 U_{I-1}(t_0) \\ &\quad - \frac{2}{mh} U_I^{1-m+\alpha}(t_0) \text{ if } i_0 = I-1, \\ &= \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t_0) \delta^2 Z_{I-1}(t_0) - \frac{2}{mh} U_I^{1-m+\alpha}(t_0) < 0, \end{aligned}$$

which contradict the relation (3.9) and the proof is complete.  $\square$

**Theorem 3.5.** *Assume that the problem (1.1) has a solution  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T_d])$  and the initial condition at (2.3) verifies*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ as } h \rightarrow 0, \tag{3.10}$$

where  $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$ . Then, for  $h$  small enough, the semidiscrete problem (2.1)-(2.3) has a

unique solution  $U_h \in C^1([0, T_d], \mathbb{R}^{I+1})$  such that

$$\max_{0 \leq t \leq T_d} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2) \text{ as } h \rightarrow 0.$$

*Proof.* Let  $\alpha > 0$  be such that

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \alpha \text{ for } t \in [0, T_d]. \tag{3.11}$$

Then the problem (2.1)-(2.3) has for each  $h$ , a unique solution  $U_h \in C^1([0, T_h], \mathbb{R}^{I+1})$ . Let  $t(h) \leq \min\{T_d, T_h\}$  be the greatest value of  $t > 0$  such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \tag{3.12}$$

The relation (3.10) implies  $t(h) > 0$  for  $h$  small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ for } t \in (0, t(h)),$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty < 1 + \alpha \text{ for } t \in (0, t(h)). \tag{3.13}$$

Let  $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$  be the discretization error. Using the Taylor's expansion, we have for  $t \in (0, t(h))$ ,

$$\begin{aligned} \frac{de_i(t)}{dt} - \frac{1}{m} U_i^{1-m}(t) \delta^2 e_i(t) &= \frac{1-m}{m} \xi_i^{-m}(t) \delta^2 u(x_i, t) e_i(t) + O(h^2), \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ \frac{de_I(t)}{dt} - \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t) \delta^2 e_I(t) &= \left( \frac{1-m}{m} \xi_I^{-m}(t) \delta^2 u(x_I, t) + \frac{2(1-m+\alpha)}{mh} \theta_I^{-m+\alpha}(t) \right) e_I(t) + O(h^2), \end{aligned}$$

where  $\xi_i(t)$  is an intermediate value between  $U_i(t)$  and  $u(x_i, t)$  for  $i \in \{0, \dots, I\}$  and  $\theta_I(t)$  the one between  $U_I(t)$  and  $u(x_I, t)$ . Using (3.11) and (3.13), there exist  $Q$  and  $K$  positive constants such that

$$\begin{aligned} \frac{de_i(t)}{dt} - \frac{1}{m} U_i^{1-m}(t) \delta^2 e_i(t) &\leq Q|e_i(t)| + Kh^2, \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ \frac{de_I(t)}{dt} - \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t) \delta^2 e_I(t) &\leq \frac{Q}{h}|e_I(t)| + Kh^2. \end{aligned}$$

Now, we consider the function

$$Z(x, t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(L+1)t + Cx^2},$$

where  $M, L, C$  are non-negative constants. We denote by  $Z(x_i, t)$  the discretisation in space of  $Z(x, t)$ . For suitable non-negative constants  $M, L, C$ , we obtain for  $t \in (0, t(h))$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dZ(x_i, t)}{dt} - \frac{1}{m} U_i^{1-m}(t) \delta^2 Z(x_i, t) &> Q|Z(x_i, t)| + Kh^2, \quad 0 \leq i \leq I-1, \\ \frac{dZ(x_I, t)}{dt} - \frac{1}{m} U_I^{1-m}(t) \delta^2 Z(x_I, t) &> \frac{Q}{h}|Z(x_I, t)| + Kh^2, \\ Z(x_i, 0) &> |e_i(0)|. \end{aligned}$$

From Lemma 3.1, we obtain

$$e_i(t) < Z(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in (0, t(h)).$$

By the same argument, we also prove that

$$-e_i(t) < Z(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in (0, t(h)).$$



We deduce that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)t+C}, \quad t \in (0, t(h)). \tag{3.14}$$

To complete the proof of this theorem, we have to show that, for  $h$  sufficiently small,  $t(h) = T_d$ . But if it is not true, for some  $h$ , as small as we like,  $t(h) < T_d$  and, by (3.12) and (3.14), we obtain

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty + Mh^2)e^{(L+1)T_d+C}.$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as  $h$  tends to zero, we deduce that  $1 \leq 0$ , which is impossible.  $\square$

#### 4. Numerical blow-up

In this section, we prove that the solution  $U_h$  of the semidiscrete problem (2.1)-(2.3) blows up in finite time and its semidiscrete blow-up time converges to the real one when the mesh size goes to zero.

**Theorem 4.1.** *Let  $0 < m < \alpha \leq 1$  or  $0 < m < 1 < \alpha$  or  $1 < m < \alpha$ . Assume that the problem (1.1) has a solution  $u$  which blows up in finite time  $T$  such that  $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T))$  and the initial condition at (2.3) verifies  $\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1)$  as  $h \rightarrow 0$ . Then the unique solution  $U_h$  of (2.1)-(2.3) blows up in finite time  $T_h$  for sufficiently small  $h$ , and we have the following relation:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

*Proof.* To prove this theorem, we will use Theorem 1.4 given by Ushijima in [12]. We only have to check three conditions: conditions A0, A1''', and A2' (see [12]).

**Step 1 (Condition A0):** The solution  $u$  of (1.1) blows up in finite time  $T$  (see [6]).

**Step 2 (Condition A1'''):** Let us define functional  $J$  as follows :

$$J[u](t) = \int_0^1 u^m(x, t) dx, \quad t \in [0, T).$$

We have

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \int_0^1 (u^m)_t(x, t) dx = \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx = u^\alpha(1, t) \geq \int_0^1 u^\alpha(x, t) dx \geq \left( \int_0^1 u^m(x, t) dx \right)^{\frac{\alpha}{m}}. \tag{4.1}$$

We obtain the last inequality by using Jensen’s inequality. Thus, we reach  $\frac{dJ(t)}{dt} \geq (J)^{\alpha/m}$ .

Define  $H(t) = \frac{1}{2}u^\alpha(1, t)$ ,  $t \in [0, T)$ . From (4.1), we get  $\frac{d}{dt}J(t) \geq H(t)$ ,  $t \in [0, T)$  and  $\lim_{t \rightarrow T} H(t) = \infty$  since  $x = 1$  is always a blow-up point.

Now, for  $t \in [0, T_h)$  we denote by

$$J_h(t) = h \sum_{i=0}^I U_i^m(t) \quad \text{and} \quad H_h(t) = \frac{1}{2}U_I^\alpha(t),$$

the numerical approximations of  $J$  and  $H$ , respectively. By a simple computation, we obtain for  $t \in [0, T_h)$ ,

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq H_h(t) \quad \text{and} \quad \frac{dH_h(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2}U_I^{\alpha-1}(t) \frac{dU_I(t)}{dt} \geq 0.$$

A straightforward calculation yields the following inequality

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq (J_h)^{\alpha/m}.$$

Putting  $G(s) = (s)^{\alpha/m}$ , it is clear that

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq G(J_h),$$

and there exists  $s_0 > 0$  such that

$$\begin{cases} G(s) > 0, & \text{for } s > s_0, \\ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty, & \text{since } \frac{\alpha}{m} > 1. \end{cases}$$

Condition (A'') of theorem 1.4 in [12] is satisfied.

**Step 3 (Condition A2')**: Using Theorem 3.5, we show that for any  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0 \text{ and } \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

Finally, conditions A0, A1'', and A2' are satisfied. According to Theorem 1.4 of [12], we obtain the desired results. □

### 5. Numerical experiments

In this section, we estimate the numerical blow-up time of (2.1)-(2.3) by using the algorithm proposed by Hirota and Ozawa [9]. Let  $\{\nu_j\}$  be a geometric sequence. The main idea of this algorithm is to transform the semidiscrete scheme (2.1)-(2.3) into a tractable form by the arc length transformation technique. For each value  $\nu_j$ , this tractable form is integrated by an ODE solver (here we use DOP54) from 0 to  $\nu_j$  in order to generate a linearly convergent sequence to the blow-up time. The sequence is then accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. In DOP54, there are three tolerances parameters, AbsTol, RelTol and InitialStep. The parameters AbsTol and RelTol specify the tolerances of the absolute and relative errors, respectively, and InitialStep is used to choose the manner in which the errors are controlled. We set AbsTol = RelTol = 1.d-15, InitialStep = 0, we refer the readers to [7-9] for more details. The sequence  $\{\nu_j\}$  is as follows:  $\nu_j = 2^{10} \cdot 2^j$  ( $j = 0, \dots, 12$ ) and the initial data

$$\varphi_i = 0.5 * (i * h)^2 + 0.5, \quad 0 \leq i \leq I.$$

In the rows of the Tables 1-3,  $T_h$  is the approximate blow-up time corresponding to meshes of I, n is the numbers of iterations and the order s of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

Others illustrations are given by some plots in the Figures 1-3.

Table 1: For  $m = 0.5, \alpha = 0.9$ .

I	$T_h$	n	s
16	1.116774883	63522	–
32	1.116616203	120086	–
64	1.116576512	233503	2.00
128	1.116566594	535576	2.00
256	1.116564124	1851197	2.00

Table 2: For  $m = 0.5, \alpha = 2$ .

I	$T_h$	n	s
16	0.143979587	5441	–
32	0.142837935	9658	–
64	0.142521477	17854	1.85
128	0.142436825	33966	1.90
256	0.142414680	66908	1.94
512	0.142408969	153443	1.96
1024	0.142407511	486550	1.97

Table 3: For  $m = 1.1, \alpha = 2$ .

I	$T_h$	n	s
16	0.367306599	5577	–
32	0.360220365	9375	–
64	0.357936256	16800	1.63
128	0.357227601	31424	1.69
256	0.357013541	61244	1.73
512	0.356950138	140209	1.76
1024	0.356931638	455441	1.78

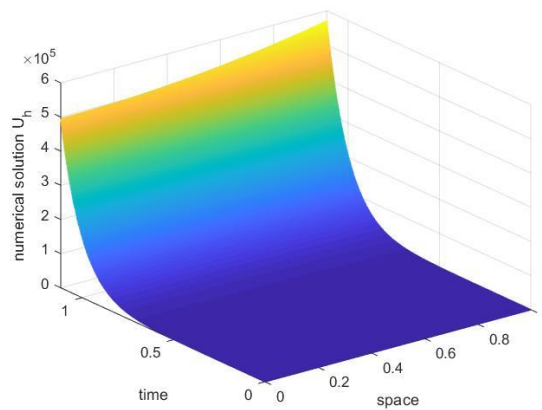


Figure 1: Evolution of the numerical solution for  $I = 64, m = 0.5, \alpha = 0.9$  (case where  $0 < m < \alpha \leq 1$ ).

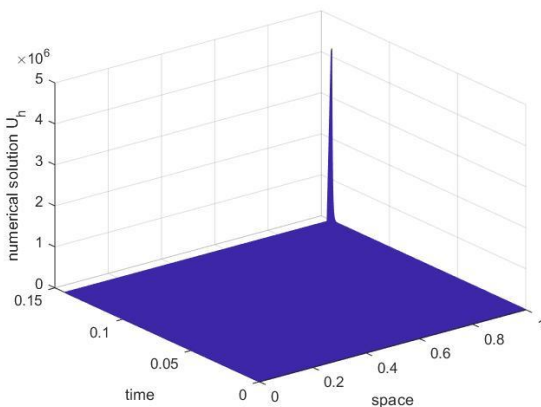


Figure 2: Evolution of the numerical solution for  $I = 64, m = 0.5, \alpha = 2$  (case where  $0 < m < 1 < \alpha$ ).

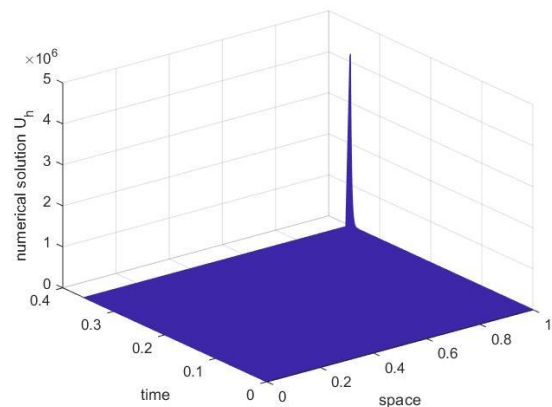


Figure 3: Evolution of the numerical solution for  $I = 64, m = 1.1, \alpha = 2$  (case where  $1 < m < \alpha$ ).

*Remark 5.1.* We observe from tables above that the growth of  $\alpha$  accelerates the blow-up while the growth of  $m$  delays it. We also have the convergence of the numerical blow-up time to the continuous one, since the rate of convergence is near 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space.

*Remark 5.2.* Figures 1, 2, and 3 show that the numerical solution blows up in finite time on the whole space if  $0 < m < \alpha \leq 1$  and, on the boundary  $x = 1$  if  $0 < m < 1 < \alpha$  or  $1 < m < \alpha$ . Which is in line with the theoretically established result (see [6]).

## References

- [1] K. A. Adou, K. A. Touré, A. Coulibaly, *On the numerical quenching time at blow-up*, Adv. Math. Sci. J., **8** (2019), 71–85. 1
- [2] K. Deng, M. X. Xu, *Remarks on blow-up behavior for a nonlinear diffusion equation with neumann boundary conditions*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), 167–172. 1
- [3] K. B. Edja, K. N'guessan, B. J.-C. Koua, K. A. Touré, *Numerical quenching for heat equations with coupled nonlinear-boundary flux*, Int. J. Anal. Appl., **17** (2019), 1034–1051. 1
- [4] R. Ferreira, P. Groisman, J. D. Rossi, *Numerical Blow-up for the Porous Medium Equation with a Source*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **20** (2004), 552–575. 1
- [5] R. Ferreira, F. Quirós, *The Balance bet we en Nonlinear Inwards and Outwards Boundary Flux for a Nonlinear Heat Equation*, J. Differential Equations, **184** (2002), 259–282. 1
- [6] J. Filo, *Diffusivity versus Absorption through the Boundary*, J. Differential Equations, **99** (1992), 281–305. 1, 4, 5.2
- [7] A. Ganon, M. M. Taha, A. K. Touré, *Blow-up for Semidiscretization of Semilinear Parabolic Equation With Nonlinear Boundary Condition*, J. Math. Res., **11** (2019), 1–10. 1, 5
- [8] A. Ganon, M. M. Taha, A. K. Touré, *Numerical blow-up on whole domain for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Adv. Math. Sci. J., **9** (2020), 49–58. 1
- [9] C. Hirota, K. Ozawa, *Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations—An application to the blow-up problems of partial differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **193** (2006), 614–637. 5
- [10] Z. X. Jiang, S. Zheng, X. F. Song, *Blow-Up Analysis for a Nonlinear Diffusion Equation with Nonlinear Boundary Conditions*, Appl. Math. Lett., **17** (2004), 193–199. 1
- [11] K. C. N'dri, K. A. Touré, G. Yoro, *Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Int. J. Numer. Methods Appl., **17** (2018), 141–160. 1
- [12] T. K. Ushijima, *On the Approximation of Blow-up Time for Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **36** (2000), 613–640. 4, 4

# Références bibliographiques

- [1] L. M. Abia, J. C. López-Marcos & J. Martínez, *The Euler method in the numerical integration of reaction-diffusion problems with blow-up*, Appl. Numer. Math., **38** (2001), 287–313.
- [2] L. M. Abia, J. C. López-Marcos & J. Martínez, *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math., **26** (1998), 399–414.
- [3] L. M. Abia, J. C. López-Marcos & J. Martínez, *Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. Math., **20** (1996), 145–156.
- [4] H. Amann, *Quasilinear Parabolic Systems Under Nonlinear Boundary Conditions*, Arch. Rational Mech. Anal., **92** (1986), 153–192..
- [5] J. M. Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, Quart. J. Math. Oxford Ser., **28**(4) (1977), 473–486.
- [6] T. K. Boni, *Blow-up for discretization of a localized semilinear heat equation*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics, **56**(1) (2010), 385–406.
- [7] T. K. Boni, *On blow-up and asymptotic behavior of solutions to a nonlinear parabolic equation of second order with nonlinear boundary conditions*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **40** (1999), 457–475.
- [8] T. K. Boni, *Sur l’explosion et le comportement asymptotique de la solution d’une équation parabolique semi-linéaire du second ordre*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, Serie I, **326**, (1998), 317–322.
- [9] J. Boussinesq, *Recherches théoriques sur l’écoulement des nappes d’eau infiltrés dans le sol et sur le débit de sources*, Comptes Rendus Acad. Sci., J. Math. Pures Appl. **10**, (1903/04) 5–78.
- [10] C. brändle, P. Groisman & J. D. Rossi, *Fully discrete adaptive methods for a blow-up problem*, Math. Models and Methods in Appl. Sc. **14** (2004), 1425–1450.

- 
- [11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science+Business Media, LLC (2011).
- [12] M. Chipot, M. Fila & P. Quittner, *Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, Acta Math. Univ. Comenianae. Vol. LX, 1 (1991), 35–103.
- [13] C-H. Cho, *On the computation of the numerical blow-up time*, Japan J. Indust. Appl. Math., **30** (2013), 331–349.
- [14] A. De Pablo, *An Introduction to the Problem of Blow-up for Semilinear and Quasilinear Parabolic Equations*, MAT Serie A : Conferencias, seminarios y trabajos de matematica, **12** (2006).
- [15] J. Ding, *Blow-Up Solutions and Global Existence for Quasilinear Parabolic Problems with Robin Boundary Conditions*, Abstract and Applied Analysis, Article ID 324857 (2014), 1–10.
- [16] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, **19** (1997).
- [17] S. O. Fatunla, *Numerical Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, (1988).
- [18] R. Ferreira, *Numerical quenching for the semilinear heat equation with a singular absorption*, Journal of Computational and Applied Mathematics **228** (2009) 92–103.
- [19] R. Ferreira, P. Groisman & J. D. Rossi, *Numerical Blow-up for the Porous Medium Equation with a Source*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **20**(4) (2004), 552–575.
- [20] R. Ferreira, P. Groisman & J. D. Rossi, *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **12**(4) (2002), 461–483.
- [21] M. Fila, J. Filo, *A blow-up result for nonlinear diffusion equations*, Math. Slovaca, **39**(3) (1989), 331–346.
- [22] J. Filo, *Diffusivity versus Absorption through the Boundary*, J. of Diff. Equations, **99** (1992), 281–305.
- [23] D. Fredon, M. Maumy-Bertrand & F. Bertrand, *Mathématiques Analyse en 30 fiches*, Dunod, Paris, (2009).
- [24] A. Friedman, *Remarks on nonlinear parabolic equations*, In Proc. Sympos. Appl. Math., **XVII** (1965), 3–23.

- 
- [25] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **13** (1966), 109–124.
- [26] V. A. Galaktionov, J. L. Vázquez, *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*, Discrete Continuous Systems A, **8** (2002), 399–433.
- [27] A. Ganon, M. M. Taha, N'Guessan Koffi & A. K. Touré, *Numerical blow-up for nonlinear diffusion equation with neumann boundary conditions*, J. Nonlinear Sci. Appl., **14** (2021), 80–88.
- [28] A. Ganon, M. M. Taha & A. K. Touré, *Numerical blow-up on whole domain for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Advances in Mathematics : Scientific Journal, **9**(1) (2020), 49–58.
- [29] A. Ganon, M. M. Taha & A. K. Touré, *Blow-up for Semidiscretization of Semilinear Parabolic Equation With Nonlinear Boundary Condition*, Journal of Mathematics Research **11** (2019), 1–10.
- [30] A. Ganon, M. M. Taha & A. K. Touré, *Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Far East Journal of Mathematical Sciences **114** (2019), 19–38.
- [31] I. M. Gel'fand, *Some problem in the theory of quasilinear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. **29**(2) (1963), 295–381.
- [32] J. L. Gómez, V. Márquez, & N. Wolanski, *Dynamic behavior of positive solutions to reaction-diffusion problems with nonlinear absorption through the boundary*, Rev. Unión Matemática Argentina, **38** (1993), 196–209.
- [33] C. Guilpin, *Manuel de Calcul Numérique Appliqué*, EDP Sciences.
- [34] J-S. Guo, *Blow-up Behavior for A Quasilinear Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Condition*, Disc. and Conti. Dyn. Syst., **18** (2007), 71–84.
- [35] E. Hairer, S. P. Nørsett & G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nons-tiff problems*, Springer Series in Comput. Math., 2nd ed., Springer-Verlag, (1993).
- [36] C. Hirota, K. Ozawa, *Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations—An application to the blow-up problems of partial differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **193** (2006), 614–637.
- [37] W. H. Hui, *Generalized Lagrangian formulation of computational fluid dynamics*, Hafez, K Oshima Eds. Computational Fluid Dynamics Review, Hong Kong : Wiley, (1995).

- [38] T. Ishiwata, M. Tsutsumi, *Semidiscretization in space of nonlinear degenerate parabolic equations with blow-up of the solution*, J. of Comput. Math. **18** (2000), 571–586.
- [39] W. Jike, W. H. Hui, & D. Hongli, *Arc-length method for differential equations*, Applied Mathematics and Mechanics, **20**(8) (1999), 936–942.
- [40] S. Kaplan, *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. , **16** (1963), 305–330.
- [41] S. Kavitha, K. Bhakya, *Blow-Up Behavior for a Quasilinear Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Condition*, Imperial Journal of Interdisciplinary Research (IJIR) Vol-2, Issue-10, (2016), 93–95.
- [42] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov & N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Trans. of Math. Monographs, **23** (1968).
- [43] W. F. Lam, C. T. Morley, *Arc-length method for passing limit points in structural calculation*, Journal of Structural Engineering, **118**(1) (1992), 169–185.
- [44] J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, (1973).
- [45] L. S. Leibenzon, *The motion of a gas in a porous medium*, Complete works, vol 2, Acad. Sciences URSS, Moscow, 1953 (Russian). First published in Neftanoe i slant-sevoe khozyastvo, 10, 1929, and Neftanoe khozyastvo, (1930) 8–9 (Russian).
- [46] M. N. Le Roux, *Semidiscretizations in time of nonlinear parabolic equations with blow-up of the solution*, SIAM J. Numer. Anal, **31** (1994), 170–195.
- [47] H. A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form  $Pu_t = -Au + F(u)$* , Arch. Rational Mech. Anal., **51** (1973) 371–386.
- [48] H. A. Levine, P. E. Sacks, *Some existence and nonexistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations*, J. Differential Equations, **52** (1984), 135–161.
- [49] M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill, New York, (1937).
- [50] D. Nabongo, T. K. Boni, *Numerical Blow-up Solutions of Localized Semilinear Parabolic Equations*, Applied Mathematical Sciences, **2**(24) (2008), 1145-1160.
- [51] T. Nakagawa, *Blowing up on the finite difference solution to  $u_t = u_{xx} + u^2$* , Appl. Math. Optim., **2** (1976), 337–350.
- [52] K. N'Guessan, *Étude théorique et numérique de l'explosion des solutions de quelques équations aux dérivées partielles de type parabolique*, Thèse unique, École Doctorale Polytechnique Yamoussoukro, (2017).



- [53] K. N'Guessan, D. Nabongo & A. K. Touré, *Blow-up for discretizations of some semilinear parabolic equations with a convection Term*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics (GJPAM), **12**(4) (2016), 3367–3394.
- [54] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications : A Contemporary Approach*, New York, Springer, (2006).
- [55] W. F. Osgood, *Beweis der existenz einer losung der differentialgleichung  $dy/dx = f(x, y)$  ohne hinzunahme der cauchy-lipschitzschen bedingung*, Monatsh. Math. Phys., **9** (1898), 331–345.
- [56] E. Riks, *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. Solid. Structures, **15**(4) (1979), 529–551.
- [57] M. M. Taha, A. K. Touré & E. P. Mensah, *Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), **60**(2) (2012), 125–167.
- [58] A. S. Tersenov, *A remark on the porous medium equation with nonlinear source*, Applied Mathematics Letters, **25** (2012), 873–875.
- [59] T. K. Ushijima, *On the Approximation of Blow-up Time for Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 613–640.
- [60] J. L. Vázquez, *The Porous Medium Equation : Mathematical Theory*, Oxford Math. Monogr., Oxford University Press, Oxford, UK, (2007).
- [61] J. L. Vázquez, *Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Parabolic Equations of Porous Medium Type*, Oxford University Press, (2006).
- [62] J. Von Below, C. De Coster, *A Qualitative Theory for Parabolic Problems under Dynamical Boundary Conditions*, Journal of Inequalities and Applications, **5** (2000), 467–486.
- [63] M. Wang, Y. Wu, *Global existence and blow-up problems for quasilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, Appl. Math. Comput., **121** (2001), 117–134.
- [64] F. B. Weissler, *Single point blow-up for a semilinear initial value problem*, J. Differential Equations, **55**(2) (1984), 204–224.
- [65] Ya. B. Zel'dovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich & G. M. Makhviladze, *The Mathematical Theory of Combustion and Explosions*, Consultants Bureau, New York, (1985).
- [66] Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena II*, Academic Press, New York, (1966).
- [67] J. Zhou, C. Mu, *Asymptotic analysis to blow-up points for the porous medium equation with a weighted non-local source*, Applicable Analysis, **88**(1) (2009), 111–120.