

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline-Travail

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Institut National Polytechnique

Félix HOUPHOUËT-BOIGNY

EDP
Ecole Doctorale Polytechnique

EDP : Mathématiques et Nouvelles Technologies de l'Information

N/Réf 407/2019/INP-HB/EDP/YKB/AKDM

Doctorat INP-HB

THÈSE

pour obtenir le grade de Docteur délivré par

École Doctorale Polytechnique de l'INP-HB

Mention : Mathématiques appliquées

Spécialité doctorale : Analyse Numérique

présentée et soutenue publiquement par

EDJA Kouamé Béranger

le 09 juillet 2020

**ANALYSE NUMÉRIQUE DE QUELQUES ÉQUATIONS
ET SYSTEMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES PARABOLIQUES. ÉTUDES
D'EXPLOSIONS ET D'EXTINCTIONS.**

Co-Directeur de thèse : **TOURÉ Kidjégbo Augustin**, Professeur Titulaire (INP-HB)
Co-Directeur de thèse : **KOUA Brou Jean-Claude**, Maître de Conférences (UFHB)

Jury

YAO Kouassi Benjamin ,	Professeur Titulaire (INP-HB)	Président du jury
DIARAF SECK ,	Professeur Titulaire (UCAD)	Rapporteur
COULIBALY Adama ,	Maître de Conférences (UFHB)	Rapporteur
ADOU Kablan Jérôme ,	Professeur Titulaire (UFHB)	Examineur

THÈSE

Analyse Numérique de quelques équations et
systèmes d'équations aux dérivées partielles
paraboliques.

Études d'explosions et d'extinctions.

Edja Kouamé Béranger

Jeudi 09 Juillet 2020

"La réussite, c'est obtenir ce que l'on veut.
Le bonheur, c'est apprécier ce que l'on obtient."

H. Jackson Brown

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à

mon père ASSANVO Edja

ma mère ΚΟΥΑΚΟΥ Ebi Yah Fidèle ;

mon oncle ΚΟΥΑΚΟΥ Aman Hubert ;

Ceux là dont le soutien sur tous les plans ne m'a fait défaut à aucun moment de ma vie.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance au Seigneur Jésus Christ, de m'avoir donné la possibilité de terminer ce travail et de m'avoir soutenu tout au long de ma vie.

J'espère avoir, au cours de mes études, et particulièrement de ces dernières années, remercié les personnes qui ont compté pour moi. Cependant ces quelques lignes me donnent l'occasion de réitérer ces remerciements pour certains et de les donner peut-être pour la première fois à d'autres.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon co-Directeur de Mémoire, le Docteur TOURÉ Augustin, Professeur Titulaire des Universités, pour m'avoir proposé le sujet de thèse. Je lui suis reconnaissant de l'aide qu'il m'a apporté sur de multiples aspects théoriques à travers de nombreuses discussions, qui m'ont permises d'avancer sur le plan méthodologique. De plus, la grande disponibilité, ses précieux conseils et la patience qu'il m'a accordée tout au long de ce travail ont conduit à un encadrement idéal. J'ai également très apprécié son aide à la rédaction de ce manuscrit et à la préparation de la soutenance.

De même je remercie vivement mon co-Directeur de thèse, le Docteur KOUA Brou Jean-Claude, Maître de Conférences, de m'avoir toujours accordé le temps à chaque fois que j'avais besoin de lui et aussi pour l'honneur qu'il me fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à l'endroit des rapporteurs de cette thèse, Monsieur COULIBALY Adama, Maître de Conférences et Monsieur DIARAF Seck, Professeur Titulaires des Universités, pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail de recherche.

Je remercie vivement Monsieur YAO Kouassi Benjamin, Professeur Titulaire des Universités, Directeur de l'École Doctorale Polytechnique Félix Houphouët-Boigny (INP-HB) de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour l'accueil chaleureux dans la prestigieuse école doctorale dont il assure la direction.

J'adresse mes profonds remerciements au Professeur HILI Ouagnina, Professeur Titulaire des Universités, de m'avoir accueilli au sein de l'UMRI Mathématiques et Nouvelles

Technologies de l'Information de l'INP-HB où j'ai pu effectuer une grande partie de mon travail.

Mes remerciements s'adressent à tous les membres de ce laboratoire, pour l'accueil chaleureux et leur franche collaboration.

J'adresse mes profonds remerciements au Docteur Assanvo Edja F., Maître Assistant à l'Université Nangui Abrogoua, c'est grâce à ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien mon troisième cycle universitaire.

Il est important pour moi de remercier le Docteur KOFFI N'Guessan, Maître Assistant à l'Université Alassane Ouattara de Bouaké et le Docteur TAHA Manin Mathurin, Maître Assistant l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro pour leurs précieux conseils, leur optimisme quant à notre carrière dans le Supérieur et pour leur sens élevé des relations humaines.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Département de Mathématiques et d'informatique de l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, en particulier Monsieur SAFIEDDINE Safi.

Et enfin, je remercie tous mes proches pour leur soutien tout au long de ces trois années d'intenses recherches et tous ceux qui, de près ou de loin, ont aidé à la réalisation de cette thèse.

Table des matières

Dédicaces	ii
Remerciements	iii
Table des matières	v
Liste des tableaux	viii
Table des figures	x
Liste des symboles et abréviations	xii
Résumé	xiv
Abstract	xv
Introduction générale	1
0.1 Exemple d'explosion et extinction dans les équations différentielles ordinaires . .	2
0.2 Exemple d'explosion et d'extinction dans les équations aux dérivées partielles paraboliques	3
1 EXPLOSION ET EXTINCTION DES SOLUTIONS DE CERTAINES EDP PARABOLIQUES AVEC CONDITIONS DE NEUMANN NON LINÉAIRES	12
1.1 Introduction	12
1.2 Étude du problème continu	14
1.2.1 Propriétés qualitatives	14
1.2.2 Explosion et point d'explosion de la solution de (1.1)-(1.3) sous l'hypo- thèse (I)	15
1.2.3 Extinction et point d'extinction de la solution de (1.1)-(1.3) sous l'hypo- thèse (II)	17
1.3 Étude numérique	19
1.3.1 Construction du schéma semi-discret en espace de (1.1)-(1.3)	19

1.3.2	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret en espace de (1.11)-(1.14)	22
1.3.3	Propriétés qualitatives de la solution du problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14)	23
1.3.4	Convergence de la solution du problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14)	29
1.3.5	Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution de (1.11)-(1.14) sous l'hypothèse (I)	33
1.3.6	Résultats numériques	41
1.3.7	Tableaux	42
1.3.8	Graphiques	44
1.3.9	Extinction en temps fini et convergence du temps d'extinction de la solution de (1.11)-(1.14) sous l'hypothèse (II)	45
1.3.10	Résultats numériques	49
1.3.11	Tableaux	50
1.3.12	Graphiques	52
2	EXPLOSION NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME D'EDP PARABOLIQUES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COUPLÉES NON LINÉAIRES	54
2.1	Introduction	55
2.2	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret en espace (2.5)–(2.7)	57
2.3	Propriétés qualitatives de la solution du problème (2.5)-(2.7)	58
2.4	Explosion et convergence du temps d'explosion.	64
2.5	Explosions simultanée et non simultanée	72
2.6	Résultats numériques	74
2.6.1	Tableaux	75
2.6.2	Graphiques	75
3	EXTINCTION NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME D'EDP PARABOLIQUES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COUPLÉES NON LINÉAIRES	78
3.1	Introduction	78
3.2	Existence et unicité de la solution du problème semi-discret en espace (3.5)-(3.7)	80
3.3	Propriétés qualitatives de la solution du problème (3.5)-(3.7)	81
3.4	Extinction de la solution de (3.5)-(3.7)	85
3.5	Extinctions simultanée et non simultanée	89
3.6	Convergence du temps d'extinction	95

Table des matières	vii
3.7 Résultats numériques	98
3.7.1 Tableaux	99
3.7.2 Graphiques	99
Conclusion et perspectives	104
ANNEXES	105
Bibliographie	113

Liste des tableaux

1.1	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 3, p = 3$.	42
1.2	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 3, p = 2$.	42
1.3	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 3, p = 1$.	43
1.4	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4, p = 4$.	43
1.5	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4, p = 3$.	43
1.6	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4, p = 2$.	43
1.7	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4, p = 1$.	43
1.8	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 0.5, p = 0.5$.	51
1.9	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1, p = 0.5$.	51
1.10	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1, p = 1$.	51
1.11	Temps d'extinction numériques, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1.5, p = 0.5$.	51
1.12	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1.5, p = 1$.	51
1.13	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1.5, p = 1.5$.	51
2.1	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 2, n = 1/2, q = 1/2, p = 1$.	76

2.2	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 1/2, n = 2, q = 1, p = 1/2$	76
2.3	Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $m=1/2, n=1/2, q=2, p=2$	76
3.1	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 0.5, p = 1, q = 2, n = 0.5$	100
3.2	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 1, p = 2.5, q = 0.5, n = 1$	100
3.3	Temps d'extinction numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 0.3, p = 2, q = 2, n = 0.3$	100

Table des figures

1.1	Évolution de la solution numérique pour $I=256$, $p=1$ et $q=3$	44
1.2	Évolution de la solution numérique pour $I=256$, $p=3$ et $q=3$	44
1.3	Évolution de la solution numérique U_h pour $I = 128$, $q = 1.5$ et $p = 1$	52
1.4	Évolution de la dérivée de la solution numérique U_h pour $I = 128$, $q = 1.5$ et $p = 1$	52
1.5	Évolution de la solution numérique U_h en fonction de l'espace au temps d'extinction pour $q = 1.5$ et $p = 1$	52
1.6	Évolution de U_I en fonction du temps pour $I = 128$, $q = 1.5$ et $p = 1$	52
2.1	Évolution de U_h et V_h pour $p=1$, $q=1/2$, $m=2$, $n=1/2$	76
2.2	Sur la gauche, évolution de U_h et Sur droite, évolution de V_h pour $p=1/2$, $q=1$, $m=1/2$, $n=2$	77
2.3	Sur la gauche, évolution de U_h et Sur droite, évolution de V_h pour $p=q=2$, $m=1/2$, $n=1/2$	77
3.1	Sur la gauche, non extinction de U_h et sur la droite, extinction de V_h pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$	101
3.2	Sur la gauche, évolution de U_1 et sur la droite, évolution de V_1 par rapport au temps, pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$	101
3.3	Sur la gauche, évolution de U_h et sur la droite, évolution de V_h par rapport à l'espace, au temps d'extinction, pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$	101
3.4	Sur la gauche, extinction de U_h et sur la droite, non extinction de V_h , V_h pour $m = 1$, $p = 2.5$, $q = 0.5$, $n = 1$	101
3.5	Sur la gauche, évolution de U_1 et sur la droite, évolution de V_1 par rapport au temps, pour $m = 1$, $p = 2.5$, $q = 0.5$, $n = 1$	102
3.6	Sur la gauche, évolution de U_h et sur la droite, évolution de V_h par rapport à l'espace, au temps d'extinction, pour $m = 1$, $p = 2.5$, $q = 0.5$, $n = 1$	102
3.7	Sur la gauche, extinction de U_h et sur la droite, extinction de V_h , pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$	102

3.8	Sur la gauche, explosion de U'_h et sur la droite, explosion de V'_h , pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$	102
3.9	Sur la gauche, évolution de U_1 et sur la droite, évolution de V_1 par rapport au temps, pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$	103
3.10	Sur la gauche, évolution de U_h et sur la droite, évolution de V_h par rapport à l'espace, au temps d'extinction, pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$	103

Liste des symboles et abréviations

Tout au long de cette thèse, nous utiliserons les notations et les définitions courantes suivantes :

- $\mathcal{C}^k(A, B)$, avec $k \in \mathbb{N}$: Ensemble des fonctions définies sur un intervalle A de \mathbb{R} , à valeurs dans $B \subseteq \mathbb{R}^L$ ($L \in \mathbb{N}^*$), k -fois dérivables et dont la dérivée k -ième est continue. L'ensemble $\mathcal{C}^0(A, B)$ sera noté $\mathcal{C}(A, B)$. Lorsque $B = \mathbb{R}$, on écrira $\mathcal{C}^k(A)$ au lieu de $\mathcal{C}^k(A, B)$.
- $\mathcal{C}^{k,\ell}(A \times B, C)$, avec $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $k \geq \ell$: Ensemble des fonctions définies sur $A \times B$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) à valeurs dans $C \subseteq \mathbb{R}$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre ℓ existent, sont continues sur $A \times B$ et la dérivée d'ordre k par rapport à la variable située dans A existe et est continue sur $A \times B$. L'ensemble $\mathcal{C}^{0,0}(A \times B, C)$ sera noté $\mathcal{C}(A \times B, C)$. Lorsque $C = \mathbb{R}$, on écrira $\mathcal{C}^{k,\ell}(A \times B)$ au lieu de $\mathcal{C}^{k,\ell}(A \times B, C)$.
- Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^{k,\ell}(A \times B, C)$, avec x la variable dans $A \subseteq \mathbb{R}$ et t la variable dans $B \subseteq \mathbb{R}$, on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f_x , la dérivée de f par rapport à x , on note f_{xx} , la dérivée seconde de f par rapport à x et on note $\frac{\partial f}{\partial t}$ ou f_t , la dérivée de f par rapport à t .
- $\mathbb{R}^I = \left\{ x = (x_1, \dots, x_I), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, I \right\}$;
- $\|f\|_\infty = \sup_E |f|$: Norme infinie d'une fonction f continue sur un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^I$
- I : Entier naturel strictement positif, représente le nombre d'intervalles consécutifs dans une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$;
- x_i : Abscisse du i -ème point de la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$, $i = 1, \dots, I$;
- h : Taille du pas d'espace ;
- X^T : Transposée du vecteur $X = (x_1, \dots, x_I)$ de \mathbb{R}^I ;
- $U_i(\cdot)$: Approximation semi-discrète de $u(x_i, \cdot)$, $i = 1, \dots, I$;
- δ^2 : Opérateur discret de dérivation du second ordre en espace ;

- V_i : Coordonnée d'indice i d'un vecteur V_h , $i = 1, \dots, I$;
- $V_h(t) \leq 0$: Pour tout $1 \leq i \leq I$, $V_i(t) \leq 0$, $t \in [0, T]$ avec $T > 0$;
- $V_h(t) \leq W_h(t)$: Pour tout $1 \leq i \leq I$, $V_i(t) \leq W_i(t)$, $t \in [0, T]$;
- T_h : Temps d'explosion ou d'extinction de la solution du problème semi-discret en espace ;
- n : Entier naturel ;

Résumé

On étudie quelques problèmes d'approximations numériques du temps d'explosion et d'extinction des systèmes, gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type parabolique avec des contrôles aux frontières non linéaires. Les comportements des solutions de certaines formes semi-discrètes des équations aux dérivées partielles paraboliques sont déterminés, en particulier ceux d'une semi-discrétisation de certaines équations de chaleur. Les conditions suffisantes pour l'explosion et l'extinction des solutions de ces formes semi-discrètes sont données. De plus, des conditions pour obtenir l'explosion ou l'extinction simultanée et non simultanée sont fournies pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques. La convergence des temps d'explosion et d'extinction des solutions de ces problèmes semi-discrètes vers ceux des solutions des problèmes continus est établie. Pour obtenir le temps numérique d'explosion, nous transformons les problèmes d'explosions semi-discrètes qui sont des systèmes d'équations différentielles singulières, en des systèmes d'équations différentielles non singulières par la technique de la transformation de la longueur d'arc, puis par l'utilisation d'une méthode de Runge-kutta nous obtenons des suites de temps qui convergent linéairement vers le temps d'explosion des problèmes semi-discrètes. Nous accélérons ces suites de temps par la méthode d'Aitken Δ^2 . En ce qui concerne les problèmes d'extinctions semi-discrètes par un changement de variable, nous transformons les problèmes d'extinctions semi-discrètes en des problèmes d'explosions semi-discrètes équivalents. Nous appliquons ensuite la même procédure que celle appliquée aux problèmes d'explosions semi-discrètes, afin d'obtenir de bons temps d'extinctions. Finalement, nous présentons quelques résultats numériques sur les temps d'explosions et d'extinctions, quelques résultats graphiques sur l'évolution des solutions qui illustrent nos analyses.

Mots-clés : différences finies, approximation numérique, problème parabolique avec contrôles aux frontières non linéaires, temps d'explosion, temps d'extinction, équation de chaleur, conditions aux limites non linéaires, explosion non simultanée, extinction non simultanée.

Abstract

We study some numerical approximation's problems of the blow-up times and quenching times of systems, governed by parabolic partial differential equations with nonlinear control's boundaries. Behaviors of solutions of semidiscrete's formes of parabolic equations are determined, especially those of heat equations. Sufficient conditions are given for blow-up and quenching of solutions of those semidiscrete's formes. In addition, conditions for obtaining simultaneous and non-simultaneous blow-up and quenching are provided for parabolic systems. The convergence of the blow-up time and quenching time of the solutions of these semidiscrete problems to those of the solutions of the continuous problems is established. To obtain the numerical blow-up time, we transform the blow-up semidiscrete's problems, which are singular differential equations systems, into non singular differential equation systems by the arc length transformation technique, then by using the Runge-kutta method we obtain a linearly convergent sequence to the blow-up times of the semidiscrete blow-up problems. We accelerate the sequence by the Aitken Δ^2 method. Concerning semidiscrete problems of quenching by a change of variable, we transform semidiscrete's problems of quenching into equivalent semidiscrete problems of blow-up. We then apply the same procedure as that applied to semidiscrete problems of blow-up, in order to obtain good quenching's times. Finally, we present some numerical results on blow-up time and quenching time and some graphic's results on the evolution of the solutions that illustrate our analysis.

Keywords : Finite differences, numerical approximation, parabolic problem with nonlinear boundary controls, blow-up times, quenching times, heat equation, nonlinear boundary conditions, non-simultaneous blow-up, non-simultaneous quenching.

Introduction générale

Un grand nombre de processus des sciences appliquées sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP). Ces EDP sont classées en trois grands groupes à savoir : les EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Les équations aux dérivées partielles paraboliques apparaissent chez les mathématiciens au *XVIII*^{ième} siècle et sont rencontrées dans de nombreuses situations physiques telles que les écoulements des fluides en milieu poreux, les transferts de chaleur, les réactions chimiques, la dynamique des populations. Très souvent, afin d'obtenir une solution bien définie, ces équations sont complétées par des conditions supplémentaires appropriées (généralement des conditions initiales et aux limites). L'une des propriétés les plus remarquables des solutions des problèmes d'évolution est la possibilité d'apparition d'éventuelles singularités à partir de données initiales appropriées, plus précisément à partir de classes de données pour lesquelles des théories d'existence et d'unicité peuvent être établies pour un intervalle de temps. Les singularités des problèmes d'évolution non linéaires proviennent des termes non linéaires présents dans les équations aux dérivées partielles ou dans les conditions aux limites. Elles dépendent généralement du temps et de l'emplacement et sont appelées, singularités en mouvement. D'autre part, les singularités des problèmes d'évolution linéaires proviennent des coefficients singuliers ou des données singulières et sont appelées singularités fixes. Les types les plus remarquables de ces singularités sont ceux que nous appelons *phénomène d'explosion* (i.e la solution devient non-bornée à partir d'un certain temps) et *phénomène d'extinction* (i.e la solution devient bornée après un certain temps tandis que la dérivée partielle première de la solution par rapport au temps devient non bornée). Ces phénomènes sont rencontrés généralement dans les transferts de chaleur qui sont présents dans les éruptions volcaniques, les tremblements de terre, les grondements de tonnerre et aussi dans les systèmes d'ingénierie.

Ils ont d'importantes significations pratiques dans les industries manufacturières. Ils indiquent l'interruption des processus de réactions ou de combustions continues et instables et l'explosion du carburant pour les fusées. Une meilleure compréhension des critères d'explosion et d'extinction peut conduire à une conception optimale des environnements de réaction-diffusion. Ces phénomènes sont également importants pour la théorie de l'écologie et les recherches environnementales. Au cours des trente cinq à quarante dernières années, de nombreux théorèmes sur

l'explosion et l'extinction des solutions d'équations d'évolution non linéaires ont été développés. Nous en présentons quelques uns d'entre eux.

0.1 Exemple d'explosion et extinction dans les équations différentielles ordinaires

Les phénomènes d'explosion et d'extinction se produisent sous une forme élémentaire dans la théorie des équations différentielles ordinaires (EDO), et sont équivalents à la non-existence globale des solutions, voir [51], par exemple le problème de l'équation de réaction à valeur initiale constante positive, à savoir

$$\begin{cases} u_t = f(u), & t > 0, \\ u(0) = a > 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

où f est positive et continue. Il est bien connu de [32] que, pour toute solution à ce problème, la condition

$$\int_R^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty, \text{ avec } R > 0,$$

est nécessaire et suffisante pour que survienne une explosion en temps fini. Si nous posons

$$F(z) = \int_0^z \frac{ds}{f(s)} \quad \text{pour tout } z > a,$$

alors le temps d'explosion de la solution de (0.1) est $T = F(\infty)$.

Pour le problème de type puissance, à savoir

$$\begin{cases} u_t = u^p, & t > 0, \\ u(0) = a > 0, \end{cases} \quad (0.2)$$

où $p > 1$, il est facile de voir que l'unique solution de ce problème est de la forme

$$u(t) = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}, \quad T = \frac{1}{a^{p-1}(p-1)}, \quad \forall t \in [0, T[.$$

Il est clair que la solution devient infinie quand t tend vers T , dans ce cas nous disons que la solution du problème ci-dessus explose en un temps fini T .

Si nous remplaçons $f(u)$ par $(1 - u)^{-p}$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} u_t = (1 - u)^{-p}, & t > 0, \\ u(0) = a, & 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

où $p > 0$. Nous pouvons voir que $f(u)$ devient singulière quand u prend des valeurs voisines de 1, ce problème est un problème d'extinction. Dans ce cas l'objectif est de trouver le temps auquel u atteint la valeur 1. Il n'est pas difficile de voir que l'unique solution de ce problème est de la forme

$$u(t) = 1 - (p + 1)(T - t)^{\frac{1}{p+1}}, \quad T = \frac{1}{p+1}(1 - a)^{p+1}, \quad \forall t \in [0, T[.$$

Nous pouvons remarquer que la solution tend vers 1 quand t tend vers T , nous disons que la solution u du problème ci-dessus s'éteint au temps fini T ; T est appelé le temps d'extinction. Il faut dire que les études des phénomènes d'explosion et d'extinction des équations différentielles ordinaires fournissent des idées de base pour l'étude des phénomènes d'explosion et d'extinction des équations aux dérivées partielles. Par conséquent, nous présentons quelques études des phénomènes d'explosion et d'extinction des équations aux dérivées partielles.

0.2 Exemple d'explosion et d'extinction dans les équations aux dérivées partielles paraboliques

Les problèmes d'explosion dans les équations aux dérivées partielles (EDP) paraboliques sont introduits en 1963 par Kaplan. Dans [34], Kaplan discute de certains aspects sur la théorie de l'unicité, de la stabilité et du comportement global de la solution pour une certaine classe d'équations de réaction-diffusion dans un domaine borné de \mathbb{R}^n . En particulier, sous certaines hypothèses sur les conditions aux limites de Dirichlet, sur la donnée initiale et sur la fonction F du problème ci-dessous

$$\frac{du}{dt} = \Delta u + F(u) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\tag{0.3}$$

il montre que la solution positive pour une donnée initiale de ce problème prend la valeur infinie à partir d'un certain temps fini.

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (0.4)$$

il est connu de A. Friedman [28] que la solution fondamentale est de la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy.$$

Fujita [31] étudie le problème de valeur initiale ci-dessous :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (0.5)$$

où $u_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est strictement positive. Il obtient les résultats suivant :

- Si $1 < p < 1 + 2/n$ il n'existe pas de solution globale sur $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$.
- Si $p > 1 + 2/n$, alors il existe des solutions sur $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$.

Et pour une fonction initiale u_0 donnée, la solution sur $\mathbb{R}^n \times]0, \infty[$ est la suivante

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \\ &+ \int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y, \tau) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right) dy d\tau. \end{aligned}$$

En 1976 Kobayashi et al [37] étudient une forme générale de (0.5), à savoir

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (0.6)$$

avec $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$. Sous les conditions suivantes

A.1 f une fonction continue, localement Lipschitzienne sur $]0, \infty[$ avec $f(0) = 0$, $f(s) > 0$, pour tout $s > 0$.

A.2 $\int_{0^+}^\varepsilon \frac{f(s)}{s^{2+2/n}} ds = \infty$ pour $\varepsilon > 0$ (avec ε assez petit).

A.3 Il existe une constante $0 < c \leq 1$ telle que

a.1 $f(\lambda s) \geq c\lambda^{1+2/n} f(s)$, pour $0 < s \leq \lambda$, $s < c$,

a.2 $f(\lambda s) \geq c\lambda^{2+2/n} f(s)$, pour $0 < \lambda \leq s < c$.

Il montre que chaque solution positive de (0.6) devient infinie pour la norme L^∞ à partir d'un certain temps fini, c'est-à-dire que la solution explose en un temps fini. Pour certains autres problèmes, une explosion peut survenir en raison de l'effet des conditions aux limites même si l'équation est linéaire et a des coefficients lisses, par exemple le problème de l'équation de la chaleur avec une condition aux limites non linéaires, à savoir

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = F(u), & (x, t) \in \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (0.7)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Levine et Payne en 1974 ont examiné ce problème, ils ont montré dans [47], que si F est de la forme $F(v) = |v|^{2\alpha+1}h(v)$ où h est une fonction positive strictement croissante pour $\alpha \geq 0$ et si

$$\int_{\partial\Omega} \left(\int_0^{u_0(x)} f(v)dv \right) dx > \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx,$$

alors toute solution positive de (0.7) explose en un temps fini. En 1991 Wolanski et al [38] inspirés par les résultats de Levine et Payne [47] discutent sur la théorie d'existence et d'unicité de la solution de (0.7) et sous certaines conditions, ils étudient aussi les critères d'explosion des solutions de (0.7).

En ce qui concerne les phénomènes d'extinction, c'est en 1975 qu'ils furent introduits par Kawarada. Dans [35], Kawarada examine le problème initial des valeurs aux limites :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u) & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (0.8)$$

avec $\Omega =]0, l[$ et $f(u) = \frac{1}{1-u}$. Il montre que si $l > 2\sqrt{2}$, alors u atteint 1 dans un temps fini quand $x = l/2$. Il montre aussi que la dérivée par rapport au temps de la solution explose au temps où cette solution atteint 1. Acker et Walter [4] en 1978 ont étendu les résultats de Kawarada dans [35] en remplaçant la fonction $f(u)$ par une fonction réelle continûment différentiable $f(u, u_x)$ sur un ouvert $[0, b[\times \mathbb{R}$ et en prenant $\Omega =]-l, l[$. Levine et Montgomery [46], quant à eux, en 1980 donnent des conditions sur la fonction f du problème (0.8) pour qu'il y ait extinction ou non de la solution du problème (0.8). Comme pour les problèmes d'explosion, une extinction rapide peut survenir en raison des conditions aux limites même si l'équation est

linéaire. Boni [10] en considérant le problème (0.7) donne des conditions sur la fonction F et sur la donnée initiale pour qu'il y ait extinction de la solution de (0.7).

Depuis l'apparition des premiers travaux menés par Kaplan, Fujita et Kawarada, les phénomènes d'explosion et d'extinction des EDP ont été largement étudiés d'un point de vue mathématique (voir [1, 2, 4, 5], [8], [13], [16], [17], [28], [44, 46, 47, 48], [55], [61], [67], [76], [82]). L'étude des problèmes d'explosion et d'extinction n'est pas seulement intéressante du point de vue mathématique mais elle est aussi importante pour une compréhension profonde de la nature des phénomènes que ces équations décrivent. En plus de présenter un intérêt pour les ingénieurs et chercheurs, les théorèmes d'explosion et d'extinction intéressent souvent les ingénieurs et chercheurs dans divers domaines tels que la théorie de combustion, la génétique chimique de la population [32], [45], [68, 80] et la mécanique des fluides [29], [70].

Il est devenu extrêmement important d'estimer les temps d'explosion et d'extinction de manière efficace pour différents modèles d'équations aux dérivées partielles paraboliques, de manière à obtenir de meilleurs contrôles et conceptions dans les applications industrielles. Malheureusement dans la plupart des cas, on ne sait pas calculer explicitement les temps d'explosion et d'extinction et pour cela l'on fait appel à des techniques de résolutions approchées qui sont développées par l'analyse numérique. Nakagawa fut l'un des premiers auteurs sur l'étude numérique des phénomènes d'explosion. Dans [54], Nakagawa considère le problème (0.8) avec $f(x) = x^2$ et $\Omega =]0, 1[$. Il transforme le problème (0.8) en un système de I équations dont la solution est le vecteur $U^m = (U_0^m, U_1^m, \dots, U_I^m)^T$, par la méthode des différences finies avec un maillage d'espace à pas constant $h = 1/I$ et un maillage temporel adaptatif défini de manière suivante

$$t_n = t_{n-1} + \tau \times \min \left\{ 1, \frac{1}{\|U_h^m\|} \right\}, \quad t_0 = 0, \quad \tau = \lambda h^2, \quad \text{où } 0 < \lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Il montre que la solution numérique converge vers la solution de (0.8) et explose en temps fini. De plus, il montre également la convergence du temps d'explosion de la solution numérique vers le temps d'explosion de la solution du problème continu. Plus tard, ses résultats ont été généralisés dans ([3], [16], [19], [39]), dans lesquels le comportement asymptotique des solutions numériques de (0.8) a également été analysé. Abia et al [1] étudie un schéma semi-discret obtenu avec la méthode des différences finies utilisant un maillage régulier d'espace du problème (0.8) avec $\Omega =]0, 1[$. En notant U_h la solution positive de ce schéma, il montre que si f est une fonction convexe strictement positive sur $]0, \infty[$ telle que

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty, \quad \text{pour un certain } R_0 > 0$$

alors cette solution numérique de (0.8) explose en un temps fini. Il montre aussi sous certaines conditions la convergence de la solution semi-discrète et du temps d'explosion semi-discret

respectivement vers ceux du problème continu quand le pas de maillage spatiale tend vers zéro. Récemment en 2011, M. Taha et al [72] présentent une méthode numérique afin d'étudier le phénomène d'explosion de certaines équations de réaction-diffusion avec conditions aux limites non linéaires. Ils proposent aussi un algorithme utilisant un maillage temporel adaptatif pour approximer le temps d'explosion. Plus tard, cet algorithme est appliqué par K. N'Guessan, K. A. Touré et al [53], [59], [74] sur une classe d'équations semi-linéaires paraboliques dont la solution explose ou s'éteint. Contrairement à ces résultats, en 2013 dans [18], Cho a proposé un algorithme permettant de calculer un temps approximatif d'explosion par des schémas de différences finies dont les mailles de temps sont données de manière uniforme. Ushijima dans [75] étudie l'approximation numérique d'une famille d'EDP parabolique qui est la suivante :

$$u_t = F(t, x, u, \nabla u, \Delta u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (0.9)$$

$$Bu(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (0.10)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (0.11)$$

où B représente les conditions aux limites. Tout en supposant que (0.9)-(0.11), admet une unique solution $u(\cdot, t)$ locale dans un espace de fonctions X , pour une fonction initiale u_0 donnée. Tout en supposant qu'il existe un temps fini T tel que cette solution s'éteigne ou explose. En se basant sur la méthode du coefficient de Fourier, Ushijima présente des conditions suffisantes pour que le temps d'explosion ou d'extinction d'un schéma numérique qui approxime le problème (0.9)-(0.11), soit une bonne approximation du temps d'explosion ou d'extinction du problème continu. L'idée principale est de trouver une fonctionnelle J continue sur l'espace de fonction X et une fonction H puis construire leur approximation respective J_h dans un espace de fonctions X_h (où X_h est l'approximation de X) et H_h . Toutes à valeurs dans \mathbb{R} , vérifiant l'une des conditions suivantes :

- (A1) $J(t)$ satisfaisant la condition (a1), tandis que $J_h(t)$ de classe C^1 satisfaisant (a2) pour une fonction G .
- (A2) $J(t)$ de classe C^1 satisfaisant (b1), tandis que $J_h(t)$ de classe C^2 satisfaisant (b2). De plus il existe une constante M telle que $J(t) < M$ et $J_h(t) < M$ pour tout $h > 0$.
- (A3) $J(t)$ de classe C^1 satisfaisant (b1), tandis que $J_h(t)$ de classe C^2 satisfaisant (b1) et (b2).
- (A4) $J(t)$ de classe C^1 satisfaisant (c1) pour une fonction H , tandis que $J_h(t)$ de classe C^1 satisfaisant (a2) et (c2) pour toute fonction G et J et J_h ou H et H_h vérifient les conditions suivantes :
- (A5) La famille $(U_h)_{h>0}$ étant l'approximation de u telle que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J_h[U_h](t) - J[u](t)| = 0,$$

$$(A6) \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |H_h(t) - H(t)| = 0.$$

Où (a1), (a2), (b1), (b2), (c1) et (c2) sont les conditions suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow T} J[u](t) = \infty, \quad (a1)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{dJ[u](t)}{dt} = \infty, \quad (b1)$$

$$\frac{dJ[u](t)}{dt} \geq H(t) \quad \lim_{t \rightarrow T} H(t) = \infty, \quad (c1)$$

$$\frac{dJ_h[u_h](t)}{dt} \geq G(J_h[u_h](t)) \quad (a2)$$

où $G : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant

$$\begin{cases} G(s) > 0 & \text{pour tout } s > R_0 \\ \int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty. \end{cases}$$

$$\frac{d^2 J_h[u_h](t)}{dt^2} \geq -c \frac{dJ_h[u_h](t)}{dt}, \quad (b2)$$

où c est une constante strictement positive.

$$\frac{dJ_h[u_h](t)}{dt} \geq H_h(t), \quad \frac{dH_h(t)}{dt} \geq 0. \quad (c2)$$

Il obtient les résultats suivants :

Théorème 0.1. *Si la solution u explose (ou s'éteint) en un temps fini T et les conditions (A1) et (A5) sont satisfaites, alors U_h explose (ou s'éteint) en un temps fini T_h tel que $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T$.*

Théorème 0.2. *Si la solution u explose (ou s'éteint) en un temps fini T et les conditions (A2) et (A5) sont satisfaites, alors U_h explose (ou s'éteint) en un temps fini T_h tel que $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T$.*

Théorème 0.3. *Si la solution u explose (ou s'éteint) en un temps fini T et les conditions (A3) et (A5) sont satisfaites, alors U_h explose (ou s'éteint) en un temps fini T_h tel que $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T$.*

Théorème 0.4. *Si la solution u explose (ou s'éteint) en un temps fini T et les conditions (A4) et (A6) sont satisfaites, alors U_h explose (ou s'éteint) en un temps fini T_h tel que $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T$.*

Plusieurs auteurs ont tenté de calculer numériquement le temps d'explosion ou d'extinction des solutions de certaines équations aux dérivées partielles paraboliques (par exemple, [11, 12, 13, 14], [21, 22, 23, 24], [27], [48]). C'est un problème délicat, car la plupart des méthodes de résolution d'équations d'évolution perdent en précision au fur et à mesure que la

solution devient grande. En revanche, C. Hirota et K. Ozawa [41] proposent un algorithme efficace pour estimer le temps d'explosion numérique des EDO lorsque la solution tend vers l'infini. Ils considèrent un système d'équations différentielles dont la solution est une fonction vectorielle qui explose pour la norme infinie en un temps fini. Par un changement de variable faisant intervenir la longueur d'arc paramétré associé à la solution, ils transforment le système d'équations différentielles ordinaires singulier en un système d'équations différentielles ordinaires non singulier, pour générer une suite linéairement convergente de temps d'explosion (avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4). Cette convergence est ensuite accélérée par la méthode d'Aitken Δ^2 .

Notre travail de recherche a pour thème : "Analyse numérique de quelques équations et systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques. Études d'explosions et d'extinctions".

Cette thèse, concerne les temps d'explosion et d'extinction numérique de certaines équations et système d'équations de conduction de la chaleur dans des matériaux avec des sources de chaleur non linéaires aux extrémités des matériaux. D'abord, nous remplaçons les équations des problèmes continus par des systèmes d'équations différentielles ordinaires appelés problèmes semi-discrets (ou problèmes numériques) que nous obtenons par la méthode des différences finies. Ensuite, nous montrons que les solutions de nos problèmes semi-discrets (aussi appelées solutions semi-discrètes) reproduisent les mêmes propriétés que celles des problèmes continus, puis nous montrons que les solutions semi-discrètes approximent bien ceux des problèmes continus. Nous montrons pour les phénomènes d'explosion et d'extinction que le temps d'explosion ou d'extinction des solutions des problèmes continus sont approchés par ceux des solutions semi-discrètes. Étant donné que ces équations différentielles obtenues sont singulières, par la technique de transformation d'arc utilisant la longueur de l'arc paramétré associé aux solutions, nous donnons des équations non singulières équivalentes aux équations différentielles singulières. Finalement, par l'implémentation de la méthode de Runge-Kutta, de la méthode d'Aitken Δ^2 et de ces dernières équations obtenues, nous obtenons des résultats numériques qui illustrent tous nos travaux.

Cette thèse est organisée de manière suivante :

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous donnons un aperçu de l'étude du problème continu suivant

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u_x(0, t) = f(u(0, t)), \quad u_x(1, t) = g(u(1, t)), & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (0.12)$$

La résolution d'un tel problème consiste ici, à trouver une fonction u à deux variables, une variable d'espace $x \in [0, 1]$ et une variable de temps $t \in [0, \infty[$, telle que u vérifie le problème ci-dessus. Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons des références sur l'existence locale et l'unicité de la solution du problème puis, quelques propriétés qualitatives de celle-ci. Ensuite, sous des formes de f et g et sous certaines conditions sur ces formes, nous montrons que la solution du problème continu (0.12) explose en un temps fini. Enfin, sous d'autres formes de f et g et sous certaines conditions sur ces formes, nous montrons que la solution du problème continu (0.12) s'éteint en un temps fini. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous approximons le problème (0.12) par la méthode des différences finies et nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires qui est appelé problème semi-discret en espace. Sous les mêmes hypothèses émises dans l'étude de la solution du problème continu, nous montrons que la solution du problème semi-discret possède les mêmes propriétés d'explosion et d'extinction que celle du problème continu. Finalement, nous présentons des résultats numériques qui illustrent nos analyses.

Le second chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'un problème semi-discret en espace du système parabolique avec conditions aux limites couplées et non linéaires, qui est le suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & v_t = v_{xx}, & (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ -u_x(0, t) = u^m(0, t) + v^p(0, t), & -v_x(0, t) = u^q(0, t) + v^n(0, t), & t \in]0, T[, \\ u_x(1, t) = u^m(1, t) + v^p(1, t), & v_x(1, t) = u^q(1, t) + v^n(1, t), & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & v(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (0.13)$$

Dans ce chapitre, nous utilisons le même schéma numérique que le chapitre précédent pour approximer le problème continu (0.13). Nous montrons que la solution de notre problème semi-discret en espace existe et est unique. Nous prouvons que cette unique solution approxime bien la solution du problème continu (0.13) lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. Nous donnons quelques propriétés de la solution du problème semi-discret en espace. Nous montrons aussi que la solution du problème semi-discret en espace explose en un temps fini et estimons son temps d'explosion semi-discret. Nous traitons aussi le cas d'explosions simultanées et non simultanées de la solution. Et enfin, nous prouvons que le temps d'explosion de la solution du problème semi-discret en espace converge vers le temps d'explosion de la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. Finalement, nous présentons des résultats numériques qui illustrent nos analyses.

Le troisième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'un problème semi-discret en espace du système parabolique avec conditions aux limites couplées et non linéaires, qui est le

suisant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & v_t = v_{xx}, & (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u_x(0, t) = u^{-m}(0, t) + v^{-p}(0, t), & v_x(0, t) = u^{-q}(0, t) + v^{-n}(0, t), & t \in]0, T[, \\ u_x(1, t) = 0, & v_x(1, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, & v(x, 0) = v_0(x) > 0, & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (0.14)$$

Dans ce chapitre, nous utilisons le même schéma numérique que le chapitre précédent pour approximer le problème continu (0.14). Nous montrons que la solution du problème semi-discret en espace existe et est unique. Nous prouvons que cette unique solution approxime bien la solution du problème continu (0.14) lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. Nous donnons quelques propriétés de la solution du problème semi-discret en espace. Nous montrons aussi que la solution du problème semi-discret en espace s'éteint en un temps fini et estimons son temps d'extinction semi-discret. Nous traitons aussi le cas d'extinctions simultanées et non simultanées de la solution. Et enfin, nous prouvons que le temps d'extinction de la solution du problème semi-discret en espace converge vers le temps d'extinction de la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. Finalement, par un changement de fonction inconnue nous transformons le problème (0.14) en un problème dont la solution explose au temps d'extinction de la solution semi-discrète de (0.14) (ce problème d'explosion est équivalent au problème semi-discret (0.14)); ensuite nous présentons des résultats numériques qui illustrent nos analyses.

Nous terminons en rappelant en annexe, les théorèmes de comparaison et les principes du maximum issus de [57] que nous utilisons dans le premier chapitre. Les annexes contiennent aussi les Théorèmes d'unicité issus de [7], [76] et [78], des solutions de nos différents problèmes continus et les quatre publications tirées de la présente thèse. Il s'agit des articles suivants :

- "Numerical Blow-up for A Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions, *Journal of Mathematics Research (JMR)*, 10(5), (2018), 119-128".
- "Numerical quenching of a heat equation with nonlinear boundary conditions, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications (JNSA)*, 13 (2020), 65-74".
- "Numerical Blow-up for heat equations with coupled nonlinear boundary fluxes, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 117(2), (2019), 119-138".
- "Numerical quenching for heat equations with coupled nonlinear boundary flux, *International Journal of Analysis and Applications (IJAA)*, 17(6), (2019), 1034-1051".

Chapitre 1

EXPLOSION ET EXTINCTION DES SOLUTIONS DE CERTAINES EDP PARABOLIQUES AVEC CONDITIONS DE NEUMANN NON LINÉAIRES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation de la chaleur de la forme

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[, \quad (1.1)$$

soumise aux conditions aux bords de Neumann non linéaires

$$u_x(0, t) = f(u(0, t)), \quad u_x(1, t) = g(u(1, t)), \quad t \in]0, T[, \quad (1.2)$$

et à la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

Le problème (1.1)-(1.3) peut être vu comme un transfert de chaleur par conduction, dans une tige métallique de longueur 1 (la solution u est la température au point x et au temps t), soumise à une température initiale positive $u_0(x)$ et aussi soumise respectivement aux extrémités $x = 0$ et $x = 1$ à des flux de chaleur $f(u(0, \cdot))$ et $g(u(1, \cdot))$ qui varient en fonction du temps. Dans la théorie de la conduction de la chaleur, le transfert de chaleur est la diffusion de la chaleur d'un endroit à un autre dans un milieu ou entre deux milieux différents. Elle est due aux mouvements des atomes (ou molécules) ou aux mouvements des électrons libres. La chaleur

peut être transférée entre des solides, des liquides et des gaz. Dans ce chapitre nous traitons les cas suivants :

$$f(u(0, t)) = u^p(0, t), \quad g(u(1, t)) = u^q(1, t), \quad (\text{I})$$

et

$$f(u(0, t)) = (1 - u(0, t))^{-p}, \quad g(u(1, t)) = (1 - u(1, t))^{-q}; \quad (\text{II})$$

avec p, q des constantes non négatives.

Pour les questions d'existence locale et l'unicité de la solution du problème continu (1.1)-(1.3) nous nous référons au Corollaire 3.2 ou au Théorème 3.13 (voir annexes). La théorie classique des équations aux dérivées partielles paraboliques fournit également des résultats d'existence de solution régulière du problème (1.1)-(1.3), notamment celle de Ladyzenskaja, Solonnikov, Ural'ceva dans [43].

Le cas où $f(u(0, t)) = u^p(0, t)$ et $g(u(1, t)) = u^q(1, t)$, l'intervalle $[0, T[$ désigne l'intervalle de temps maximal sur lequel la solution u de (1.1)-(1.3) existe. Le temps T peut être fini ou infini. Quand T est infini, nous disons que la solution u existe globalement. Quand T est fini, la solution u développe une singularité dans un temps fini. À savoir,

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = \infty,$$

où $\|u(\cdot, t)\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)|$. Dans ce cas, nous disons que la solution u explose en un temps fini T , et T est appelé le temps d'explosion de la solution u . Pour le cas où $f(u(0, t)) = (1 - u(0, t))^{-p}$ et $g(u(1, t)) = (1 - u(1, t))^{-q}$, l'intervalle $[0, T[$ est l'intervalle de temps maximal sur lequel

$$\text{pour tout } t \in [0, T[, \|u(\cdot, t)\|_{\infty} < 1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = 1^-.$$

Le temps T peut être fini ou infini. Quand T est infini, nous disons que la solution u s'éteint globalement. Quand T est fini, la dérivée de la solution par rapport au temps c'est-à-dire u_t développe une singularité en un temps fini et nous avons

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u_t(\cdot, t)\|_{\infty} = \infty.$$

Dans ce dernier cas, nous disons que la solution u s'éteint en un temps fini T , et T est appelé le temps d'extinction de la solution u .

L'étude théorique de l'explosion et de l'extinction des solutions des équations aux dérivées partielles paraboliques avec conditions aux limites non linéaires a fait l'objet de nombreuses enquêtes par plusieurs auteurs (voir [11], [15], [21, 22], [35, 36], [38],[42], [44], [46], [47], [60], [64, 65], [77], [79], citeYuanhong et les références citées). Ozalp et al [60] étudient le problème

(1.1)-(1.3) dans l'intervalle $[0, a]$ avec $f(u(0, t)) = u^p(0, t)$ et $g(u(a, t)) = u^q(a, t)$, ils montrent l'explosion de la solution u en un temps fini T lorsque la donnée initiale est une sous-solution du problème (1.1)-(1.3) avec $q \geq p$ et $q > 1$. Pour une donnée initiale u_0 sous-solution du problème (1.1)-(1.3) ils prouvent aussi ([60], Théorème 2.5 et Théorème 2.6) que la solution u explose seulement au point d'abscisse $x = a$ si et seulement si $q \geq p$, $q > 1$, $u'_0(x) \geq xu_0^q(x)$ et $a \leq 1$. Nous pouvons remarquer que tous les résultats dans [60] sont aussi vrais pour $x = 1$. Par contre, Chan [15] étudie le problème (1.1)-(1.3) dans l'intervalle $[0, a]$ avec $f(u(0, t)) = (1 - u(0, t))^{-p}$ et $g(u(1, t)) = (1 - u(1, t))^{-q}$. Pour une donnée initiale sous-solution de (1.1)-(1.3), il montre ([15], Théorème 3 et 6) que la solution s'éteint en un temps fini T et seul le point $x = a$ est le point d'extinction avec $q \geq p$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude numérique de (1.1)-(1.3). Pour une étude antérieure sur les approximations numériques du système parabolique avec conditions aux limites non linéaires auxquelles nous nous référons [1], [2], [59], [72], [75]. Dans la section 1.2, nous donnons un aperçu des études du problème continu (1.1)-(1.3) sous les hypothèses (I) et (II). Dans la section 1.3, nous menons une étude numérique du problème continu (1.1)-(1.3), nous commençons par construire un schéma semi-discret en espace et ensuite nous montrons l'existence et l'unicité de la solution de ce schéma. Nous donnons quelques propriétés qualitatives de la solution du schéma et étudions la convergence de la solution du schéma vers la solution du problème continu (1.1)-(1.3), quand le pas de maillage en espace tend vers zéro. Dans la suite, sous certaines conditions nous montrons d'une part sous l'hypothèse (I) que la solution du schéma numérique explose en un temps fini et que ce temps est une bonne approximation de celui du problème continu, quand le pas de maillage est assez petit. D'autre part sous l'hypothèse (II), nous montrons que la solution du schéma numérique s'éteint en un temps fini et que ce temps est une bonne approximation de celui du problème continu, quand le pas de maillage est assez petit. Finalement, nous présentons quelques résultats numériques et graphiques qui illustrent nos analyses.

1.2 Étude du problème continu

Dans tout ce chapitre nous travaillons avec $u \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{2,1}([0, 1] \times]0, T[)$ solution classique du problème (1.1)-(1.3) pour la donnée initiale u_0 .

1.2.1 Propriétés qualitatives

Dans cette sous-section, nous supposons que $u_{xx}(x, 0) \geq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. Nous présentons les résultats sur les propriétés qualitatives de la solution du problème (1.1)-(1.3). Ces résultats ont été prouvés par Chan dans [15] et Ozalp et al dans [60].

Nous commençons par la définition d'une sous-solution et d'une sur-solution du problème (1.1)-(1.3)

Définition 1.1. Une fonction v est appelée une sous-solution de (1.1)-(1.3), si v satisfait les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) &\leq 0, \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[, \\ v_x(0, t) &\geq f(v(0, t)), \quad v_x(1, t) \leq g(v(1, t)), \quad t \in]0, T[, \\ v(x, 0) &\leq v_0(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Quand les inégalités sont inverses, nous avons une sur-solution.

Nous présentons le Théorème de comparaison pour le problème (1.1)-(1.3). Puis les résultats sur les propriétés qualitatives de u .

Théorème 1.1. Soient w et v solutions de (1.1)-(1.3) avec respectivement des données initiales w_0 et v_0 . Si $w_0 \leq v_0$, on a alors $w(x, t) \leq v(x, t)$, pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T[$.

Lemme 1.1. Si u_0 est sous-solution de (1.1)-(1.3), alors on a :

1. $u(x, t) > 0, \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T[$,
2. $u_t(x, t) > 0, \forall (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[$,
3. $u_t(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in [0, 1] \times]0, T[$
4. $u_x(x, t) > 0, \forall (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[$.

1.2.2 Explosion et point d'explosion de la solution de (1.1)-(1.3) sous l'hypothèse (I)

Dans la suite de cette sous-section nous supposons que $g(s) = s^q$ et $f(s) = s^p$ pour tout $s \geq 0$ et la donnée initiale u_0 est sous-solution, non négative et croissante. Nous montrons d'abord que si u explose en un temps fini T , alors le point $x = 1$ est le seul point d'explosion.

Théorème 1.2. Supposons que $q > 1$ et la solution u explose en un temps fini T . Alors $x = 1$ est l'unique point d'explosion.

Pour la preuve de ce Théorème nous nous référons à [60].

Lemme 1.2. Si $q \geq p, q > 1$, alors il existe une constante $\alpha \in]0, 1[$ telle que

$$\forall t \in [0, T[, \quad g(u(1, t)) - f(u(0, t)) \geq \alpha g(u(1, t)).$$

Preuve. Comme u_0 est sous-solution non négative et croissante, d'après le Lemme 1.1 et les hypothèses sur les fonctions f et g et sur les paramètres p et q , nous avons l'inégalité ci-dessous

$$\frac{f(u(0, t))}{g(u(1, t))} < 1, \quad t \in [0, T[.$$

Posons

$$c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{f(u(0, t))}{g(u(1, t))} & \text{si } 0 \leq t < T \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce au Théorème 1.2, nous avons la continuité de c sur l'intervalle $[0, T]$ et à valeur dans $]0, 1]$. D'après le Théorème des bornes, c atteint son minimum sur $[0, T]$. D'où l'existence d'une constante $\alpha \in]0, 1]$ telle que $g(u(1, t)) - f(u(0, t)) \geq \alpha g(u(1, t))$, $\forall t \in [0, T[$. \square

Théorème 1.3. Soit u la solution de (1.1)-(1.3) avec u_0 sous-solution. Supposons que

$$q > 1 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty.$$

Alors u explose en un temps fini T pour la norme L^1 .

Preuve. Soient $T' < T$, $J(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$, pour tout $t \in [0, T']$.

1.

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx = g(u(1, t)) - f(u(0, t)),$$

d'après le Lemme 1.2, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour $t \in [0, T']$

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \alpha g(u(1, t)).$$

D'après le Lemme 1.1 nous avons

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \alpha g(u(x, t)), \quad \forall x \in [0, 1].$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus sur $[0, 1]$ par rapport à la variable x nous obtenons l'inégalité ci-dessous

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \int_0^1 \alpha g(u(x, t)) dx,$$

par l'inégalité de Jensen, on a, pour $t \in [0, T']$

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \alpha g(J(t)). \quad (1.4)$$

Ce qui entraîne que

$$\int_0^t \frac{dJ(\tau)}{g(J(\tau))} \geq \alpha t.$$

Rappelons que $g(s) = s^q$, $s > 0$, donc

$$\int_0^t \frac{dJ(\tau)}{(J(\tau))^q} \geq \alpha t,$$

par un changement de variable, nous avons

$$\int_{J(0)}^{J(t)} \frac{ds}{s^q} \geq \alpha t,$$

d'où

$$J(t) \geq (J(0)^{1-q} - \alpha(q-1)t)^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Il est facile de voir que $J(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \frac{J(0)^{-q+1}}{\alpha(q-1)}$.

D'où u explose pour la norme L^1 à un temps fini T .

$$T \leq \frac{J(0)^{-q+1}}{\alpha(q-1)}.$$

□

Comme conséquence immédiate du Théorème 1.3, nous avons l'explosion de u pour la norme infinie quand t tend vers T , c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

1.2.3 Extinction et point d'extinction de la solution de (1.1)-(1.3) sous l'hypothèse (II)

Dans cette sous-section, nous supposons que $g(s) = (1-s)^{-q}$ et $f(s) = (1-s)^{-p}$, la donnée initiale u_0 est sous-solution, non négative et croissante, et $q \geq p$. Nous rappelons d'abord que si u , la solution de (1.1)-(1.3) s'éteint, alors le point $x = 1$ est le seul point d'extinction.

Théorème 1.4. *Si u s'éteint en un temps fini T , alors $x = 1$ est l'unique point d'extinction.*

Pour la preuve de ce Théorème nous nous référons à [15].

Lemme 1.3. *Si $q \geq p$, alors il existe une constante $\alpha \in]0, 1]$ telle que*

$$\forall t \in [0, T[, \quad g(u(1, t)) - f(u(0, t)) \geq \alpha g(u(1, t)).$$

Preuve. Comme u_0 est sous-solution, non négative, croissante et $0 \leq u_0(x) < 1$ pour $x \in [0, 1]$, d'après le Lemme 1.1 et les hypothèses sur les fonctions f et g et sur les paramètres p et q , nous avons l'inégalité ci-dessous

$$\frac{f(u(0, t))}{g(u(1, t))} < 1, \quad t \in [0, T[.$$

Posons

$$c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{f(u(0, t))}{g(u(1, t))} & \text{si } 0 \leq t < T \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que c est continue sur $[0, T]$. c atteint son minimum car elle est continue sur un compact. D'où l'existence d'une constante $\alpha \in]0, 1]$ telle que $g(u(1, t)) - f(u(0, t)) \geq \alpha g(u(1, t))$, pour tout $t \in [0, T[$. \square

Dans la suite nous montrons que le temps maximal T pour lequel $\|u(\cdot, t)\|_\infty < 1, \forall t \in [0, T[$ et $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 1^-$, est fini.

Théorème 1.5. *Si $q \geq p$, alors*

1. *il existe un temps fini T tel que $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 1^-$;*
2. *u_t explose quand u atteint la valeur 1.*

Preuve.

1. Par définition de T nous avons $0 \leq u(x, t) < 1, \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T[$.

Soient, $\beta = \alpha g(u(1, 0))$, $T' < T$ et $I(t) = \int_0^1 (1 - u(x, t)) dx, \forall t \in [0, T']$.

Nous avons pour tout $t \in [0, T']$

$$\begin{aligned} I'(t) &= - \int_0^1 u_t(x, t) dx \\ I'(t) &= -[u_x(x, t)]_0^1 \\ I'(t) &= -(g(u(1, t)) - f(u(0, t))), \quad (\text{d'après 1.2}). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.3 et le Lemme 1.1, on a

$$I'(t) \leq -\alpha g(u(1, t)) \leq -\beta \Rightarrow I'(t) \leq -\beta.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, T']$

$$0 \leq I(t) \leq I(0) - \beta t,$$

ce qui entraîne que $I(t_0) = 0$ pour $t_0 = \frac{I(0)}{\beta}$. Comme u est croissante par rapport à x , nous obtenons

$$0 < 1 - u(1, t) \leq I(t) \leq I(0) - \beta t.$$

D'où l'existence d'un temps fini T ($0 < T \leq t_0$) tel que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(1, t) = 1^-.$$

2. Supposons que u_t est bornée. Alors il existe une constante positive M telle que $u_t < M$. puisque $u_t = u_{xx}$, nous avons

$$u_{xx} < M \text{ dans }]0, 1[\times]0, T[.$$

En intégrant chaque membre de la dernière inégalité par rapport à la variable d'espace de x à 1 nous obtenons

$$(1 - u(1, t))^{-q} - u_x(x, t) \leq M(1 - x)$$

puis

$$(1 - u(1, t))^{-q} \leq M(1 - x) + u_x(x, t)$$

par intégration de chacun des membres de l'inégalité ci-dessus par rapport à la variable d'espace de 0 à 1 nous avons l'inégalité suivante,

$$\frac{1}{(1 - u(1, t))^q} \leq \frac{M}{2} + u(1, t) - u(0, t).$$

Quand $t \rightarrow T^-$, nous pouvons constater que le terme de gauche de l'inégalité ci-dessus devient infini tandis que le terme de droite est fini. Cette contradiction montre que u_t explose quand $\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 1^-$. \square

1.3 Étude numérique

1.3.1 Construction du schéma semi-discret en espace de (1.1)-(1.3)

Nous établissons une forme semi-discrète de (1.1)-(1.3) de la façon suivante : Nous considérons une subdivision $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{I-1} < x_I = 1$ de l'intervalle

$[0, 1]$, où $I \in \mathbb{N}$ et $I \geq 2$, et $i = 1, \dots, I$. Nous choisissons comme pas de subdivision, le réel strictement positif h tel que

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{I-1}, \quad 1 \leq i \leq I-1.$$

Ce qui implique $x_i = (i-1)h$ pour $i = 1, \dots, I$.

En remplaçant x par x_i dans le problème continu (1.1)-(1.3), nous obtenons, pour $t \in]0, T[$, le schéma suivant :

$$u_t(x_i, t) = u_{xx}(x_i, t), \quad i = 2, \dots, I-1, \quad (1.5)$$

$$u_x(x_1, t) = f(u(x_1, t)), \quad u_x(x_I, t) = g(u(x_I, t)), \quad (1.6)$$

$$u(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.7)$$

On suppose que $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$. On cherche à déterminer des approximations de $u_x(x_i, t)$ et $u_{xx}(x_i, t)$.

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i - h, t), \quad i = 2, \dots, I, \quad t \in [0, T].$$

La solution u admet un développement limité de type Taylor-Lagrange en espace d'ordre 4 de la forme :

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t) = u(x_i + h, t) &= u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t) \\ &\quad + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\alpha_i, t), \quad \alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}, t) = u(x_i - h, t) &= u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t) \\ &\quad + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\beta_i, t), \quad \beta_i \in]x_{i-1}, x_i[, \quad i = 2, \dots, I, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En faisant l'addition membres par membres des deux précédentes égalités, on obtient :

$$u(x_{i+1}, t) + u(x_{i-1}, t) = 2u(x_i, t) + h^2u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\alpha_i, t) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\beta_i, t) \quad t \in [0, T].$$

Avec $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $\beta_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 2, \dots, I-1$, $t \in [0, T]$, nous obtenons :

$$u_{xx}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} - \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(\alpha_i, t) + u_{xxxx}(\beta_i, t)).$$

En faisant un développement limité de type Taylor-Lagrange en espace d'ordre 3, on a, pour

$t \in [0, T[$:

$$u(x_2, t) = u(x_1, t) + hu_x(x_1, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_1, t) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\alpha_1, t), \quad \alpha_1 \in]x_1, x_2[,$$

$$u(x_{I-1}, t) = u(x_I, t) - hu_x(x_I, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_I, t) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(\beta_I, t), \quad \beta_I \in]x_{I-1}, x_I[,$$

ce qui entraîne que

$$u_{xx}(x_1, t) = \frac{2u(x_2, t) - 2u(x_1, t)}{h^2} - \frac{2u_x(x_1, t)}{h} - \frac{h}{3}u_{xxx}(\alpha_1, t),$$

$$u_{xx}(x_I, t) = \frac{2u(x_{I-1}, t) - 2u(x_I, t)}{h^2} + \frac{2u_x(x_I, t)}{h} + \frac{h}{3}u_{xxx}(\beta_I, t),$$

et comme $u_x(x_1, t) = f(u(x_1, t))$, $u_x(x_I, t) = g(u_I(t))$, nous avons

$$u_{xx}(x_1, t) = \frac{2u(x_2, t) - 2u(x_1, t)}{h^2} - \frac{2f(u(x_1, t))}{h} - \frac{h}{3}u_{xxx}(\alpha_1, t),$$

$$u_{xx}(x_I, t) = \frac{2u(x_{I-1}, t) - 2u(x_I, t)}{h^2} + \frac{2g(u_I(t))}{h} + \frac{h}{3}u_{xxx}(\beta_I, t).$$

Ce qui entraîne que nous avons, pour $t \in [0, T[$, $i = 2, \dots, I - 1$,

$$\frac{du(x_1, t)}{dt} = \frac{2u(x_2, t) - 2u(x_1, t)}{h^2} - \frac{2f(u(x_1, t))}{h} - \frac{h}{3}u_{xxx}(\alpha_1, t), \quad (1.8)$$

$$\frac{du(x_i, t)}{dt} = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} - \frac{h^2}{24}(u_{xxxx}(\alpha_i, t) + u_{xxxx}(\beta_i, t)), \quad (1.9)$$

$$\frac{du(x_I, t)}{dt} = \frac{2u(x_{I-1}, t) - 2u(x_I, t)}{h^2} + \frac{2g(u(x_I, t))}{h} + \frac{h}{3}u_{xxx}(\beta_I, t). \quad (1.10)$$

Pour h suffisamment petit, nous avons, pour $t \in [0, T[$,

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_1, t) &\approx \frac{2u(x_2, t) - 2u(x_1, t)}{h^2} - \frac{2f(u(x_1, t))}{h}, \\ u_{xx}(x_i, t) &\approx \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I - 1, \\ u_{xx}(x_I, t) &\approx \frac{2u(x_{I-1}, t) - 2u(x_I, t)}{h^2} + \frac{2g(u(x_I, t))}{h} \end{aligned}$$

Soit U_i une approximation numérique de u au nœud x_i et φ_i une approximation numérique de

u_0 au nœud x_i , nous obtenons le système d'EDO suivant :

$$U_1'(t) = \delta^2 U_1(t) - \frac{2f(U_1(t))}{h}, \quad (1.11)$$

$$U_i'(t) = \delta^2 U_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1, \quad (1.12)$$

$$U_I'(t) = \delta^2 U_I(t) + \frac{2g(U_I(t))}{h}, \quad (1.13)$$

$$U_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (1.14)$$

où

$$\begin{cases} \delta^2 U_1(t) = \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2}, \\ \delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}. \end{cases} \quad (1.15)$$

1.3.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret en espace de (1.11)-(1.14)

Dans cette sous-section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14) à partir d'un système différentiel non linéaire autonome du premier degré.

Théorème 1.6. *Pour chaque pas de discrétisation h fixé, le problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14) admet une unique solution maximale $([0, T_{h,max}[, U_h(\cdot))$, où $[0, T_{h,max}[$ désigne l'intervalle maximal de temps d'existence de la solution maximale U_h .*

Preuve. En considérant le problème (1.11)-(1.14) nous avons

$$\begin{cases} \frac{dX_h(t)}{dt} = F(X_h(t)), \\ X_h(t_0) = X_h^0, \end{cases}$$

où $X_h^0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_I)$ et $t_0 = 0$. F fonction de la variable $X_h(t) = (X_1(t), \dots, X_I(t))^T$ définie sur \mathbb{R}^I par $F(X_h(t)) = (F_1(X_h(t), \dots, F_I(X_h(t)))^T$ avec

$$\begin{aligned} F_1(X_h(t)) &= \frac{2X_2(t) - 2X_1(t)}{h^2} - \frac{2f(X_1(t))}{h} \\ F_i(X_h(t)) &= \frac{X_{i-1}(t) - 2X_i(t) + X_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ F_I(X_h(t)) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} + \frac{2g(U_I(t))}{h}. \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^I . D'après le Théorème 3.14 (en annexes) nous obtenons le résultat souhaité. \square

Dans tout ce qui suit, nous notons $U_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ l'unique solution maximale du système (1.11)-(1.14), pour tout pas de discrétisation h .

1.3.3 Propriétés qualitatives de la solution du problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14)

Dans cette sous-section, nous prouvons que la solution du problème semi-discret en espace converge vers la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. D'abord nous donnons la définition d'une sous-solution et d'une sur-solution du problème (1.11)-(1.14).

Définition 1.2. Soit $V_h = (V_1, \dots, V_I)^T \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$, V_h est appelée sous-solution de (1.11)-(1.14) si V_h satisfait les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} - \frac{V_{i-1}(t) - 2V_i(t) + V_{i+1}(t)}{h^2} &\leq 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ \frac{dV_1(t)}{dt} - \frac{2V_2(t) - 2V_1(t)}{h^2} + \frac{2f(V_1(t))}{h} &\leq 0, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ \frac{dV_I(t)}{dt} - \frac{2V_{I-1}(t) - 2V_I(t)}{h^2} - \frac{2g(V_I(t))}{h} &\leq 0, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ V_i(0) &\leq U_i(0), \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

où $U_h = (U_1, \dots, U_I)^T$ est solution (1.11)-(1.14).

Quand les inégalités sont inverses, nous avons une sur-solution.

Le Lemme suivant est une forme semi-discrète du principe du maximum.

Lemme 1.4. Soient, $b_h \in C^0([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ et $V_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ tels que

$$V_i'(t) - \delta^2 V_i(t) + b_i(t) V_i(t) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \quad (1.16)$$

$$V_i(0) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq I. \quad (1.17)$$

Nous avons alors, $V_i(t) \geq 0$, $1 \leq i \leq I$, $t \in]0, T_{h,max}[$.

Preuve. Soit T_0 tel que $T_0 < T_{h,max}$, définissons $Z_h(t) = V_h(t)e^{\lambda t}$ avec λ un réel tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$ et $t \in [0, T_0]$,

$$b_i(t) - \lambda > 0. \quad (1.18)$$

En multipliant l'inégalité (1.16) par $e^{\lambda t}$ et en ajoutant $\lambda e^{\lambda t} V_i(t)$ de part et d'autre de l'inégalité, nous obtenons, pour $t \in]0, T_{h,max}[$,

$$e^{\lambda t} V_i'(t) - e^{\lambda t} \delta^2 V_i(t) + b_i(t) e^{\lambda t} V_i(t) + \lambda e^{\lambda t} V_i(t) \geq \lambda e^{\lambda t} V_i(t), \quad 1 \leq i \leq I,$$

puis

$$e^{\lambda t} V_i'(t) + \lambda e^{\lambda t} V_i(t) - e^{\lambda t} \delta^2 V_i(t) + b_i(t) e^{\lambda t} V_i(t) - \lambda e^{\lambda t} V_i(t) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq I,$$

de cette inégalité nous aboutissons à l'inégalité suivante

$$Z_i'(t) - \delta^2 Z_i(t) + (b_i(t) - \lambda) Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T_{h,max}[\quad (1.19)$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.20)$$

Comme pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ est une fonction continue sur le compact $[0, T_0]$, il existe alors $i_0 \in \{1, \dots, I\}$ tel que $m = Z_{i_0}(t_{i_0}) = \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} Z_i(t)$.

Supposons que $m < 0$.

Si $t_{i_0} = 0$, alors $Z_{i_0}(0) < 0$, ce qui contredit (1.20), donc $t_{i_0} > 0$.

D'après l'hypothèse sur m ,

$$Z_{i_0}(t_{i_0}) \leq Z_{i_0}(t_{i_0} - k), \quad \text{pour } k \text{ assez petit,}$$

$$Z_{i_0}(t_{i_0}) \leq Z_{i_0+1}(t_{i_0}), \quad i_0 \in \{1, \dots, I-1\},$$

$$Z_{i_0}(t_{i_0}) \leq Z_{i_0-1}(t_{i_0}), \quad i_0 \in \{2, \dots, I\},$$

d'où

$$Z_{i_0}'(t_{i_0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_{i_0}) - Z_{i_0}(t_{i_0} - k)}{k} \leq 0, \quad \text{et } \delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - Z_{i_0}(t_0)}{h^2} &\geq 0, \quad \text{si } i_0 = 1, \\ \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &\geq 0, \quad \text{si } i_0 \in \{2, \dots, I-1\}, \\ \frac{Z_{i_0-1}(t_0) - Z_{i_0}(t_0)}{h^2} &\geq 0, \quad \text{si } i_0 = I, \end{aligned}$$

Nous avons le résultat suivant comme conséquence directe des inégalités précédentes et de l'inégalité (1.18)

$$Z_{i_0}'(t_{i_0}) - \delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) + (b_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda) Z_{i_0}(t_{i_0}) < 0,$$

ce qui contredit (1.19) et la preuve est complète. \square

Lemme 1.5. (*Lemme de comparaison*) Soient, $W_h, V_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ telles que pour $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$\begin{aligned} W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) &\leq V'_i(t) - \delta^2 V_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1, \\ W'_1(t) - \delta^2 W_1(t) + \frac{2}{h} f(W_1(t)) &\leq V'_1(t) - \delta^2 V_1(t) + \frac{2}{h} f(V_1(t)) \\ W'_I(t) - \delta^2 W_I(t) - \frac{2}{h} g(W_I(t)) &\leq V'_I(t) - \delta^2 V_I(t) - \frac{2}{h} g(V_I(t)) \\ 0 &\leq W_i(0) \leq V_i(0), \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$W_h(t) \leq V_h(t), \quad \forall t \in [0, T_{h,max}[.$$

Preuve. Considérons le vecteur $Z_h(t) = V_h(t) - W_h(t)$, $t \in [0, T_{h,max}[$. D'après les hypothèses nous avons, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$

$$\begin{aligned} V'_i(t) - W'_i(t) - (\delta^2 V_i(t) - \delta^2 W_i(t)) &\geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ V'_1(t) - W'_1(t) - (\delta^2 V_1(t) - \delta^2 W_1(t)) + \frac{2}{h} f(V_1(t)) - \frac{2}{h} f(W_1(t)) &\geq 0 \\ V'_I(t) - W'_I(t) - (\delta^2 V_I(t) - \delta^2 W_I(t)) - \frac{2}{h} g(V_I(t)) + \frac{2}{h} g(W_I(t)) &\geq 0 \\ V_i(0) - W_i(0) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

D'après le Théorème des accroissements finis, il existe $\zeta(t)$, $\xi(t)$ pris respectivement, entre $V_1(t)$ et $W_1(t)$, et entre $V_I(t)$ et $W_I(t)$ telles que

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \quad t \in [0, T_{h,max}[, \quad (1.21)$$

$$Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) + \frac{2}{h} f'(\zeta(t)) Z_1(t) \geq 0, \quad t \in [0, T_{h,max}[, \quad (1.22)$$

$$Z'_{I-1}(t) - \delta^2 Z_{I-1}(t) - \frac{2}{h} g'(\xi(t)) Z_I(t) \geq 0, \quad t \in [0, T_{h,max}[, \quad (1.23)$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.24)$$

Nous pouvons écrire (1.21)-(1.24) comme

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i(t) Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T_{h,max}[,$$

où pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$ et $i = 2, \dots, I-1$, $b_1(t) = \frac{2}{h} f'(\zeta(t))$, $b_I(t) = -\frac{2}{h} g'(\xi(t))$, $b_i(t) = 0$

et sont des fonctions continues. On a $Z_i(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T_{h,max}[$ et $i = 1, \dots, I$ (d'après Lemme 1.4), ce qui achève la preuve. \square

Le Lemme suivant nous donne les propriétés qualitatives de la solution du problème (1.11)-(1.14).

Lemme 1.6. *Soit $U_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ la solution de (1.11)-(1.14) avec une donnée initiale positive φ_h sous solution de (1.11)-(1.14) telle que $\varphi_{i+1} > \varphi_i$ pour $i = 1, \dots, I-1$. Nous avons alors*

1. $U_i(t) \geq \varphi_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T_{h,max}[;$
2. $U_{i+1}(t) > U_i(t), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in [0, T_{h,max}[;$
3. $U'_i(t) > 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T_{h,max}[;$

Preuve.

1. Puisque φ_h est sous-solution de (1.11)-(1.14), d'après le système 1.15 et la Définition 1.2, nous avons

$$\begin{aligned} -\frac{2\varphi_2 - 2\varphi_1}{h^2} + \frac{2}{h}f(\varphi_1) &= -\delta^2\varphi_1 + \frac{2}{h}f(\varphi_1) \leq 0, \\ -\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} &= -\delta^2\varphi_i \leq 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ -\frac{2\varphi_{I-1} - 2\varphi_I}{h^2} - \frac{2}{h}g(\varphi_I) &= -\delta^2\varphi_I - \frac{2}{h}g(\varphi_I) \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} -\delta^2\varphi_1 + \frac{2}{h}f(\varphi_1) &\leq U'_1(t) - \delta^2U_1(t) + \frac{2}{h}f(U_1(t)) \\ -\delta^2\varphi_i &\leq U'_i(t) - \delta^2U_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1, \\ -\delta^2\varphi_I - \frac{2}{h}g(\varphi_I) &\leq U'_I(t) - \delta^2U_I(t) - \frac{2}{h}g(U_I(t)) \\ 0 \leq \varphi_i(0) &\leq U_i(0), \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.5, on a

$$U_i(t) \geq \varphi_i \geq 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T_{h,max}[.$$

2. Pour $1 \leq i \leq I-1$, $t \in [0, T_{h,max}[$ posons $K_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$. Soit $i \in \{1, \dots, I-1\}$, comme $K_i(0) = U_{i+1}(0) - U_i(0) = \varphi_{i+1} - \varphi_i > 0$, il existe $t \in]0, T_{h,max}[$ tel que $K_i(t) > 0$ car K_i est continue sur $[0, T_{h,max}[$. Soit t_0 le premier temps $t > 0$, tel que $K_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t) > 0$, pour $1 \leq i \leq I-1$, mais $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, I-1\}$. Sans perte de

généralité, nous pouvons supposer que i_0 est le plus petit entier satisfaisant l'inégalité ci-dessus. D'une part on a, $t \in [0, T_{h,max}[$

$$\begin{aligned} K'_1(t) &= U'_2(t) - U'_1(t) \\ K'_i(t) &= U'_{i+1}(t) - U'_i(t) \quad 2 \leq i \leq I-2 \\ K'_{I-1}(t) &= U'_I(t) - U'_{I-1}(t) \end{aligned}$$

d'après (1.11)-(1.13), nous avons

$$\begin{aligned} K'_1(t) &= \frac{U_3(t) - 2U_2(t) + U_1(t)}{h^2} - \left(\frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} - \frac{2f(U_1(t))}{h} \right) \\ K'_i(t) &= \frac{U_{i+2}(t) - 2U_{i+1}(t) + U_i(t)}{h^2} - \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-2 \\ K'_{I-1}(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2g(U_I(t))}{h} - \frac{U_I(t) - 2U_{I-1}(t) + U_{I-2}(t)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} K'_1(t) = \frac{K_2(t) - 3K_1(t)}{h^2} + \frac{2f(U_1(t))}{h} \\ K'_i(t) = \frac{K_{i+1}(t) - 2K_i(t) + K_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-2 \\ K'_{I-1}(t) = \frac{K_{I-2}(t) - 3K_{I-1}(t)}{h^2} + \frac{2g(U_I(t))}{h}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Selon les hypothèses sur t_0 , nous avons les inégalités suivantes :

$$K'_{i_0}(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_{i_0}(t_0) - K_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0,$$

$$\frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 2 \leq i_0 \leq I-2,$$

$$\frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 1,$$

$$\frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I-1,$$

ce qui implique que

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} < 0 \quad \text{si } 2 \leq i_0 \leq I-2,$$

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} - \frac{2f(U_{i_0}(t_0))}{h} < 0 \quad \text{si } i_0 = 1,$$

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} - \frac{2g(U_{i_0+1}(t_0))}{h} < 0 \quad \text{si } i_0 = I-1.$$

Ces dernières inégalités contredisent (1.25) et nous obtenons le résultat désiré.

3. Notons $Z_i(t) = U_i(t + \varepsilon) - U_i(t)$, $i = 1, \dots, I$, en utilisant l'assertion 1 du Lemme. nous obtenons $Z_i(0) \geq 0$. Pour $2 \leq i \leq I - 1$, et pour $t \in [0, T_{h,max}[$, d'après (1.11)-(1.12) on a

$$\begin{aligned} Z'_i(t) &= \frac{U_{i-1}(t + \varepsilon) - 2U_i(t + \varepsilon) + U_{i+1}(t + \varepsilon)}{h^2} - \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \\ Z'_1(t) &= \frac{2U_2(t + \varepsilon) - 2U_1(t + \varepsilon)}{h^2} - \frac{2f(U_1(t + \varepsilon))}{h} - \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} + \frac{2f(U_1(t))}{h}, \\ Z'_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t + \varepsilon) - 2U_I(t + \varepsilon)}{h^2} + \frac{2g(U_I(t + \varepsilon))}{h} - \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} - \frac{2g(U_I(t))}{h}, \end{aligned}$$

ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} Z'_i(t) &= \frac{Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \quad t \in [0, T_{h,max}[, \\ Z'_1(t) &= \frac{2Z_2(t) - 2Z_1(t)}{h^2} - \frac{2f'(\eta(t))Z_1(t)}{h}, \quad t \in [0, T_{h,max}[, \\ Z'_I(t) &= \frac{2Z_{I-1}(t) - 2Z_I(t)}{h^2} + \frac{2g'(\xi(t))Z_I(t)}{h}, \quad t \in [0, T_{h,max}[, \\ Z_i(0) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

où $\eta(t)$, $\xi(t)$ des fonctions continues prises respectivement, entre $U_1(t + \varepsilon)$ et $U_1(t)$, et entre $U_I(t + \varepsilon)$ et $U_I(t)$.

Nous pouvons écrire (1.21)-(1.24) comme

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i(t)Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T_{h,max}[,$$

où pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$ et $i = 2, \dots, I - 1$, $b_1(t) = \frac{2}{h}f'(\eta(t))$, $b_I(t) = -\frac{2}{h}g'(\xi(t))$, $b_i(t) = 0$ et sont des fonctions continues. On a $Z_i(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T_{h,max}[$ et $i = 1, \dots, I$ (d'après Lemme 1.4), ce qui achève la preuve. \square

Nous terminons cette sous-section par le Lemme suivant

Lemme 1.7. Soient y une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $U_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ solution de (1.11)-(1.14) telle que $U_h > 0$. Alors, nous avons : pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$, $i = 1, \dots, I$,

$$\delta^2 y(U_i(t)) = \delta^2(U_i(t))y'(U_i(t)) + \frac{(\delta^+ U_i(t))^2}{2}y''(\theta_i(t)) + \frac{(\delta^- U_i(t))^2}{2}y''(\theta_i(t)),$$

$$\delta^2 y(U_1(t)) = \delta^2(U_1(t))y'(U_1(t)) + (\delta^+ U_i(t))^2 y''(\theta_i(t)),$$

$$\delta^2 y(U_I(t)) = \delta^2(U_I(t))y'(U_I(t)) + (\delta^- U_i(t))^2 y''(\eta_i(t)).$$

De plus si $y''(s) > 0$, $s \in]0, +\infty[$, nous avons

$$\delta^2 y(U_i(t)) \geq \delta^2(U_i(t))y'(U_i(t))$$

Preuve. En utilisant le développement limité de type Taylor-Lagrange à l'ordre 2, nous obtenons : pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,
pour $i = 1, \dots, I - 1$

$$y(U_{i+1}(t)) = y(U_i(t) + h\delta^+ U_i(t)) = y(U_i(t)) + h\delta^+ U_i(t)y'(U_i(t)) + \frac{(h\delta^+ U_i(t))^2}{2}y''(\theta_i(t)),$$

avec $\delta^+ U_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$, $\theta_i(t)$ pris entre $U_i(t)$ et $U_{i+1}(t)$,
et pour $i = 2, \dots, I$, on a :

$$y(U_{i-1}(t)) = y(U_i(t) - h\delta^- U_i(t)) = y(U_i(t)) - h\delta^- U_i(t)y'(U_i(t)) + \frac{(h\delta^- U_i(t))^2}{2}y''(\theta_i(t)),$$

avec $\delta^- U_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$ et η pris entre U_i et U_{i-1} , donc, pour $i = 2, \dots, I - 1$, on a

$$\frac{y(U_{i+1}(t)) - 2y(U_i(t)) + y(U_{i-1}(t)))}{h^2} = \delta^2(U_i(t))y'(U_i(t)) + \frac{(\delta^+ U_i(t))^2}{2}y''(\theta_i(t)) + \frac{(\delta^- U_i(t))^2}{2}y''(\theta_i(t)),$$

$$\frac{2y(U_2(t)) - 2y(U_1(t))}{h^2} = \delta^2(U_1(t))y'(U_1(t)) + (\delta^+ U_1(t))^2 y''(\theta_1(t)),$$

$$\frac{2y(U_{I-1}(t)) - 2y(U_I(t))}{h^2} = \delta^2(U_I(t))y'(U_I(t)) + (\delta^- U_I(t))^2 y''(\eta_I(t)),$$

d'où : pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$\delta^2 y(U_i(t)) \geq \delta^2(U_i(t))y'(U_i(t)), \quad i = 1, \dots, I.$$

□

1.3.4 Convergence de la solution du problème semi-discret en espace (1.11)-(1.14)

Dans cette sous-section, nous prouvons par le théorème suivant que la solution du problème semi-discret en espace converge vers la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. Pour la suite, nous notons

$$u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T \quad \forall t \in [0, T[\quad \text{et} \quad \|U_h(t)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I} |U_i(t)|, \quad t \in [0, T_{h,max}[.$$

Théorème 1.7. Soit $T^* > 0$, supposons que la solution u du problème continu appartient à $C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^*])$ et que la donnée initiale φ_h de (1.11)-(1.14) vérifie

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (1.26)$$

Alors, pour h assez petit, le problème semi-discret (1.11)-(1.14) a une unique solution $U_h \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I)$ telle que

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h), \quad \forall t \in [0, T^*] \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Preuve. Soit $\sigma > 0$ tel que

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty < \sigma, \quad t \in [0, T^*]. \quad (1.27)$$

D'après le Théorème 1.6, le problème semi-discret (1.11)-(1.14) a pour tout h , une unique solution $U_h \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I)$. Soit $t(h) \leq T^*$ la plus grande valeur de $t > 0$ telle que

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1, \quad \forall t \in]0, t(h)[. \quad (1.28)$$

Par continuité de $U_h - u_h$ sur $[0, T^*]$, la relation (1.26) implique $t(h) > 0$ pour h assez petit. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty + \|u(\cdot, t)\|_\infty, \quad \text{pour } t \in [0, t(h)[,$$

ce qui implique que

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma, \quad \text{pour } t \in [0, t(h)[. \quad (1.29)$$

Soit $e_h(t) = u_h(t) - U_h(t)$, $\forall t \in [0, T^*]$ l'erreur de discrétisation. En faisant la différence membres par membres des égalités de (1.8)-(1.10) et (1.11)-(1.13), nous obtenons les relations suivantes :

$$\frac{de_1(t)}{dt} = \delta^2 e_1(t) - \frac{2f'(\eta_1(t))e_1(t)}{h} - \frac{h}{3} u_{xxx}(\alpha_1, t), \quad (1.30)$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = \delta^2 e_i(t) - \frac{h^2}{24} (u_{xxxx}(\alpha_i, t) + u_{xxxx}(\beta_i, t)), \quad 2 \leq i \leq I-1, \quad (1.31)$$

$$\frac{de_I(t)}{dt} = \delta^2 e_I(t) + \frac{2g'(\eta_I(t))e_I(t)}{h} + \frac{h}{3} u_{xxx}(\beta_I, t), \quad (1.32)$$

où $\eta_i(t)$ est prise entre $U_i(t)$ et $u(x_i, t)$ pour $i \in \{1, I\}$, $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $i = 1, \dots, I-1$ et $\beta_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 2, \dots, I$. En utilisant (1.27) et (1.29), il existe une constante positive M telle

que

$$\frac{de_1(t)}{dt} - \delta^2 e_1(t) + \frac{2f'(\eta_1(t))e_1(t)}{h} \leq Mh, \quad (1.33)$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} - \delta^2 e_i(t) \leq Mh, \quad 2 \leq i \leq I-1, \quad (1.34)$$

$$\frac{de_I(t)}{dt} - \delta^2 e_I(t) - \frac{2g'(\eta_I(t))e_I(t)}{h} \leq Mh. \quad (1.35)$$

Considérons maintenant la fonction $W \in C^{4,1}([0, 1], [0, T^*])$ telle que

$$W(x, t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh) e^{(M+1)t+Cx}, \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*].$$

Nous obtenons les équations suivantes :

$$W_t(x, t) = W_{xx}(x, t) + (M+1 - C^2)W(x, t), \quad \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*] \quad (1.36)$$

$$W_x(0, t) = CW(0, t), \quad W_x(1, t) = CW(1, t), \quad \forall t \in [0, T^*] \quad (1.37)$$

$$W(x, 0) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh)e^{Cx}, \quad t \in [0, T^*]. \quad (1.38)$$

En appliquant le schéma (1.8)-(1.10) au système (1.36)-(1.38), nous obtenons

$$\frac{dW(x_1, t)}{dt} = \delta^2 W(x_1, t) - \frac{2CW(x_1, t)}{h} + (M+1 - C^2)W(x_1, t) - \frac{h}{3}W_{xxx}(\alpha'_1, t), \quad \forall t \in [0, T^*]$$

$$\begin{aligned} \frac{dW(x_i, t)}{dt} &= \delta^2 W(x_i, t) + (M+1 - C^2)W(x_i, t) - \frac{h^2}{24}(W_{xxxx}(\alpha'_i, t) + W_{xxxx}(\beta'_i, t)), \\ &2 \leq i \leq I-1, \quad \forall t \in [0, T^*] \end{aligned}$$

$$\frac{dW(x_I, t)}{dt} = \delta^2 W(x_I, t) + \frac{2CW(x_I, t)}{h} + (M+1 - C^2)W(x_I, t) + \frac{h}{3}W_{xxx}(\beta'_I, t), \quad \forall t \in [0, T^*].$$

avec α'_i pris entre x_i et x_{i+1} , pour $i = 1, \dots, I-1$ et β'_i pris entre x_{i-1} et x_i , pour $i = 2, \dots, I$.

$$\frac{dW(x_1, t)}{dt} = \delta^2 W(x_1, t) - \frac{2CW(x_1, t)}{h} + (M+1 - C^2)W(x_1, t) - \frac{hC^3}{3}W(\alpha'_1, t), \quad \forall t \in [0, T^*]$$

$$\begin{aligned} \frac{dW(x_i, t)}{dt} &= \delta^2 W(x_i, t) + (M+1 - C^2)W(x_i, t) - \frac{h^2C^4}{24}(W(\alpha'_i, t) + W(\beta'_i, t)), \\ &2 \leq i \leq I-1, \quad \forall t \in [0, T^*] \end{aligned}$$

$$\frac{dW(x_I, t)}{dt} = \delta^2 W(x_I, t) + \frac{2CW(x_I, t)}{h} + (M+1 - C^2)W(x_I, t) + \frac{hC^3}{3}W(\beta'_I, t), \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Nous pouvons choisir les constantes M et C telles que , pour $t \in [0, T^*]$,

$$\begin{aligned} \frac{dW(x_1, t)}{dt} - \delta^2 W(x_1, t) + \frac{2CW(x_1, t)}{h} &\geq Mh \\ \frac{dW(x_i, t)}{dt} - \delta^2 W(x_i, t) &\geq Mh, \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \frac{dW(x_I, t)}{dt} - \delta^2 W(x_I, t) - \frac{2CW(x_I, t)}{h} &\geq Mh. \end{aligned}$$

D'après le système (1.33)-(1.35), nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dW(x_1, t)}{dt} - \delta^2 W(x_1, t) + \frac{2CW(x_1, t)}{h} &\geq \frac{de_1(t)}{dt} - \delta^2 e_1(t) + \frac{2f'(\eta_1(t))e_1(t)}{h} \\ \frac{dW(x_i, t)}{dt} - \delta^2 W(x_i, t) &\geq \frac{de_i(t)}{dt} - \delta^2 e_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \frac{dW(x_I, t)}{dt} - \delta^2 W(x_I, t) - \frac{2CW(x_I, t)}{h} &\geq \frac{de_I(t)}{dt} - \delta^2 e_I(t) - \frac{2g'(\eta_I(t))e_I(t)}{h}. \end{aligned}$$

puis nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d(W(x_1, t) - e_1(t))}{dt} - \delta^2 (W(x_1, t) - e_1(t)) + \frac{2(C + f'(\eta_1(t)))}{h} (W(x_1, t) - e_1(t)) &\geq 0 \\ \frac{d(W(x_i, t) - e_i(t))}{dt} - \delta^2 (W(x_i, t) - e_i(t)) &\geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \frac{d(W(x_I, t) - e_I(t))}{dt} - \delta^2 (W(x_I, t) - e_I(t)) - \frac{2(C + g'(\eta_I(t)))}{h} (W(x_I, t) - e_I(t)) &\geq 0 \\ W(x_i, 0) - e_i(0) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

Du lemme 1.4 on déduit que

$$W(x_i, t) \geq e_i(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, t(h)[, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Par le même procédé, nous montrons aussi que

$$W(x_i, t) \geq -e_i(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, t(h)[, \quad 1 \leq i \leq I.$$

On déduit de ce qui précède

$$W(x_i, t) \geq |e_i(t)| \quad \text{pour} \quad t \in [0, t(h)[, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Et on a finalement

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh) e^{(M+1)t+C}, \quad \text{pour} \quad t \in [0, t(h)[.$$

Ensuite nous prouvons que $t(h) = T^*$. Supposons que $T^* > t(h)$, de (1.28) on en déduit que

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh) e^{(M+1)t+C}.$$

Puisque que le terme à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand h tend vers zéro, on a $1 \leq 0$, ce qui est impossible. Cela prouve que $t(h) = T^*$, et achève la démonstration du théorème. \square

1.3.5 Explosion en temps fini et convergence du temps d'explosion de la solution de (1.11)-(1.14) sous l'hypothèse (I)

Dans cette sous-section nous considérons le cas où $f(s) = s^p$ et $g(s) = s^q$ pour tout s positive avec $q > 1$ et $q \geq p$. Nous supposons que la solution u du problème (1.1)-(1.3) est élément de $C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$. Nous commençons par la définition suivante.

Définition 1.3. *La solution U_h de (1.11)-(1.14) explose en un temps fini, s'il existe un temps fini $T_h > 0$ tel que*

$$\forall t \in [0, T_h[, \|U_h(t)\|_\infty < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow T_h} \|U_h(t)\|_\infty = \infty.$$

T_h est appelé le temps d'explosion semi-discret de U_h . Si T_h existe, alors $T_h = T_{h,max}$.

Nous notons pour la suite $u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T$ et $u_{0,h} = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_I))^T$ et nous supposons que la donnée initiale φ_h est une sous-solution de (1.11)-(1.14) et vérifie (1.26).

Notre principal résultat est le théorème suivant

Théorème 1.8. *Supposons que la solution U_h du problème semi-discret (1.11)-(1.14) est élément de $C^1([0, T[, \mathbb{R}^I)$ et la donnée initiale φ_h de (1.11)-(1.14) vérifie (1.26). Alors pour h assez petit, il existe un temps fini $T_h > 0$ tel que la solution U_h explose au temps fini T_h et*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, introduisons la fonction suivante :

$$J(t) = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon]. \quad (1.39)$$

Soit $J_h(t) = \sum_{i=1}^I h U_i(t)$ une approximation numérique de $J(t)$ (méthode des rectangles), pour tout $t \in [0, T - \varepsilon]$.

Nous avons, $\forall t \in [0, T - \varepsilon]$

$$\begin{aligned}\frac{dJ_h(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^I h \frac{dU_i(t)}{dt}, \\ \frac{dJ_h(t)}{dt} &= h \frac{dU_1(t)}{dt} + h \frac{dU_I(t)}{dt} + \sum_{i=2}^{I-1} h \frac{dU_i(t)}{dt},\end{aligned}$$

d'après (1.12), on a

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} = \frac{h}{2} \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{dU_I(t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{dU_I(t)}{dt} + \sum_{i=2}^{I-1} \frac{U_{I+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h},$$

d'après (1.11) et (1.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dJ_h(t)}{dt} &= \frac{h}{2} \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{dU_I(t)}{dt} + \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h} \\ &\quad + g(U_I(t)) - f(U_1(t)) + \sum_{i=2}^{I-1} \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} + \sum_{i=2}^{I-1} \frac{U_{i-1}(t) - U_i(t)}{h}\end{aligned}$$

par télescopage, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dJ_h(t)}{dt} &= \frac{h}{2} \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{dU_I(t)}{dt} + g(U_I(t)) - f(U_1(t)) \\ &\quad + \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h} + \frac{U_I(t) - U_2(t)}{h} + \frac{U_1(t) - U_{I-1}(t)}{h}\end{aligned}$$

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} = \frac{h}{2} \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{h}{2} \frac{dU_I(t)}{dt} + g(U_I(t)) - f(U_1(t)). \quad (1.40)$$

D'après le Lemme 1.6, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq g(U_I(t)) - f(U_1(t)), \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon].$$

D'après le Lemme 1.6 et les hypothèses sur f et g , nous avons $g(U_I(t)) - f(U_1(t)) > 0$, $\forall t \in [0, T - \varepsilon]$. Posons

$$\alpha(t) = 1 - \frac{f(U_1(t))}{g(U_I(t))}, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon].$$

Étant donné que $f \circ U_1$ et $g \circ U_I$ sont continues sur $[0, T - \varepsilon]$ et en utilisant le Lemme 1.6, nous avons $(g \circ U_I)(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, T - \varepsilon]$, d'après le Théorème des bornes, la fonction α atteint son minimum sur $[0, T - \varepsilon]$.

En prenant $\gamma = \min_{t \in [0, T-\varepsilon]} \{\alpha(t)\}$, on a, pour tout $t \in [0, T - \varepsilon]$

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq \gamma g(U_I(t)),$$

d'après l'assertion 2. du Lemme 1.6, on a

$$\begin{aligned} \frac{dJ_h(t)}{dt} &\geq \gamma g(U_i(t)), \\ \frac{1}{1+h} \sum_{i=1}^I h \frac{dJ_h(t)}{dt} &\geq \gamma \frac{1}{1+h} \sum_{i=1}^I h g(U_i(t)) \quad \left(Ih = \frac{1}{1+h} \right), \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Jensen (voir 3.17), on a

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq \gamma g \left(\frac{1}{1+h} \sum_{i=1}^I h U_i(t) \right),$$

comme $g(s) = s^q$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dJ_h(t)}{dt} &\geq \gamma \left(\frac{1}{1+h} \right)^q g \left(\sum_{i=1}^I h U_i(t) \right), \\ \frac{dJ_h(t)}{dt} &\geq \gamma_h g(J_h(t)) \quad \left(\text{avec } \gamma_h = \frac{\gamma}{(1+h)^q} \right). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Comme $g(s) = s^q$ et $q > 1$, pour $R_0 > 0$, on a

$$\begin{cases} g(s) > 0 & \text{pour } s > R_0 \\ \int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty. \end{cases} \tag{1.42}$$

Soit $R_I(t) = \sum_{i=1}^I h u(x_i, t)$ la somme de Riemann associée à $J(t)$, pour tout $t \in [0, T - \varepsilon]$. D'après l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|J(t) - J_h(t)| \leq |J(t) - R_I(t)| + |R_I(t) - J_h(t)|.$$

D'après le théorème de Majoration de l'erreur et le Théorème 1.7, il existe une constante strictement positive C telle que

$$|J(t) - J_h(t)| \leq hM(t) + C(\|\varphi_h - u_h(0)\|_{\infty} + h) \text{ où } M(t) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |u_x(x, t)|, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon].$$

Ainsi, on a

$$\sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J(t) - J_h(t)| \leq b_\epsilon h + C(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h), \text{ où } b_\epsilon = \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} M(t).$$

Donc, pour tout ϵ strictement positif, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0.$$

En vertu du Théorème 1.1 de Takeo dans [75], il existe un temps fini $T_h > 0$ tel que U_h explose au temps fini T_h et $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T$. \square

Lemme 1.8. *Supposons que $q > 1$, $q \geq p$ et U_h explose pour la norme L^1 à un temps fini T_h , alors*

$$J_h(t) \sim (T - t)^{-1/(q-1)},$$

dans le sens qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$C_1(T - t)^{-1/(q-1)} \leq J_h(t) \leq C_2(T - t)^{-1/(q-1)}.$$

Preuve. Rappelons que $J_h(t) = \sum_{i=1}^I hU_i(t)$, pour tout $t \in [0, T_h[$.

D'après l'équation (1.40), on a, pour tout $t \in]0, T_h[$,

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} = \frac{2dU_1(t)}{hdt} + \frac{2dU_I(t)}{hdt} + 2g(U_I(t)) - 2f(U_1(t))$$

en utilisant (1.11)-(1.13), nous aboutissons à

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} = \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h} + 2g(U_I(t)) - 2f(U_1(t)),$$

d'après le Lemme 1.6, $0 \leq U_i(t) < U_{i+1}(t)$, pour $i = 1, \dots, I - 1$ et $t \in]0, T_h[$.

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{dJ_h(t)}{dt} &\leq \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + 2g(U_I(t)) \\ \frac{dJ_h(t)}{dt} &\leq \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + 2h^{-q}g(hU_I(t)). \end{aligned}$$

on a, $hU_I(t) \leq \sum_{i=1}^I hU_i(t)$, donc

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \leq \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + 2h^{-q}g\left(\sum_{i=1}^I hU_i(t)\right),$$

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \leq \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + 2h^{-q}g(J_h(t)).$$

Comme $J_h(t)$ explose en T_h (Théorème 1.8), il existe une constante $\lambda > 0$ et $t_0 \in]0, T_h[$ telles que pour chaque $t \in [t_0, T_h[$, nous avons

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \leq \lambda h^{-q}g(J_h(t)),$$

$$\frac{dJ_h(t)}{g(J_h(t))} \leq \lambda h^{-q}dt,$$

par un changement de variable, nous obtenons

$$\int_{J_h(t)}^{+\infty} \frac{ds}{g(s)} = \int_{J_h(t)}^{+\infty} \frac{ds}{s^q} \leq \lambda h^{-q}(T_h - t).$$

De cette dernière inégalité, nous parvenons à

$$C_1(T_h - t)^{-1/(q-1)} \leq J_h(t), \quad \text{avec } C_1 = \left(\frac{h^q}{\lambda(q-1)} \right)^{1/(q-1)}. \quad (1.43)$$

D'après (1.41) on a, pour tout $t \in]0, T_h[$,

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq \gamma_h g(J_h(t)),$$

nous pouvons intégrer l'inégalité ci-dessus entre t et T_h et obtenir

$$\int_t^{T_h} \frac{dJ_h(s)}{g(J_h(s))} \geq \gamma_h(T_h - t),$$

par un changement de variable, nous obtenons

$$\int_{J_h(t)}^{+\infty} \frac{ds}{s^q} \geq \gamma_h(T_h - t).$$

Par conséquent

$$J_h(t) \leq C_2(T_h - t)^{-1/(q-1)}, \quad \text{avec } C_2 = \left(\frac{1}{\gamma_h(q-1)} \right)^{1/(q-1)}.$$

Ce qui termine notre preuve. □

Théorème 1.9. *Supposons que $q > 1$, $q \geq p$ et U_h explose pour la norme infinie à un temps*

fini T_h avec φ_h sous-solution de (1.11)-(1.14), alors

$$U_I(t) \sim (T_h - t)^{-1/(q-1)},$$

au sens qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$K_1(T - t)^{-1/(q-1)} \leq U_I(t) \leq K_2(T - t)^{-1/(q-1)}.$$

Preuve. Soit $J_h(t) = (J_1(t), \dots, J_I(t))$ $t \in [0, T_h[$, telle que

$$J_i(t) = U_i'(t) - \beta g(U_i(t)), \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_h[,$$

$$J(0) = \delta \varphi_i - \beta \varphi_i^q, \quad i = 1 \dots, I.$$

D'après (1.11)-(1.13) nous avons pour $t \in]0, T_h[$,

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} - \frac{2f(U_1(t))}{h} - \beta g(U_1(t)) \\ \frac{dJ_1(t)}{dt} &= \frac{2U_2'(t) - 2U_1'(t)}{h^2} - \frac{2f'(U_1(t))}{h} U_1'(t) - \beta g'(U_1(t)) U_1'(t) \\ J_2(t) - J_1(t) &= \frac{U_3(t) - 2U_2(t) + U_1(t)}{h^2} - \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} + \frac{2f(U_1(t))}{h} \\ &\quad - \beta g(U_2(t)) + \beta g(U_1(t)) \\ J_2(t) - J_1(t) &= U_2'(t) - U_1'(t) - \beta(g(U_2(t)) - g(U_1(t))) \\ \frac{2J_2(t) - 2J_1(t)}{h^2} &= \frac{2U_2'(t) - 2U_1'(t)}{h^2} - \beta \frac{2g(U_2(t)) - 2g(U_1(t))}{h^2} \\ \delta^2 J_1(t) &= \frac{2U_2'(t) - 2U_1'(t)}{h^2} - \beta \delta^2 g(U_1(t)). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.7, on a $\delta^2 g(U_i(t)) \geq \delta^2 U_i(t) g'(U_i(t))$, $i = 1, \dots, I$, $t \in]0, T_h[$,

donc

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) &\geq -\frac{2f'(U_1(t))}{h} U_1'(t) - \beta g'(U_1(t)) (U_1'(t) - \delta^2 U_i(t)) \\ \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) &\geq -\frac{2f'(U_1(t))}{h} U_1'(t) + \beta g'(U_1(t)) \frac{2f(U_1(t))}{h} \\ \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) &\geq -\frac{2f'(U_1(t))}{h} (U_1'(t) - \beta g(U_1(t)) + \beta g(U_1(t))) + \beta g'(U_1(t)) \frac{2f(U_1(t))}{h} \\ \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) &\geq -\frac{2f'(U_1(t))}{h} J_1(t) + \beta \frac{2}{h} (\beta g'(U_1(t)) f(U_1(t)) - f'(U_1(t)) g(U_1(t))), \end{aligned}$$

comme $f(U_i(t)) = (U_i(t))^p$ et $g(U_i(t)) = (U_i(t))^q$, $i = 1, \dots, I$ alors, nous avons

$$\frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) + \frac{2p}{h}(U_1(t))^{p-1} J_1(t) \geq \frac{2\beta}{h}(q-p)(U_1(t))^{p+q-1}. \quad (1.44)$$

Pour $i = 2, \dots, I-1$, on a :

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} = \frac{U'_{i+1}(t) - 2U'_i(t) + U'_{i-1}(t)}{h^2} - \beta g'(U_i(t))U'_i(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{J_{i+1}(t) - 2J_i(t) + J_{i-1}(t)}{h^2} &= \frac{U'_{i+1}(t) - 2U'_i(t) + U'_{i-1}(t)}{h^2} - \beta \frac{g(U_{i+1}(t)) - 2g(U_i(t)) + g(U_{i-1}(t)))}{h^2} \\ \delta^2 J_i(t) &= \frac{U'_{i+1}(t) - 2U'_i(t) + U'_{i-1}(t)}{h^2} - \beta \delta^2 g(U_i(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) \geq -\beta g'(U_i(t))(U'_i(t) - \delta^2 U_i(t))$$

donc

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1. \quad (1.45)$$

On a également

$$\begin{aligned} J_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} - \frac{2g(U_I(t))}{h} - \beta g(U_I(t)) \\ \frac{dJ_I(t)}{dt} &= \frac{2U'_{I-1}(t) - 2U'_I(t)}{h^2} + \frac{2g'(U_I(t))}{h} U'_I(t) - \beta g'(U_I(t))U'_I(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{I-1}(t) - J_I(t) &= U'_{I-1}(t) - U'_I(t) - \beta(g(U_{I-1}(t)) - \beta g(U_I(t))) \\ \frac{2J_{I-1}(t) - 2J_I(t)}{h^2} &= \frac{2U'_{I-1}(t) - 2U'_I(t)}{h^2} - \beta \frac{2g(U_{I-1}(t)) - 2g(U_I(t))}{h^2} \\ \delta^2 J_I(t) &= \frac{2U'_{I-1}(t) - 2U'_I(t)}{h^2} - \beta \delta^2 g(U_I(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) &= \frac{2g'(U_I(t))}{h} U'_I(t) - \beta g'(U_I(t))U'_I(t) + \beta \delta^2 g(U_I(t)) \\ \frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) &\geq \frac{2g'(U_I(t))}{h} U'_I(t) - \beta g'(U_I(t))(U'_I(t) - \delta^2 U_I(t)) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) - \frac{2q}{h}(U_I(t))^{q-1} J_I(t) \geq 0. \quad (1.46)$$

Il est facile de voir que

$$\frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) + \frac{2p}{h}(U_1(t))^{p-1} J_1(t) \geq 0,$$

$$\frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) - \frac{2q}{h}(U_I(t))^{q-1} J_I(t) \geq 0,$$

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1.$$

De plus, en utilisant le fait que φ_h est une sous-solution, nous obtenons $J_h(0) \geq 0$. Et nous déduisons du Lemme 1.4 que $J_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, I, t \in [0, T_h[$.

Comme une conséquence directe, nous obtenons : pour tout $t \in]0, T_h[$,

$$\frac{dU_i(t)}{dt} \geq \beta U_i^q(t),$$

ce qui implique que

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \geq \beta U_I(t)^q,$$

$$\frac{dU_I(t)}{U_I(t)^q} \geq \beta dt,$$

$$\int_t^{T_h} \frac{dU_I(\tau)}{U_I(\tau)^q} \geq \beta(T_h - t),$$

ce qui entraîne que,

$$U_I(t) \leq K_2(T_h - t)^{-\frac{1}{q-1}} \quad \text{avec} \quad K_2 = (\beta(q-1))^{-\frac{1}{q-1}}.$$

D'après la preuve du Lemme 1.6, il existe $t_0 \in]0, T_h[$ et une constante $K_1 > 0$ tels que $K_1(T_h - t)^{-\frac{1}{q-1}} \leq \sum_{i=1}^I hU_i(t)$, pour tout $t \in]t_0, T_h[$, d'après (1.43). Comme $\sum_{i=1}^I hU_i(t) \leq U_I(t), \forall t \in]t_0, T_h[$, on a

$$K_1(T_h - t)^{-\frac{1}{q-1}} \leq U_I(t), \quad \forall t \in]t_0, T_h[.$$

Nous avons donc le résultat désiré. \square

1.3.6 Résultats numériques

Dans cette sous section, nous présentons quelques approximations numériques du temps d'explosion de la solution de (1.11)-(1.14) avec $f(s) = s^p$ et $g(s) = s^q$ pour tout s positive et pour la donnée initiale $\varphi = x$, sous-solution de (1.1)-(1.3) avec différentes valeurs de q et p , où $q > 1$ et $q \geq p$.

Soit η la longueur de l'arc paramétré

$$\begin{aligned} M &: [0, T_h[\rightarrow \mathbb{R}^{I+1} \\ t &\mapsto (t, U_h(t)), \end{aligned}$$

on a $\eta(t) = \int_0^t \sqrt{1 + U_1'(\tau)^2 + \dots + U_I'(\tau)^2} d\tau$. Ce qui implique que

$$\frac{d\eta}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dU_1(t)}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dU_I(t)}{dt}\right)^2}.$$

En regardant les fonctions t et U_h comme fonctions de η , nous obtenons le système d'EDO (1.47) équivalant au système (1.1)-(1.3).

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}}, \quad (1.47)$$

$$\frac{dU_i}{d\eta} = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (1.48)$$

$$t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (1.49)$$

où $0 < \eta < \infty$, et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2U_1^p}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2U_I^q}{h} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1. Soit $(\eta_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie par

$$\eta_l = k^l s_0, \quad t(\eta_l) = \int_0^{\eta_l} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}} \quad \text{et} \quad \eta_0 > 0, \quad k > 1.$$

si $q > 1$, alors la suite $(t(\eta_l))_{l \in \mathbb{N}}$ converge linéairement vers T_h et le taux de convergence est $k^{-\frac{1}{q-1}}$.

Preuve. Nous avons le résultat désiré grâce aux Théorème 1.9, Théorème 3.15 et Théorème 3.16 (voir annexes). \square

Pour la programmation, nous définissons η_l par $\eta_l = 2^{16} \cdot 2^l$ ($l = 0, 1, \dots, 12$). Pour chaque valeur de l , nous appliquons DOP54 (DOP54 est un code de résolution des équations différentielles ordinaires) au système (1.47) et nous obtenons la suite de temps d'explosion numérique $\{t_l^{(k)}\}_{k=1}^{l+1}$. Nous accélérons la convergence de cette suite récursive par la méthode d'Aitken Δ^2 , qui est la suivante :

$$t_{l+2}^{(k+1)} = t_{l+1}^{(k)} - \frac{(t_{l+2}^{(k)} - t_{l+1}^{(k)})^2}{t_{l+2}^{(k)} - 2t_{l+1}^{(k)} + t_l^{(k)}}, \quad l \geq 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nous rappelons que DOP54 est la version MATLAB du code DOPRI5 de FORTRAN écrit par Hairer et al [40]. Pour notre expérience nous prenons : Reltol = Abstol = 1.d-15 et Initialtol=0. Les paramètres Reltol et Abstol sont respectivement les erreurs absolue ; et relative et Initialtol est utilisé pour choisir la manière dont les erreurs sont contrôlées (voir [41] pour plus de détail).

1.3.7 Tableaux

Dans les lignes des tableaux suivants, nous présentons le temps d'explosion numérique T_h , le nombre d'itérations n , correspondant à des mailles de 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

Tableau 1.1 – Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 3$, $p = 3$.

I	T_h	n
16	0.264970	12527
32	0.260386	15008
64	0.259024	19880
128	0.258625	31186
256	0.258510	53933
512	0.258477	114522
1024	0.258468	357602

Tableau 1.2 – Temps d'explosion numérique, nombre d'itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 3$, $p = 2$.

I	T_h	n
16	0.267491	12557
32	0.262877	15093
64	0.261506	20507
128	0.261106	31642
256	0.260990	54892
512	0.260957	116438
1024	0.260948	360972

Tableau 1.3 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 3$, $p = 1$.

I	T_h	n
16	0.277556	12317
32	0.272857	14343
64	0.271467	18685
128	0.271061	28043
256	0.270944	50319
512	0.270911	117269
1024	0.270902	373244

Tableau 1.4 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4$, $p = 4$.

I	T_h	n
16	0.193186	8599
32	0.189180	10386
64	0.187970	14159
128	0.187613	21902
256	0.187509	38129
512	0.187479	83182
1024	0.187471	260478

Tableau 1.5 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4$, $p = 3$.

I	T_h	n
16	0.193469	8670
32	0.189455	10563
64	0.188243	14549
128	0.187885	22704
256	0.187781	39660
512	0.187752	84020
1024	0.187744	260848

Tableau 1.6 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4$, $p = 2$.

I	T_h	n
16	0.194600	8702
32	0.190565	10653
64	0.189347	14767
128	0.188989	23175
256	0.188885	40621
512	0.188855	85542
1024	0.188847	262486

Tableau 1.7 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 4$, $p = 1$.

I	T_h	n
16	0.199975	8499
32	0.195868	9986
64	0.194633	13108
128	0.194270	19838
256	0.194165	36135
512	0.194135	84981
1024	0.194128	268863

1.3.8 Graphiques

Dans ce qui suit, nous donnons également des graphiques pour illustrer nos analyses. Dans les figures ci-dessous, nous pouvons voir que la solution numérique explose en un temps fini au dernier nœud.

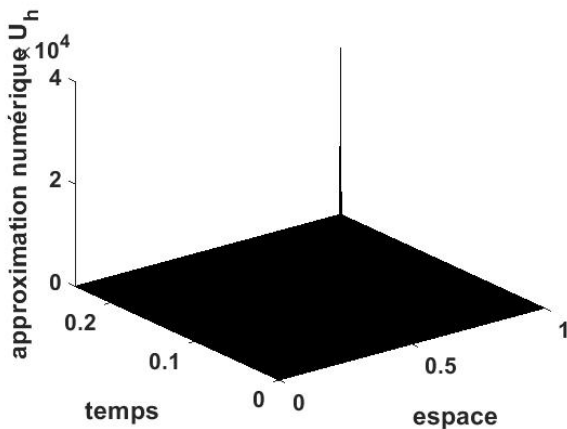


Figure 1.1 – Évolution de la solution numérique pour $I=256$, $p=1$ et $q=3$

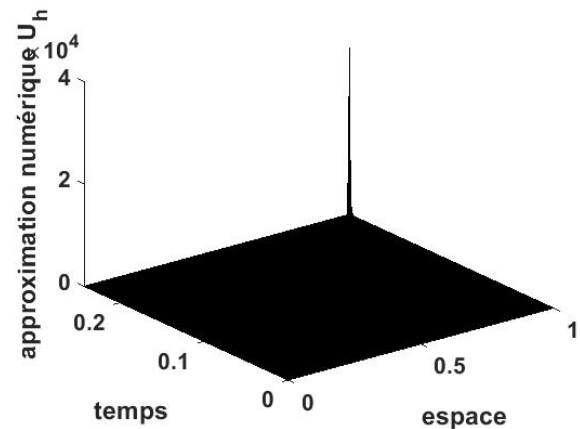


Figure 1.2 – Évolution de la solution numérique pour $I=256$, $p=3$ et $q=3$

Remarque 1.1. *Les différents tableaux de nos résultats numériques montrent qu'il existe une relation entre le temps d'explosion et les paramètres de réactions q et p . Si on considère le problème (1.1) - (1.3) dans le cas où la fonction de distribution initiale de température dans la tige linéique est donnée par $u_0(x) = x$ et $q = 3$, nous observons des tableaux 1.1 à 1.3 que le temps d'explosion numérique est approximativement égal à 0,3. Quand le paramètre de réaction $q = 4$, nous observons des Tableaux 1.4 à 1.7 que le temps d'explosion numérique est approximativement égal à 0,2. On peut dire que, quand on augmente le paramètre de réaction q on a une accélération de l'explosion de la solution. D'autre part, quand q est fixé et que p est augmenté, nous observons dans les tableaux 1.1-1.3 et 1.4-1.7 qu'il y a un léger ralentissement d'explosion de la solution u . Nous pouvons dire de ce qui précède que le paramètre de réaction q est le facteur principal d'explosion de la solution u du problème (1.1) - (1.3). Et nous pouvons affirmer aussi que l'explosion peut être contrôlée grâce aux paramètres p et q . Également, à partir des tableaux, nous observons la convergence du temps d'explosion T_h de la solution de (1.11) - (1.14). Ce résultat ne nous surprend pas à cause des résultats établis dans la précédente sous section.*

1.3.9 Extinction en temps fini et convergence du temps d'extinction de la solution de (1.11)-(1.14) sous l'hypothèse (II)

Dans cette sous section, nous considérons le cas où $f(s) = (1 - s)^{-p}$ et $g(s) = (1 - s)^{-q}$ pour tout $0 \leq s < 1$ avec $q \geq p$. Nous supposons que la solution u du problème (1.1)-(1.3) est élément de $C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$.

Définition 1.4. *La solution U_h de (1.11)-(1.14) s'éteint en un temps fini, s'il existe un temps fini $T_h > 0$ tel que*

$$\text{pour tout } t \in [0, T_h[, \|U_h(t)\|_\infty < 1, \quad \lim_{t \rightarrow T_h^-} \|U_h(t)\|_\infty = 1^-, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow T_h^-} \|U_h'(t)\|_\infty = \infty.$$

T_h est appelé le temps d'extinction de la solution U_h de (1.11)-(1.14).

Si T_h existe, alors $T_h = T_{h,max}$.

Pour la suite nous notons $u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T$ et $u_{0h} = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_I))^T$. Nous supposons que la donnée initiale φ_h est une sous-solution de (1.11)-(1.14) et vérifie (1.26).

Théorème 1.10. *Si la solution U_h du problème semi-discret (1.11)-(1.14) est élément de $C^2([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$. Alors pour h assez petit, il existe un temps fini T_h tel que*

$$\lim_{t \rightarrow T_h^-} \|U_h(t)\|_\infty = 1.$$

Preuve. Soient $J_h(t) = (J_1(t), \dots, J_I(t))$, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$, telle que

$$J_i(t) = U_i'(t) - \gamma(1 - U_i(t))^{-q}, \quad i = 1 \dots, I, \quad \forall t \in]0, T_{h,max}[,$$

$$J_i(0) = \delta^2 \varphi_i - \gamma(1 - \varphi_i)^{-q}, \quad i = 1 \dots, I,$$

où γ est un réel que l'on définira dans la suite. Par utilisation du Lemme 1.7 et par un procédé similaire que dans la preuve du Théorème 1.9, nous obtenons les inégalités ci-dessous, pour $t \in]0, T_{h,max}[$,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) + \frac{2p}{h}(1 - U_1(t))^{-p-1} J_1(t) &\geq \frac{2\gamma}{h}(q - p)(1 - U_1(t))^{-p-q-1} \\ \frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) &\geq 0, \quad i = 2, \dots, I - 1, \\ \frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) - \frac{2q}{h}(1 - U_I(t))^{-q-1} J_I(t) &\geq 0. \end{aligned}$$

Selon nos hypothèses $q \geq p$, nous obtenons donc, $t \in]0, T_{h,max}[$

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) + \frac{2p}{h}(1 - U_1(t))^{-p-1} J_1(t) &\geq 0, \\ \frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) - \frac{2q}{h}(1 - U_I(t))^{-q-1} J_I(t) &\geq 0, \\ \frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) &\geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait que φ_h est sous-solution et en choisissant γ assez petit, nous obtenons $J_h(0) \geq 0$. Nous déduisons du Lemme 1.4 que $J_i(t) \geq 0$, $i = 1, \dots, I$, d'où

$$(1 - U_i(t))^q dU_i(t) \geq \gamma dt, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[. \quad (1.50)$$

En intégrant (1.50) de 0 à t , nous obtenons $(1 - U_i(t))^{q+1} \leq (1 - \varphi_i)^{q+1} - \gamma(q+1)t$, $i = 1, \dots, I$. D'après le Lemme 1.6 et nos hypothèses sur φ_h , on a $\varphi_i \leq \varphi_{i+1}$ et $U_i(t) \leq U_{i+1}(t)$, $i = 1, \dots, I-1$, $t \in]0, T_{h,max}[$, par conséquent

$$\|\varphi_h\|_\infty = \varphi_I \text{ et } \|U_h(t)\|_\infty = U_I(t), \quad t \in]0, T_{h,max}[,$$

Ce qui entraîne l'existence de $T_h > 0$ tel que

$$U_I(t) \rightarrow 1, \quad \text{quand } t \rightarrow T_h \text{ avec } T_h \leq \frac{(1 - \varphi_I)^{q+1}}{\gamma(q+1)}.$$

Théorème 1.11. *Si $\lim_{t \rightarrow T_h^-} U_I(t) = 1^-$, alors $U'_h(t)$ explose en T_h .*

Preuve. Supposons que $U'_h(t)$ est bornée.

Alors il existe une constante positive M telle que $U'_h(t) < M$. Nous avons

$$\sum_{i=2}^I \sum_{j=i}^I h^2 U'_j(t) < \sum_{i=2}^I \sum_{j=i}^I h^2 M$$

par le système (1.11)-(1.13), nous arrivons à

$$\sum_{i=2}^I \left(\sum_{j=i}^{I-1} (U_{j+1}(t) - 2U_j(t) + U_{j-1}(t)) + 2U_{I-1}(t) - 2U_I(t) + 2hg(U_I(t)) \right) < \sum_{i=2}^I h^2 (I+1-i)M$$

par télescopage, nous avons

$$\sum_{i=2}^I (U_{i-1}(t) - U_i(t) + U_{I-1}(t) - U_I(t) + 2hg(U_I(t))) < \frac{I(I-1)hM}{2}$$

ainsi par télescopage, nous avons

$$(I-1)(U_{I-1}(t) - U_I(t) + 2hg(U_I(t))) + U_1(t) - U_I(t) < \frac{M}{2} + \frac{hM}{2}$$

$$\frac{1}{h}(U_{I-1}(t) - U_I(t) + 2hg(U_I(t))) < \frac{M}{2} + \frac{hM}{2} + U_I(t) - U_1(t)$$

$$2g(U_I(t)) < \frac{M}{2} + \frac{hM}{2} + U_I(t) - U_1(t) + \frac{U_I(t) - U_{I-1}(t)}{h}$$

$$\frac{2}{(1 - U_I(t))^q} < \frac{M}{2} + \frac{hM}{2} + U_I(t) - U_1(t) + \frac{U_I(t) - U_{I-1}(t)}{h}.$$

Comme $t \rightarrow T_h^-$, alors le terme à gauche de notre inégalité tend vers l'infini tandis que le terme de droite est fini. Cette contradiction montre que $U'_h(t)$ explose à T_h . \square

D'après la Définition 1.4, les Théorèmes 1.6 et 1.11, nous pouvons affirmer que $T_h = T_{h,max}$.

Maintenant, nous montrons que le temps d'explosion de la solution numérique converge vers celui de la solution du problème continu quand le pas de maillage tend vers zéro.

Théorème 1.12. *Soit u solution de (1.11)-(1.14) s'éteignant en un temps fini T et φ_h la donnée initiale de (1.11)-(1.14) vérifiant*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1).$$

Supposons que les hypothèses du Théorème 1.10 tiennent et T_h est le temps d'extinction de la solution U_h de (1.11)-(1.14). Alors, nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\frac{(1-y)^{q+1}}{\gamma(q+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \eta \leq y \leq 1. \quad (1.51)$$

Puisque u s'éteint en un temps fini T , il existe $T_1 \in]0, T[$ tel que

$|T_1 - T| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $2\eta \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq 1$ pour $t \in [T_1, T[$.

Du Théorème 1.7, pour h assez petit, nous avons $\|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty \leq \eta$. En appliquant l'inégalité triangulaire renversée, nous obtenons

$$1 \geq \|U_h(T_1)\|_\infty = \|U_h(T_1) - u_h(T_1) + u_h(T_1)\|_\infty \geq \|u_h(T_1)\|_\infty - \|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty \geq \eta.$$

Du Théorème 1.10, U_h s'éteint en un temps fini T_h . En intégrant (1.50) de t à T_h , nous obtenons

$$T_h - t \leq \frac{(1 - U_i(t))^{q+1}}{\gamma(q+1)}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (1.52)$$

Nous déduisons que

$$|T_h - T| \leq |T_h - T_1| + |T_1 - T| \leq \frac{(1 - \|U_h(T_1)\|_\infty)^{q+1}}{\gamma(q+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

□

Théorème 1.13. *Supposons que $q \geq p$, U_h s'éteint à un temps fini T_h avec une donnée initiale sous-solution de (1.11)-(1.14) et $\lim_{t \rightarrow T_h} U_I(t) = 1$. Il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que*

$$C_1(T_h - t)^{\frac{1}{q+1}} \leq 1 - U_I(t) \leq C_2(T_h - t)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Preuve. Considérons l'inégalité (1.50), à savoir

$$(1 - U_I(t))^q dU_i(t) \geq \gamma dt, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_h[$$

en intégrant ci-dessus de t à T_h nous arrivons

$$(\gamma(q+1))^{1/(q+1)} (T_h - t)^{1/(q+1)} \leq 1 - U_I(t). \quad (1.53)$$

Nous avons d'après (1.13)

$$U'_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2(1 - U_I(t))^{-q}}{h}, \quad t \in]0, T_h[.$$

Du Lemme 1.6, nous avons $U_i < U_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq I - 1$. Donc

$$U'_I(t) \leq \frac{2}{h}(1 - U_I(t))^{-q}, \quad t \in]0, T_h[.$$

en intégrant l'inégalité précédent de t à T_h nous obtenons

$$1 - U_I(t) \leq \left(\frac{2(q+1)}{h} \right)^{\frac{1}{q+1}} (T_h - t)^{\frac{1}{q+1}}, \quad (1.54)$$

et nous avons le résultat désiré. \square

Remarque 1.2. En posant $V_h(t) = (V_1(t), \dots, V_I(t))^T$ avec $V_i = (1 - U_i)^{-1}$, il est facile de voir que V_h explose au temps d'extinction de U_h et $V_I \sim (T_h - t)^{-\frac{1}{q+1}}$ au sens qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$K_1(T_h - t)^{-\frac{1}{q+1}} \leq V_I(t) \leq K_2(T_h - t)^{-\frac{1}{q+1}}.$$

1.3.10 Résultats numériques

Dans cette sous section, nous présentons quelques approximations numériques du temps d'extinction de la solution de (1.11)-(1.14) avec $f(s) = (1 - s)^{-p}$ et $g(s) = (1 - s)^{-q}$ pour tout s positive et pour la donnée initiale $u_0(x) = \sqrt{1.5} - \cos(\frac{\pi x}{4})$, sous-solution de (1.11)-(1.14) avec différentes valeurs de q et p , où $q \geq p$.

En posant $V_i(t) = (1 - U_i(t))^{-1}$, nous obtenons,

$$V_i'(t) = \frac{U_i'(t)}{(1 - U_i(t))^2},$$

en utilisant le système (1.11)-(1.13), nous aboutissons à :

$$V_1'(t) = \frac{2}{h^2} \left(V_1(t) - \frac{V_1(t)^2}{V_2(t)} \right) - \frac{2}{h} (V_1(t))^{p+2} \quad (1.55)$$

$$V_i'(t) = \frac{1}{h^2} \left(2V_i(t) - \frac{V_i(t)^2}{V_{i-1}(t)} - \frac{V_i(t)^2}{V_{i+1}(t)} \right), \quad i = 2, \dots, I-1 \quad (1.56)$$

$$V_I'(t) = \frac{2}{h^2} \left(V_I(t) - \frac{V_I(t)^2}{V_{I-1}(t)} \right) + \frac{2}{h} (V_I(t))^{q+2} \quad (1.57)$$

avec $V_i(0) = (1 - \varphi_i)^{-1}$. Soit η la longueur de l'arc paramétré

$$\begin{aligned} M &: [0, T_h[\rightarrow \mathbb{R}^{I+1} \\ t &\mapsto (t, V_h(t)), \end{aligned}$$

on a $\eta(t) = \int_0^t \sqrt{1 + V_1'(\tau)^2 + \dots + V_I'(\tau)^2} d\tau$. Ce qui implique que

$$\frac{d\eta}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dV_1(t)}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dV_I(t)}{dt}\right)^2}.$$

En considérant les variables t et V_i en fonction de η , nous obtenons les systèmes d'EDO suivant

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}}, \\ \frac{dV_i}{d\eta} = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}}, \quad i = 1, \dots, I, \\ t(0) = 0, \quad V_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{cases} \quad (1.58)$$

où $0 < \eta < \infty$ et $f_i = V_i'$, $i = 1, \dots, I$.

Proposition 1.2. Soit $(\eta_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie par

$$\eta_l = k^l s_0, \quad t(\eta_l) = \int_0^{\eta_l} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}} \quad \text{et} \quad \eta_0 > 0, \quad k > 1,$$

alors la suite $(t(\eta_l))_{l \in \mathbb{N}}$ converge linéairement vers T et le taux de convergence est $k^{-\frac{1}{q+1}}$.

Preuve. Nous avons le résultat désiré grâce à la Remarque 1.2 et aux Théorèmes 3.15 et 3.16 (en annexes). \square

Comme dans le cas précédent, nous définissons η_l par $\eta_l = 2^{16} \cdot 2^l$ ($l = 0, 1, \dots, 12$). Pour chaque valeur de l , nous appliquons DOP54 au système (1.58) et nous obtenons la suite de temps d'explosion numérique $\{t_l^{(k)}\}_{k=1}^{l+1}$ dont nous accélérons la convergence par la méthode d'Aitken Δ^2 .

1.3.11 Tableaux

Dans les lignes des tableaux suivants, nous présentons le temps d'extinction numérique T_h , le nombre d'itérations n correspondant à des mailles de 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. les ordres d'approximation s correspondant à des mailles de 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

Tableau 1.8 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 0.5$, $p = 0.5$.

I	T_h	n
16	0.04123653	226
32	0.03951641	408
64	0.03899603	775
128	0.03883962	1541
256	0.03879335	3748
512	0.03877990	12843
1024	0.03877606	100205

Tableau 1.9 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1$, $p = 0.5$.

I	T_h	n
16	0.00955403	950
32	0.00809688	1542
64	0.00762897	2774
128	0.00748180	5141
256	0.00743675	9661
512	0.00742332	18376
1024	0.00741940	35572

Tableau 1.10 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1$, $p = 1$.

I	T_h	n
16	0.00955403	958
32	0.00809688	1546
64	0.00762897	2777
128	0.00748180	5143
256	0.00743675	9662
1024	0.00741940	35573

Tableau 1.11 – Temps d’extinction numériques, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1.5$, $p = 0.5$.

I	T_h	n
16	0.00346502	634
32	0.00242428	845
64	0.00205464	1376
128	0.00193151	2442
256	0.00189209	4477
512	0.00187992	8368
1024	0.00187628	15904

Tableau 1.12 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1.5$, $p = 1$.

I	T_h	n
16	0.00346501	639
32	0.00242428	849
64	0.00205464	1379
128	0.00193151	2443
256	0.00189209	4477
512	0.00187992	8368
1024	0.00187628	15904

Tableau 1.13 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $q = 1.5$, $p = 1.5$.

I	T_h	n
16	0.00346501	646
32	0.00242428	854
64	0.00205464	1380
128	0.00193151	2444
256	0.00189209	4478
512	0.00187992	8370
1024	0.00187628	15905

1.3.12 Graphiques

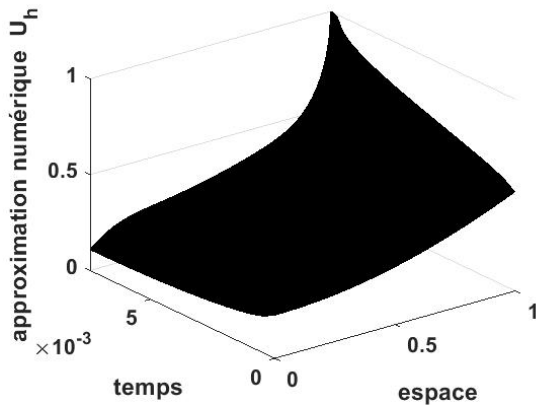


Figure 1.3 – Évolution de la solution numérique U_h pour $I = 128$, $q = 1.5$ et $p = 1$.

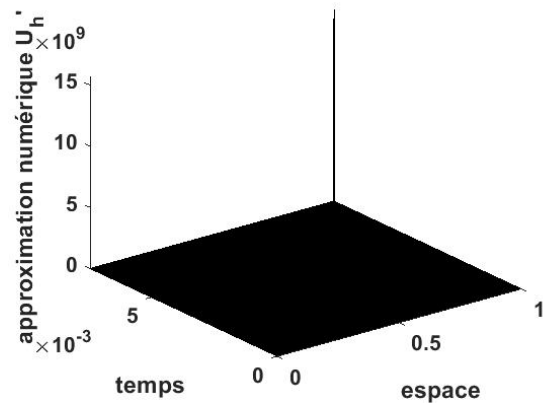


Figure 1.4 – Évolution de la dérivée de la solution numérique U_h pour $I = 128$, $q = 1.5$ et $p = 1$.

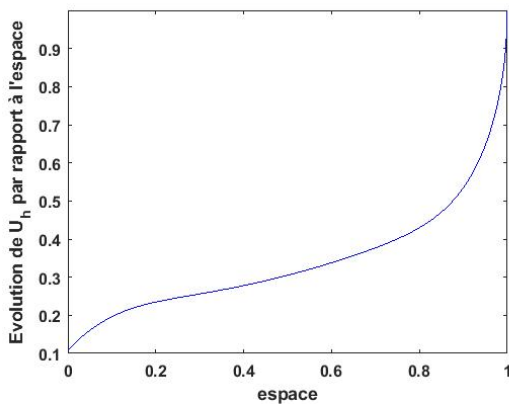


Figure 1.5 – Évolution de la solution numérique U_h en fonction de l'espace au temps d'extinction pour $q = 1.5$ et $p = 1$.

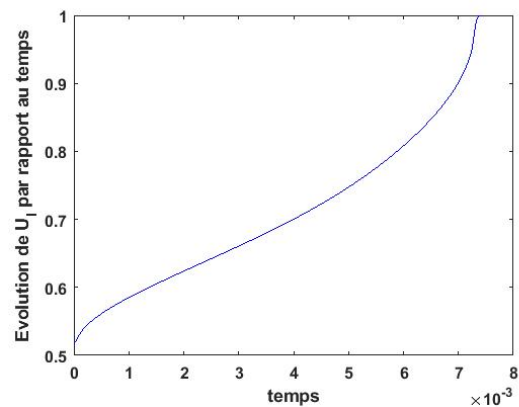


Figure 1.6 – Évolution de U_I en fonction du temps pour $I = 128$, $q = 1.5$ et $p = 1$.

Remarque 1.3. *Les différents tableaux de nos résultats numériques montrent qu'il existe une relation entre le temps d'extinction et les paramètres d'absorptions q et p . Si on considère le problème (1.1) - (1.3) dans le cas où la fonction de distribution initiale de température est donnée par $u_0(x) = \sqrt{1.5} - \cos(\frac{\pi x}{4})$. Nous observons du tableau 1.8 que le temps d'extinction numérique est approximativement égal à 0,03877 quand le paramètre $q = 0.5$. Quand le paramètre $q = 1$, nous observons du Tableau 1.9 que le temps d'extinction numérique est approximativement égal à 0,00741 et du Tableau 1.10 que le temps d'extinction numérique est approximativement égal à 0,00187. On peut dire que quand on augmente le paramètre d'absorption q , l'extinction de*

la solution u est accélérée. D'autre part, quand le paramètre d'absorption q est fixé et que le paramètre d'absorption p est augmenté, nous observons dans les tableaux 1.9-1.10 et 1.11-1.13 que le temps d'extinction reste constant, ce qui nous permet de dire que le paramètre p ne joue pas un grand rôle dans l'extinction de la solution u mais le paramètre d'absorption q est le facteur principal d'extinction de la solution u du problème (1.1) - (1.3). Nous voyons que l'extinction peut être contrôlée grâce aux paramètres d'absorption p et q . Également, à partir des tableaux, nous observons la convergence du temps d'extinction T_h de la solution de (1.11) - (1.14). Ce résultat ne nous surprend pas à cause des résultats établis dans la précédente sous section.

Chapitre 2

EXPLOSION NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME D'EDP PARABOLIQUES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COUPLÉES NON LINÉAIRES

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons les équations de chaleur de la forme

$$u_t = u_{xx}, \quad v_t = v_{xx}, \quad (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \quad (2.1)$$

$$-u_x(0, t) = u^m(0, t) + v^p(0, t), \quad -v_x(0, t) = u^q(0, t) + v^n(0, t), \quad t \in]0, T[, \quad (2.2)$$

$$u_x(1, t) = u^m(1, t) + v^p(1, t), \quad v_x(1, t) = u^q(1, t) + v^n(1, t), \quad t \in]0, T[, \quad (2.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.4)$$

où $m, n \geq 0$, $p, q > 0$, u_0 et v_0 sont des fonctions positives, lisses et satisfaisant les conditions de compatibilité, à savoir :

$$-u'_0(0) = u_0^m(0) + v_0^p(0), \quad -v'_0(0) = u_0^q(0) + v_0^n(0) \text{ et } u'_0(1) = u_0^m(1) + v_0^p(1), \quad v'_0(1) = u_0^q(1) + v_0^n(1).$$

Le problème (2.1)-(2.4) peut être vu comme un transfert de chaleur par conduction, dans deux tiges métalliques A et B adjacentes de longueur 1, soumises respectivement à des températures initiales positives u_0 et v_0 . L'on impose aux extrémités du matériau A le flux de chaleur de quantité $u^m(x, \cdot) + v^p(x, \cdot)$, et aussi aux extrémités du matériau B le flux de chaleur de quantités $u^q(x, \cdot) + v^n(x, \cdot)$ et ces flux de chaleur varient en fonction du temps.

Ici, l'intervalle $]0, T[$ est l'intervalle de temps maximal sur lequel la solution (u, v) de (2.1)-(2.4) existe. Le temps T peut être fini ou infini. Quand T est infini, nous disons que la solution (u, v) existe globalement. Quand T est fini, la solution (u, v) développe une singularité dans un temps fini. À savoir, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|v(\cdot, t)\|_\infty = \infty,$$

où $\|u(\cdot, t)\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(\cdot, t)|$, $\|v(\cdot, t)\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |v(\cdot, t)|$. Dans ce cas précédent, nous disons que la solution (u, v) explose au temps fini T , et T est appelé le temps d'explosion de la solution (u, v) .

Pour la question d'existence locale et l'unicité de la solution du problème continu (2.1)-(2.4) nous nous référons au Théorème 3.13 (annexes). Le phénomène d'explosion pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques a été l'objet de plusieurs études de nombreux Mathématiciens voir [5, 9, 20, 30, 49, 50, 63, 69]. Pour notre problème (2.1)-(2.4) il existe une unique solution (u, v) qui explose en un temps fini T pour une donnée initiale (u_0, v_0) qui satisfait les conditions de compatibilité si et seulement si $\max\{m, n, pq\} > 1$, voir [49]. Il est

prouvé que, si $m < q + 1$ et $n < p + 1$, alors l'explosion de (u, v) doit être simultanée, à savoir

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty, \text{ et } \lim_{t \rightarrow T} \|v(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

L'explosion non-simultanée a lieu si et seulement si $m > q + 1$ ou $n > p + 1$. Ils trouvent trois régions : (i) $q + 1 < m < p/(p + 1 - n)$ et $n < p + 1$, (ii) $p + 1 < n < q/(q + 1 - m)$ et $m < q + 1$, (iii) $m > q + 1$ et $n > p + 1$, où les explosions simultanées ou non-simultanées peuvent être possibles.

Dans ce chapitre, nous notons $(u, v) \in (\mathcal{C}([0, 1] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times]0, T])^2$ la solution de (2.1)-(2.4) pour la donnée initiale (u_0, v_0) et nous nous intéressons à l'étude numérique de la forme semi-discrète associée à (2.1)-(2.4) obtenue en utilisant le même principe de discrétisation dans la section 1.3 du chapitre 1.

Nous avons la forme suivante

$$U_i'(t) = \delta^2 U_i(t) + b_i (U_i^m(t) + V_i^p(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.5)$$

$$V_i'(t) = \delta^2 V_i(t) + b_i (U_i^q(t) + V_i^n(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.6)$$

$$U_i(0) = \varphi_{1,i} \quad V_i(0) = \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.7)$$

où

$$x_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, I, \quad h = 1/(I - 1), \quad I > 1,$$

$U_h(t) = (U_1(t), \dots, U_I(t))^T$, $V_h(t) = (V_1(t), \dots, V_I(t))^T$. $U_i(t)$ et $V_i(t)$ sont les valeurs de notre approximation numérique de u et v au nœud x_i et au temps t . Et $\varphi_{1,i}$, $\varphi_{2,i}$, respectivement, les valeurs de notre approximation numérique de u_0 et v_0 au nœud x_i , avec

$$\begin{cases} 0 < \varphi_{1,i}, \quad 0 < \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I, \\ \delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \\ \delta^2 U_1(t) = \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}, \\ b_1 = \frac{2}{h}, \quad b_I = \frac{2}{h}, \quad \text{et } b_i = 0, \quad i = 2, \dots, I - 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous montrons que le schéma (2.5)-(2.7) possède une unique solution qui, sous certaines conditions reproduit bien les conditions d'explosion de la solution du système (2.1)-(2.4). Et nous montrons aussi que le temps d'explosion semi-discret converge vers celui de la solution du problème (2.1)-(2.4) quand le pas de maillage tend vers zéro.

Le reste du chapitre 2 est organisé comme suit : dans la section suivante, nous prouvons que le schéma numérique admet une unique solution et dans la section 2.3 nous donnons les propriétés

qualitatives de la solution de (2.5)–(2.7). Dans la section 2.4, sous certaines conditions, nous montrons que la solution de (2.5)–(2.7) explose en un temps fini et que ce temps tend vers celui de la solution du problème (2.1)–(2.4) quand le pas de maillage tend vers zéro. Dans la section 2.5, nous étudions les explosions simultanée et non simultanée de la solution du schéma numérique. Finalement, dans la dernière section nous donnons quelques résultats numériques qui illustrent nos analyses.

2.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret en espace (2.5)–(2.7)

Dans cette section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret en espace (2.5)–(2.7).

Théorème 2.1. (Existence et unicité) *Pour chaque pas de discrétisation h fixé, le problème semi-discret en espace (2.5)–(2.7) admet une unique solution maximale $([0, T_{h,max}[, (U_h(\cdot), V_h(\cdot)))$, où $[0, T_{h,max}[$ désigne l'intervalle maximal d'existence de la solution maximale (U_h, V_h) .*

Preuve. En considérant le problème (2.5)–(2.7) nous avons

$$\begin{cases} \frac{dX_h(t)}{dt} = F(X_h(t)), \\ X_h(t_0) = X_{h0}, \end{cases} \quad (2.9)$$

où $X_{h0} = (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,I}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,I})$, $t_0 = 0$ et F est fonction de la variable $X_h(t) = (X_1(t), \dots, X_{2I}(t))^T$ et est définie sur \mathbb{R}^{2I} par $F(X_h(t)) = (F_1(X_h(t), \dots, F_{2I}(X_h(t)))^T$ avec

$$\begin{aligned} F_1(X_h(t)) &= \frac{2X_2(t) - 2X_1(t)}{h^2} + \frac{2(X_1^m(t) + X_{I+1}^p(t))}{h} \\ F_i(X_h(t)) &= \frac{X_{i-1}(t) - 2X_i(t) + X_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i \in \{2, \dots, I-1, I+2, \dots, 2I-1\} \\ F_I(X_h(t)) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2} + \frac{2(X_I^m(t) + X_{2I}^p(t))}{h}, \\ F_{I+1}(X_h(t)) &= \frac{2X_{I+2}(t) - 2X_{I+1}(t)}{h^2} + \frac{2(X_{I+1}^q(t) + X_{I+1}^n(t))}{h}, \\ F_{2I}(X_h(t)) &= \frac{2X_{2I-1}(t) - 2X_{2I}(t)}{h^2} + \frac{2(X_I^q(t) + X_{2I}^n(t))}{h}. \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{2I} . D'après le Théorème 3.14 le problème (3.8) admet une unique solution maximale $([0, T_{h,max}[, X_h(\cdot))$. En posant $U_i(t) = X_i(t)$ et $V_i(t) = X_{I+i}(t)$, pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, et $t \in [0, T_{h,max}[$, le problème (2.5)–(2.7) admet une unique solution maximale $([0, T_{h,max}[, (U_h(\cdot), V_h(\cdot)))$. \square

2.3 Propriétés qualitatives de la solution du problème (2.5)-(2.7)

Dans cette section, par des méthodes similaires que celles du chapitre précédent, nous montrons quelques résultats auxiliaires du problème (2.5)-(2.7). D'abord nous donnons la définition d'une sous-solution et d'une sur-solution du problème (2.5)-(2.7).

Définition 2.1. *Nous disons que $(\underline{U}_h, \underline{V}_h) \in (C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I])^2$ est une sous-solution de (2.5)-(2.7) si*

$$\begin{aligned} \underline{U}_i'(t) &\leq \delta^2 \underline{U}_i(t) + b_i(\underline{U}_i^m(t) + \underline{V}_i^p(t)), & i = 1, \dots, I, & t \in]0, T_{h,max}[, \\ \underline{V}_i'(t) &\leq \delta^2 \underline{V}_i(t) + b_i(\underline{U}_i^q(t) + \underline{V}_i^n(t)), & i = 1, \dots, I, & t \in]0, T_{h,max}[, \\ \underline{U}_i(0) &\leq \varphi_{1,i}, \quad \underline{V}_i(0) \leq \varphi_{2,i}, & & i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

où (U_h, V_h) est la solution de (2.5)-(2.7). En d'autres termes, nous disons que $(\overline{U}_h, \overline{V}_h) \in (C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I])^2$ est une sur-solution de (2.5)-(2.7) si ces inégalités sont inverses.

Le lemme suivant est une forme discrète du principe du maximum.

Lemme 2.1. *Soient $e_h, c_h, \alpha_h, \beta_h \in (C^0([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I])$, $U_h, V_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ telles que*

$$\begin{aligned} U_i'(t) - \delta^2 U_i(t) - e_i(t)U_i(t) - c_i(t)V_i(t) &\geq 0, & i = 1 \dots, I, & t \in]0, T_{h,max}[, \\ V_i'(t) - \delta^2 V_i(t) - \alpha_i(t)U_i(t) - \beta_i(t)V_i(t) &\geq 0, & i = 1 \dots, I, & t \in]0, T_{h,max}[, \\ U_i(0) &\geq 0, \quad V_i(0) \geq 0, & & i = 1 \dots, I. \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$U_i(t) \geq 0, \quad V_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[.$$

Preuve. Soient $T_0 < T_{h,max}$ et $(Z_h(t), W_h(t)) = (e^{\lambda t}U_h(t), e^{\lambda t}V_h(t))$ avec λ est un réel tels que pour $i \in \{1, \dots, I\}$ et pour $t \in [0, T_0]$,

$$\beta_i(t) + \lambda < 0, \quad \text{et} \quad e_i(t) + \lambda < 0.$$

En procédant de la même manière que dans la preuve du Lemme 1.4, nous obtenons les inégalités

ci-dessous

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) - (e_i(t) + \lambda)Z_i(t) - c_i(t)W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \quad (2.10)$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_h(t) - \alpha_i(t)Z_i(t) - (\beta_i(t) + \lambda)W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \quad (2.11)$$

$$Z_h(0) \geq 0, \quad W_h(0) \geq 0 \quad (2.12)$$

Soit $m = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} Z_i(t), \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} W_i(t) \right\}$, puisque $i \in \{1, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ et $W_i(t)$ sont des fonctions continues sur le compact $[0, T_0]$. Nous pouvons supposer que $m = Z_{i_0}(t_{i_0})$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, I\}$.

Supposons que $m < 0$

si $t_{i_0} = 0$, alors $Z_{i_0}(0) < 0$, ce qui contredit (2.12), donc $t_{i_0} \neq 0$;

si $1 \leq i_0 \leq I$, nous avons

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_{i_0}) - Z_{i_0}(t_{i_0} - k)}{k} \leq 0, \quad \text{et } \delta^2 Z_{i_0}(t) \geq 0.$$

De plus pour λ assez petit, nous obtenons

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) - \delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) - (e_{i_0}(t_{i_0}) + \lambda) Z_{i_0}(t_{i_0}) - c_{i_0}(t_{i_0})W_{i_0}(t_{i_0}) < 0,$$

ainsi cette inégalité contredit (2.10) et la preuve est complète. \square

Lemme 2.2. (Lemme de comparaison) Soient $(\underline{U}_h, \underline{V}_h)$ et $(\overline{U}_h, \overline{V}_h)$ respectivement sous-solutions et sur-solutions de (2.5)-(2.7) telles que, $(\underline{U}_h(0), \underline{V}_h(0)) \leq (\overline{U}_h(0), \overline{V}_h(0))$ alors

$$(\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t)) \leq (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)).$$

Preuve. Soit $(Z_h(t), W_h(t)) = (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)) - (\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t))$. D'après la Définition 2.1, nous obtenons, pour $i = 1, \dots, I$, pour tout $t \in]0, T_{h,max}[$

$$\overline{U}'_i(t) - \delta^2 \overline{U}_i(t) - b_i(\overline{U}_i^m(t) + \overline{V}_i^p(t)) \geq \underline{U}'_i(t) - \delta^2 \underline{U}_i(t) - b_i(\underline{U}_i^m(t) + \underline{V}_i^p(t))$$

$$\overline{V}'_h(t) - \delta^2 \overline{V}_i(t) - b_i(\overline{U}_i^q(t) + \overline{V}_i^n(t)) \geq \underline{V}'_i(t) - \delta^2 \underline{V}_i(t) - b_i(\underline{U}_i^q(t) + \underline{V}_i^n(t))$$

puis

$$\overline{U}'_i(t) - \underline{U}'_i(t) - \delta^2 \overline{U}_i(t) + \delta^2 \underline{U}_i(t) - b_i(\overline{U}_i^m(t) + \overline{V}_i^p(t) - \underline{U}_i^m(t) - \underline{V}_i^p(t)) \geq 0$$

$$\overline{V}'_h(t) - \underline{V}'_i(t) - \delta^2 \overline{V}_i(t) + \delta^2 \underline{V}_i(t) - b_i(\overline{U}_i^q(t) + \overline{V}_i^n(t) - \underline{U}_i^q(t) - \underline{V}_i^n(t)) \geq 0.$$

Ce qui implique que,

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) - mb_i(\mu_i(t))^{m-1} Z_i(t) - pb_i(\nu_i(t))^{p-1} W_i(t) \geq 0 \quad i = 1, \dots, I, t \in]0, T_h[, \quad (2.13)$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) - qb_i(\mu_i(t))^{q-1} Z_i(t) - nb_i(\nu_i(t))^{n-1} W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in]0, T_h[, \quad (2.14)$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad W_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.15)$$

où $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$ pris respectivement, entre $\underline{U}_i(t)$ et $\overline{U}_i(t)$, et entre $\underline{V}_i(t)$ et $\overline{V}_i(t)$, pour $i \in \{1, \dots, I\}$. Nous pouvons écrire (2.13)-(2.15) comme

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) - e_i(t) Z_i(t) - c_i(t) W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in]0, T_{h,max}[,$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) - \alpha_i(t) Z_i(t) - \beta_i(t) W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in]0, T_{h,max}[,$$

où $e_i(t) = mb_i(\mu_i(t))^{m-1}$, $c_i(t) = pb_i(\nu_i(t))^{p-1}$, $\alpha_i(t) = qb_i(\mu_i(t))^{q-1}$, et $\beta_i(t) = nb_i(\nu_i(t))^{n-1}$ $i = 1, \dots, I, \forall t \in]0, T_{h,max}[$. Selon le Lemme 2.1, $(Z_i(t), W_i(t)) \geq 0$, pour $i = 1, \dots, I, t \in]0, T_{h,max}[$ et la preuve est complète. \square

Lemme 2.3. Soit $(U_h, V_h) \in (C^1(]0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I))^2$ solution de (2.5)-(2.7) avec une donnée initiale positive $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ sous-solution telle que $(\varphi_{1,i+1}, \varphi_{2,i+1}) > (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$, pour $i = 1, \dots, I-1$. Alors nous avons

$$(i) \quad (U_i(t), V_i(t)) \geq (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_h[;$$

$$(ii) \quad (U_{i+1}(t), V_{i+1}(t)) > (U_i(t), V_i(t)), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in]0, T_{h,max}[;$$

$$(iii) \quad (U'_i(t), V'_i(t)) > 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[.$$

Preuve.

(i) Puisque $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ est une sous-solution de (2.5)-(2.7), en utilisant la même procédure que dans la preuve de l'assertion 1. du Lemme 1.6 et en utilisant le Lemme 2.2 nous avons $(U_i(t), V_i(t)) \geq (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}) \geq 0$, pour $i = 1, \dots, I, t \in]0, T_{h,max}[$.

(ii) Ici, nous argumentons par contradiction. Supposons que t_0 est le premier temps $t > 0$, tel que $K_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t) > 0$, $L_i(t) = V_{i+1}(t) - V_i(t) > 0$, pour $1 \leq i \leq I-1$, mais $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$ ou $L_{i_0}(t_0) = V_{i_0+1}(t_0) - V_{i_0}(t_0) = 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, I-1\}$. Supposons que $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que i_0 est le plus petit entier qui satisfait l'égalité ci-dessus. On a $t \in [0, T_{h,max}[$

$$\begin{aligned} K'_1(t) &= U'_2(t) - U'_1(t) \\ K'_i(t) &= U'_{i+1}(t) - U'_i(t) \quad 2 \leq i \leq I-2 \\ K'_{I-1}(t) &= U'_I(t) - U'_{I-1}(t) \end{aligned}$$

d'après (2.5)-(2.6), nous avons

$$\begin{aligned} K'_1(t) &= \frac{U_3(t) - 2U_2(t) + U_1(t)}{h^2} - \left(\frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} + \frac{2}{h}(U_1^m(t) + V_1^p(t)) \right) \\ K'_i(t) &= \frac{U_{i+2}(t) - 2U_{i+1}(t) + U_i(t)}{h^2} - \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-2 \\ K'_{I-1}(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h}(U_I^m(t) + V_I^p(t)) - \frac{U_I(t) - 2U_{I-1}(t) + U_{I-2}(t)}{h^2} \end{aligned}$$

ce qui entraîne le système suivant

$$\begin{cases} K'_1(t) = \frac{K_2(t) - 3K_1(t)}{h^2} - \frac{2}{h}(U_1^m(t) + V_1^p(t)) \\ K'_i(t) = \frac{K_{i+1}(t) - 2K_i(t) + K_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-2 \\ K'_{I-1}(t) = \frac{K_{I-2}(t) - 3K_{I-1}(t)}{h^2} + \frac{2}{h}(U_I^m(t) + V_I^p(t)). \end{cases} \quad (2.16)$$

Selon les hypothèses sur t_0 , nous avons les inégalités suivantes :

$$K'_{i_0}(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_{i_0}(t_0) - K_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0,$$

$$\frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si, } 2 \leq i_0 \leq I-2,$$

$$\frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si, } i_0 = 1,$$

$$\frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si, } i_0 = I-1,$$

ce qui implique que, pour h assez petit,

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} < 0 \quad \text{si } 2 \leq i_0 \leq I-2,$$

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} + \frac{2}{h}(U_{i_0}^m(t) + V_{i_0}^p(t)) < 0 \quad \text{si } i_0 = 1,$$

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} - \frac{2}{h}(U_{i_0}^m(t) + V_{i_0}^p(t)) < 0 \quad \text{si } i_0 = I-1.$$

Ainsi nous avons une contradiction avec (2.16), par conséquent nous obtenons le résultat souhaité. La preuve de l'assertion (iii) est similaire à celle du Lemme 2.2. \square

Maintenant pour chaque intervalle de temps fixé sur lequel la solution (U_h, V_h) de (2.5)-(2.7) et la solution (u, v) de (2.1)-(2.4) sont continues, nous montrons que la solution du schéma numérique (2.5)-(2.7) converge uniformément vers la solution de (2.1)-(2.4) quand le pas de

maillage tend vers zéro. Pour la suite, nous posons $u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T$ où $u(x_i, t)$ est la valeur de la solution de (2.1)-(2.4) au point x_i et au temps t .

Théorème 2.2. *Supposons que la solution (u, v) du problème continu (2.1)-(2.4) appartient à $(C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^*]))^2$ et la donnée initiale $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ de (2.5)-(2.7) satisfait*

$$\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty = o(1) \quad h \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Alors pour h assez petit, l'unique solution de (2.5)-(2.7) vérifie les relations suivantes

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h), \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h), \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Preuve. Soit $\sigma > 0$ tel que

$$(\|u(\cdot, t)\|_\infty, \|v(\cdot, t)\|_\infty) < \sigma, \quad t \in [0, T^*]. \quad (2.18)$$

Soit $t(h) \leq T^*$ la plus grande valeur $t > 0$ telle que

$$\max\{\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty\} < 1. \quad (2.19)$$

la relation (2.17) implique que $t(h) > 0$ pour h assez petit. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \quad \text{et} \quad \|V_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \quad \text{pour } t \in]0, t(h)[. \quad (2.20)$$

Soit $(e_{1,i}, e_{2,i})(t) = (U_i - u_i, V_i - v_i)(t)$, pour $i = 1, \dots, I$, $t \in [0, T^*]$ l'erreur de discrétisation. En procédant de la même manière que dans la preuve du Théorème 1.7, nous obtenons

$$e'_{1,1}(t) = \delta^2 e_{1,1}(t) + mB(\theta_1(t))^{m-1} e_{1,1}(t) + pB(\Theta_1(t))^{p-1} e_{2,1}(t) + O(h),$$

$$e'_{2,1}(t) = \delta^2 e_{2,1}(t) + qB(\theta_1(t))^{q-1} e_{1,1}(t) + nB(\Theta_1(t))^{n-1} e_{2,1}(t) + O(h),$$

$$e'_{1,I}(t) = \delta^2 e_{1,I}(t) + mB(\theta_I(t))^{m-1} e_{1,I}(t) + pB(\Theta_I(t))^{p-1} e_{2,I}(t) + O(h),$$

$$e'_{2,I}(t) = \delta^2 e_{2,I}(t) + qB(\theta_I(t))^{q-1} e_{1,I}(t) + nB(\Theta_I(t))^{n-1} e_{2,I}(t) + O(h),$$

pour $i = 2, \dots, I - 1$,

$$e'_{1,i}(t) = \delta^2 e_{1,i}(t) + O(h^2), \quad e'_{2,i}(t) = \delta^2 e_{2,i}(t) + O(h^2),$$

où $\theta_i(t)$ et $\Theta_i(t)$ sont pris respectivement, entre $U_i(t)$ et $u(x_i, t)$, et entre $U_i(t)$ et $u(x_i, t)$, pour $i \in \{1, I\}$. En utilisant (2.18) et (2.20), il existe des constantes positives K et L telles que

$$\begin{aligned} e'_{1,i}(t) &\leq \delta^2 e_{1,i}(t) + b_i L |e_{1,i}(t)| + b_i L |e_{2,i}(t)| + Kh, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T^*] \\ e'_{2,i}(t) &\leq \delta^2 e_{2,i}(t) + b_i L |e_{1,i}(t)| + b_i L |e_{2,i}(t)| + Kh, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T^*]. \end{aligned}$$

Soit $(z, w) \in (C^{4,1}([0, 1], [0, T^*]))^2$ telle que

$z(x, t) = (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h) e^{(M+4C^2)t+2Cx}$ et $w = z$, $\forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*]$, avec M, C des constantes positives telles que $M > K$ et $C > L$. En procédant de la même manière que dans la preuve du Théorème 1.7 nous obtenons

$$\begin{aligned} z'(x_i, t) &\geq \delta^2 z(x_i, t) + b_i L z(x_i, t) + b_i L w(x_i, t) + Kh, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T^*] \\ w'(x_i, t) &\geq \delta^2 w(x_i, t) + b_i L z(x_i, t) + b_i L w(x_i, t) + Kh, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in [0, T^*]. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 2.2, nous avons

$$(|e_{1,i}(t)|, |e_{2,i}(t)|) < (z(x_i, t), w(x_i, t)), \quad 1 \leq i \leq I, \quad \text{pour } t \in]0, t(h)[.$$

Nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty &\leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h) e^{(M+4C^2)t+2C}, \\ \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty &\leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h) e^{(M+4C^2)t+2C}, \end{aligned}$$

pour $t \in]0, t(h)[$. Supposons que $T^* > t(h)$, de (2.19) nous obtenons

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h) e^{(M+4C^2)t+2C}.$$

Comme le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand h tend vers zéro, on en déduit que $1 \leq 0$, ce qui est impossible. Nous avons donc $t(h) = T^*$ et la preuve est terminée.

□

2.4 Explosion et convergence du temps d'explosion.

Maintenant, sous certaines hypothèses, nous montrons que la solution de (2.5)-(2.7) explose en un temps fini et ce temps, tend vers le temps d'explosion du problème continu (2.1)-(2.4). Nous commençons cette section par la définition suivante :

Définition 2.2. *La solution (U_h, V_h) de (2.5)-(2.7) explose en un temps fini s'il existe un temps fini $T_h > 0$ tel que*

$$\text{pour tout } t \in [0, T_h[, \max\{\|U_h(t)\|_\infty, \|V_h(t)\|_\infty\} < \infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow T_h} (\|U_h(t)\|_\infty + \|V_h(t)\|_\infty) = \infty.$$

T_h est appelé le temps d'explosion de (U_h, V_h) . Si T_h existe, alors $T_h = T_{h, \max}$.

Dans la suite nous avons les conditions d'existence globale de la solution du problème semi-discret.

Théorème 2.3. *La solution (U_h, V_h) de (2.5)-(2.7) existe globalement si*

$$\max\{m, n, pq\} \leq 1.$$

Preuve. Soient \bar{U}_h et \bar{V}_h telles que

$$\bar{U}_i(t) = K e^{k_1 t + (i-1) h k_2}, \quad \bar{V}_i(t) = L e^{l_1 t + (i-1) h l_2}, \quad i = 1, \dots, I \quad (2.21)$$

où K, L, k_j, l_j ($j = 1, 2$) sont des constantes positives satisfaisant :

$$\begin{aligned} K &\geq \max_{1 \leq i \leq I} \bar{U}_i(0), & L &\geq \max_{1 \leq i \leq I} \bar{V}_i(0), \\ k_1 &= l_1 p \geq \max\{M, N\}, & k_2 &= l_2 p, \end{aligned}$$

avec $M = \frac{2}{h^2} (e^{h k_2} - 1 + h(K^m + L^p)/K)$, $N = \frac{2}{h^2} (e^{h l_2} - 1 + h(K^q + L^n)/L)$. Il n'est pas difficile de voir que pour $i = 1, \dots, I$,

$$e^{k_1 t + (i-1) h k_2} = e^{l_1 p t + (i-1) h l_2 p}, \quad e^{l_1 t + (i-1) h l_2} \geq e^{l_1 p q t + (i-1) h l_2 p q} = e^{k_1 q t + (i-1) h k_2 q} \quad (\text{car } pq \leq 1),$$

$$\begin{aligned} K^m + L^p &\geq K^m e^{(m-1) k_1 t + (m-1)(i-1) h k_2} + L^p \quad (\text{car } m \leq 1), \\ \frac{2(K^m + L^p)/K}{h} U_i(t) &\geq \frac{2(K^m e^{(m-1) k_1 t + (m-1)(i-1) h k_2} + L^p)/K}{h} U_i(t) \end{aligned}$$

en mettant $e^{-k_1 t - (i-1) h k_2}$ en facteur dans le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, nous

arrivons à

$$\frac{2(K^m + L^p)/K}{h} \bar{U}_i(t) \geq \frac{(2K^m e^{mk_1 t + m(i-1)hk_2} + 2L^p e^{k_1 t + (i-1)hk_2})/K}{h} e^{-k_1 t - (i-1)hk_2} \bar{U}_i(t)$$

comme $\bar{U}_i(t) = K e^{k_1 t + (i-1)hk_2}$, on a

$$\frac{2(K^m + L^p)/K}{h} \bar{U}_i(t) \geq \frac{2K^m e^{mk_1 t + m(i-1)hk_2} + 2L^p e^{k_1 t + (i-1)hk_2}}{h}$$

en remplaçant k_1 par $l_1 p$ et k_2 par $l_2 p$, nous avons

$$\frac{2(K^m + L^p)/K}{h} \bar{U}_i(t) \geq \frac{2K^m e^{mk_1 t + m(i-1)hk_2} + 2L^p e^{pl_1 t + p(i-1)hl_2}}{h}$$

finalement nous obtenons :

$$\frac{2(K^m + L^p)/K}{h} \bar{U}_i(t) \geq \frac{2\bar{U}_i^m(t) + 2\bar{V}_i^p(t)}{h}.$$

De même, nous montrons que pour $i = 1, \dots, I$,

$$\frac{2(K^q + L^n)/L}{h} \bar{V}_i(t) \geq \frac{2\bar{U}_i^q(t) + 2\bar{V}_i^n(t)}{h}.$$

D'après (2.8), on a :

$$\begin{aligned} \delta^2 \bar{U}_1(t) &= \frac{2\bar{U}_2(t) - 2\bar{U}_1(t)}{h^2} \\ \delta^2 \bar{U}_i(t) &= \frac{\bar{U}_{i+1}(t) - 2\bar{U}_i(t) + \bar{U}_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ \delta^2 \bar{U}_I(t) &= \frac{2\bar{U}_{I-1}(t) - 2\bar{U}_I(t)}{h^2}, \end{aligned}$$

d'après (2.21), on a

$$\begin{aligned} \delta^2 \bar{U}_1(t) &= \frac{2K e^{k_1 t + (1-1+1)hk_2} - 2K e^{k_1 t + (1-1)hk_2}}{h^2}, \\ \delta^2 \bar{U}_i(t) &= \frac{K e^{k_1 t + (i-1+1)hk_2} - 2K e^{k_1 t + (i-1)hk_2} + K e^{k_1 t + (i-1-1)hk_2}}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \delta^2 \bar{U}_I(t) &= \frac{2K e^{k_1 t + (I-1-1)hk_2} - 2K e^{k_1 t + (I-1)hk_2}}{h^2}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}\delta^2 \bar{U}_1(t) &= 2K e^{k_1 t + (1-1)hk_2} \frac{e^{hk_2} - 1}{h^2}, \\ \delta^2 \bar{U}_i(t) &= K e^{k_1 t + (i-1)hk_2} \frac{e^{hk_2} + e^{-hk_2} - 2}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \delta^2 \bar{U}_I(t) &= 2K e^{k_1 t + (I-1)hk_2} \frac{e^{-hk_2} - 1}{h^2}\end{aligned}$$

finalement nous arrivons à :

$$\begin{cases} \delta^2 \bar{U}_1(t) = 2 \frac{e^{hk_2} - 1}{h^2} \bar{U}_1(t), \\ \delta^2 \bar{U}_i(t) = \frac{2(\cosh(hk_2) - 1)}{h^2} \bar{U}_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \delta^2 \bar{U}_I(t) = 2 \frac{e^{-hk_2} - 1}{h^2} \bar{U}_I(t). \end{cases} \quad (2.22)$$

De même, nous avons

$$\begin{cases} \delta^2 \bar{V}_1(t) = 2 \frac{e^{hl_2} - 1}{h^2} \bar{V}_1(t), \\ \delta^2 \bar{V}_i(t) = \frac{2(\cosh(hl_2) - 1)}{h^2} \bar{V}_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1 \\ \delta^2 \bar{V}_I(t) = 2 \frac{e^{-hl_2} - 1}{h^2} \bar{V}_I(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

On a pour $i = 1, \dots, I$

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &= K k_1 e^{k_1 t + (i-1)hk_2}, \quad \bar{V}'_i(t) = L l_1 e^{l_1 t + (i-1)hl_2}, \\ \bar{U}'_i(t) &= k_1 \bar{U}_i(t), \quad \bar{V}'_i(t) = l_1 \bar{V}_i(t), \\ \bar{U}'_i(t) &\geq M \bar{U}_i(t), \quad \bar{V}'_i(t) \geq N \bar{V}_i(t),\end{aligned}$$

d'après la définition de M et N , nous avons

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \frac{2}{h^2} (e^{(hk_2)} - 1 + h(K^m + L^p)/K) \bar{U}_i(t), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \frac{2}{h^2} (e^{(hl_2)} - 1 + h(K^q + L^n)/L) \bar{V}_i(t)\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \frac{2}{h^2} (e^{(hk_2)} - 1) \bar{U}_i(t) + \frac{2}{h} ((K^m + L^p)/K) \bar{U}_i(t), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \frac{2}{h^2} (e^{(hl_2)} - 1) \bar{V}_i(t) + \frac{2}{h} ((K^q + L^n)/L) \bar{V}_i(t).\end{aligned}$$

Comme $e^{hl_2} - 1 \geq \cosh(hl_2) - 1 \geq e^{-hl_2} - 1$, $e^{hk_2} - 1 \geq \cosh(hk_2) - 1 \geq e^{-hk_2} - 1$, et d'après (2.22) et (2.23), nous avons

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + \frac{2}{h} ((K^m + L^p)/K) \bar{U}_i(t), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + \frac{2}{h} ((K^q + L^n)/L) \bar{V}_i(t).\end{aligned}$$

En remplaçant $\bar{U}_i(t)$ et $\bar{V}_i(t)$ par leurs expressions, nous obtenons

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + \frac{2}{h} (K^m e^{k_1 t + (i-1)hk_2} + L^p e^{k_1 t + (i-1)hk_2}), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + \frac{2}{h} (K^q e^{l_1 t + (i-1)hl_2} + L^n e^{l_1 t + (i-1)hl_2}),\end{aligned}$$

comme $\max\{m, n, pq\} < 1$, on a

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + \frac{2}{h} (K^m e^{mk_1 t + m(i-1)hk_2} + L^p e^{k_1 t + (i-1)hk_2}), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + \frac{2}{h} (K^q e^{pq l_1 t + pq(i-1)hl_2} + L^n e^{nl_1 t + n(i-1)hl_2}),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + \frac{2}{h} (K^m e^{mk_1 t + m(i-1)hk_2} + L^p e^{pl_1 t + p(i-1)hl_2}), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + \frac{2}{h} (K^q e^{qk_1 t + q(i-1)hk_2} + L^n e^{nl_1 t + n(i-1)hl_2}),\end{aligned}$$

enfin nous parvenons aux inégalités ci-dessous :

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + \frac{2}{h} (\bar{U}_i^m(t) + \bar{V}_i^p(t)), \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + \frac{2}{h} (\bar{U}_i^q(t) + \bar{V}_i^n(t)).\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + b_i \bar{U}_i^m(t) + b_i \bar{V}_i^p(t), \quad i = 1, \dots, I, \quad t > 0 \\ \bar{V}'_i(t) &\geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + b_i \bar{U}_i^q(t) + b_i \bar{V}_i^n(t), \quad i = 1, \dots, I, \quad t > 0, \\ \bar{U}_i(0) &\geq U_i(0), \quad \bar{V}_i(0) \geq V_i(0), \quad i = 1, \dots, I.\end{aligned}$$

Dû au Lemme 2.2, nous pouvons conclure que (\bar{U}_h, \bar{V}_h) est une sur-solution de (2.5)-(2.7), d'où l'existence globale de la solution de (2.5)-(2.7). \square

Théorème 2.4. *Si $\max\{m, n, pq\} > 1$, alors la solution de (2.5)-(2.7) explose en un temps fini T_h .*

Preuve. Soit $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ sous solution de (2.5)-(2.7) telle que $(\varphi_{1,i+1}, \varphi_{2,i+1}) > (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ pour $i = 1, \dots, I - 1$. Supposons que $\max\{m, n, pq\} = m > 1$ et posons, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$, $Z(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^I hU_i(\tau)d\tau$. Puisque U_h est croissante (Lemme 2.3) alors

$$Z(t) \geq \int_0^t \sum_{i=1}^I h\varphi_{1,i}d\tau = c_0t.$$

On a d'une part (d'après (2.5)-(2.7)), pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \sum_{i=1}^I hU_i(t), \\ Z''(t) &= \sum_{i=1}^I hU'_I(t), \end{aligned}$$

$$Z''(t) \leq 2U'_I(t). \tag{2.24}$$

D'autre part (d'après (2.8)) nous avons, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$Z''(t) = \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h} + 2U_1^m(t) + 2V_1^p(t) + 2U_I^m(t) + 2V_I^p(t),$$

d'après (2.5)-(2.7), on a

$$Z''(t) = \frac{h}{2}U'_1(t) + \frac{h}{2}U'_I(t) + U_1^m(t) + V_1^p(t) + U_I^m(t) + V_I^p(t) \geq U_I^m(t), \tag{2.25}$$

d'où

$$Z''(t) \geq U_I^m(t). \tag{2.26}$$

D'après (2.24) et (2.26) nous avons, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$U'_I(t) \geq \frac{1}{2}U_I^m(t),$$

puis

$$\frac{dU_I(t)}{U_I^m(t)} \geq \frac{1}{2}dt, \tag{2.27}$$

en intégrant l'inégalité (2.27) de 0 à t , nous obtenons

$$\frac{1}{1-m} ((U_I(t))^{1-m} - (U_I(0))^{1-m}) \geq \frac{1}{2}t,$$

ainsi nous obtenons

$$U_I(t) \geq \left((U_I(0))^{1-m} - \frac{m-1}{2}t \right)^{-\frac{1}{m-1}}.$$

Nous pouvons remarquer que $U_I \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \frac{2\|\varphi_{1,h}\|_\infty^{1-m}}{m-1}$ avec $\|\varphi_{1,h}\|_\infty = \varphi_{1,I} = U_I(0)$.

Alors U_h explose en un temps fini T_h avec $T_h \leq \frac{2\|\varphi_{1,h}\|_\infty^{1-m}}{m-1}$.

Supposons que $\max\{m, n, pq\} = pq$.

En considérant (2.25) et le Lemme 2.3, on a, pour tout $t \in [0, T_{h,max}]$,

$$Z''(t) \geq U_1^m(t) + V_1^p(t) + U_I^m(t) + V_I^p(t) \geq V_I^p(t) = \left(\frac{1}{Ih}\right)^p \left(\sum_{i=1}^I hV_i(t)\right)^p.$$

Comme $V_{i+1}(t) \geq V_i(t)$ pour $i = 1, \dots, I-1$, nous obtenons

$$Z''(t) \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^p \left(\sum_{i=1}^I hV_i(t)\right)^p.$$

Définissons pour la suite

$$W(t) = \sum_{i=1}^I hV_i(t).$$

Comme pour la relation (2.25), nous montrons que, pour tout $t \in [0, T_{h,max}]$,

$$W'(t) \geq U_I^q(t) \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \left(\sum_{i=1}^I hU_i(t)\right)^q.$$

Par intégration de l'inégalité ci-dessus de 0 à t , nous obtenons, pour tout $t \in [0, T_{h,max}]$,

$$W(t) - W(0) \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \int_0^t \left(\sum_{i=1}^I hU_i(\tau)\right)^q d\tau,$$

$$W(t) \geq W(0) + \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \int_0^t \left(\sum_{i=1}^I hU_i(\tau)\right)^q d\tau \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \int_0^t \left(\sum_{i=1}^I hU_i(\tau)\right)^q d\tau$$

d'après l'inégalité de Jensen, nous obtenons

$$W(t) \geq \left(\frac{1}{Ih} \right)^q \frac{t}{t^q} \left(\int_0^t \sum_{i=1}^I hU_i(\tau) d\tau \right)^q.$$

Donc, on a, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$Z''(t) \geq (Ih)^{-p(1+p)} t^{p-pq} Z^{pq}(t),$$

comme $Z'(t) > 0$ (d'après le Lemme 2.3), on a

$$Z''(t)Z'(t) \geq (Ih)^{-p(1+p)} t^{p-pq} Z^{pq}(t)Z'(t)\Gamma$$

En intégrant la dernière inégalité de 0 à t , nous obtenons, pour tout $t \in [0, T_{h,max}[$,

$$Z'(t) \geq \left(\frac{2(Ih)^{-p(1+q)}}{pq+1} \right)^{\frac{1}{2}} t^{(p-pq)/2} (Z(t))^{(pq+1)/2}. \quad (2.28)$$

Comme $\max\{m, n, pq\} = pq > 1$, on peut déduire de (2.28) que $Z(t)$ ne peut pas être globale, d'où le résultat souhaité.

Si $\max\{m, n, pq\} = n$; il suffit de poser $Z(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^I hV_i(\tau) d\tau$, $\forall t \in [0, T_{h,max}[$, et comme pour le cas où $\max\{m, n, pq\} = m$, on montre que V_h explose en un temps fini $T_h = T_{h,max}$ avec

$$T_h \leq \frac{2\|\varphi_{2,h}\|_{\infty}^{1-n}}{n-1}.$$

□

Remarque 2.1. En multipliant l'inégalité (2.27) par l'inverse de $U_I^m(t)$ et en intégrant le resultat obtenu sur $[t, T_h]$, nous obtenons, pour tout $t \in [0, T_h[$

$$\frac{1}{m-1} \frac{1}{U_I^{m-1}(t)} \geq \gamma(T_h - t)$$

et il existe une constante $C_{m,1} > 0$ telle que

$$U_I(t) \leq C_{m,1}(T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}, \quad t \in]0, T_h[$$

pour $m > 1$. De même nous montrons que, si $n > 1$ il existe une constante $C_{n,1} > 0$ telle que

$$V_I(t) \leq C_{n,1}(T_h - t)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad t \in]0, T_h[.$$

Maintenant, nous montrons que le temps d'explosion de la solution numérique converge vers celui de la solution du problème continu quand le pas de maillage tend vers zéro.

Théorème 2.5. *Soit (u, v) solution de (2.1)-(2.4) telle que $(u, v) \in (C^{4,1}([0, 1] \times [0, T]))^2$ où T est le temps d'explosion de (u, v) et soit $(U_h(0), V_h(0)) = (\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ la donnée initiale de (2.5)-(2.7) vérifiant*

$$\|U_h(0) - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \|V_h(0) - v_h(0)\|_\infty = o(1) \quad h \rightarrow 0.$$

Sous l'hypothèse du Théorème 2.4, l'unique solution (U_h, V_h) de (2.5)-(2.7) explose en un temps fini T_h et on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Preuve. Nous traitons seulement le cas où $m > 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\frac{y^{1-m}}{\gamma(m-1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \eta \leq y. \tag{2.29}$$

Puisque u explose en un temps fini T , il existe $T_0 \in]T - \frac{\varepsilon}{2}, T[$ tel que $\|u(\cdot, t)\|_\infty \geq 2\eta$ pour $t \in [T_0, T[$. Posons $T_1 = \frac{T_0+T}{2}$, on peut remarquer que

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \|u(\cdot, t)\|_\infty < \infty.$$

Du Théorème 2.2, il suit que pour h assez petit

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq \eta.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(T_1)\|_\infty \geq \|u_h(T_1)\|_\infty - \|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty \geq \eta.$$

Du Théorème 2.4, U_h explose en un temps fini T_h . Nous déduisons de la Remarque 2.1 et (2.29) que

$$|T_h - T| \leq |T_h - T_1| + |T_1 - T| \leq \frac{\|U_h(T_1)\|_\infty^{1-m}}{\gamma(m-1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Les cas où $n > 1$ ou $pq > 1$ sont traités de manière analogue. □

2.5 Explosions simultanée et non simultanée

Dans cette section, nous considérons (U_h, V_h) solution positive de (2.5) - (2.7) avec h fixé, et nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence d'explosions simultanées et non simultanées. D'abord nous commençons par établir un Théorème qui garantit l'explosion simultanée de la solution.

Théorème 2.6. *Si U_h explose et V_h reste bornée, alors $m > q + 1$ (Si V_h explose et U_h reste bornée, alors $n > p + 1$).*

Preuve. Nous prouvons seulement le cas où U_h explose et V_h reste bornée, le second cas se fait de manière analogue.

Rappelons que

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h}(U_I^m(t) + V_I^p(t)), \quad t \in]0, T_h[.$$

Puisque pour $t \in]0, T_h[$, $U_i(t) < U_{i+1}(t)$ (selon le Lemme 2.3), nous avons

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \leq \frac{2}{h}(U_I^m(t) + V_I^p(t)), \quad t \in]0, T_h[.$$

Comme U_h explose et V_h est bornée, alors il existe $C > 0$ et $t_0 \in]0, T_h[$ telles que

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \leq CU_I^m(t), \quad t \in]t_0, T_h[.$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité ci-dessus par l'inverse de $U_I^m(t)$ et par dt , et en intégrant chaque membre de l'inégalité obtenue de t à T_h , nous obtenons

$$U_I(t) \geq K(T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}, \quad t \in]t_0, T_h[, \quad K = (C(m-1))^{-\frac{1}{m-1}}.$$

En considérant la relation (2.6) et l'inégalité ci-dessus

$$V_I'(t) \geq \frac{2V_{I-1}(t) - 2V_I(t)}{h^2} + \frac{2}{h} \left(K^q(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}} + V_I^n(t) \right), \quad t \in]t_0, T_h[.$$

Comme V_h est bornée, il existe une constante C_1 dépendante de h telle que

$$V_I'(t) \geq C_1 + \frac{2K^q}{h}(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}}, \quad t \in]t_0, T_h[.$$

$$V_I'(t) \geq C_1 + C_2(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}}, \quad t \in]t_0, T_h[, \quad \text{avec } C_2 = \frac{2K^q}{h},$$

ainsi en intégrant chaque membre de l'inégalité ci-dessus de t_0 à t , obtenons :

si $1 < m < q + 1$, on a

$$V_I(t) \geq V_I(t_0) + C_1(t - t_0) + C_2 \frac{m-1}{1+q-m} \left((T_h - t)^{\frac{m-1-q}{m-1}} - (T_h - t_0)^{\frac{m-1-q}{m-1}} \right)$$

si $n = q + 1$, on a

$$V_I(t) \geq V_I(t_0) + C_1(t - t_0) - C_2 \ln(T_h - t) + C_2 \ln(T_h - t_0).$$

Nous pouvons observer que les termes de droite des deux inégalités précédente tendent vers $+\infty$ quand t tend vers T_h , ce qui est en contradiction avec le fait que V_h soit bornée et la preuve est terminée. \square

Corollaire 2.1. *Une explosion simultanée se produit si $m \leq q + 1$ et $n \leq p + 1$.*

Dans la suite nous avons les résultats sur l'explosion non simultanée.

Théorème 2.7. *Si $m > q + 1$ et $n \leq 1$, alors U_h explose et V_h reste bornée.*

Preuve. Du Lemme 2.3 $V_i(t) \geq 1$ pour $i = 1, \dots, I$ et $t \in]0, T_h[$. Comme $m > 1$, il résulte du Théorème 2.4 et de la Remarque 2.1 que (U_h, V_h) explose en un temps fini T_h et pour $i = 1 \dots, I$, $t \in]0, T_h[$, $U_i(t) \leq C(T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}$.

Supposons que V_h explose et I un nœud d'explosion . Il existe $K, C > 0$, $t_0 \in]0, T_h[$ telles que

$$V_I'(t) \leq C(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}} + KV_I^n(t), \quad t \in]t_0, T_h[.$$

Nous trouvons alors que, pour tout $t \in]t_0, T_h[$,

$$\begin{aligned} \frac{V_I'(t)}{V_I^n(t)} &\leq \frac{C(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}}}{V_I^n(t)} + K, \\ \frac{V_I'(t)}{V_I^n(t)} &\leq C(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}} + K \quad (\text{car } V_I(t) \geq 1). \end{aligned}$$

Par intégration, on a ,

$$\int_{t_0}^t \frac{V_I'(\tau) d\tau}{V_I^n(\tau)} \leq \int_0^t \left(C(T_h - \tau)^{-\frac{q}{m-1}} + K \right) d\tau,$$

on a donc,

$$V_I(t) \leq \exp \left(\ln(V_I(t_0)) + K_1 T_h^{\frac{m-q-1}{m-1}} + K T_h \right), \quad t \in]t_0, T_h[, \text{ si } n = 1,$$

avec $K_1 = \frac{C(m-1)}{m-q-1}$,

$$V_I(t) \leq \left(V_k^{1-n}(t_0) + K_3 T_h^{\frac{m-q-1}{m-1}} + K_2 T_h \right)^{\frac{1}{1-n}}, \quad t \in]t_0, T_h[, \text{ si } n < 1,$$

avec $K_2 = (1-n)K_1$ et $K_3 = (1-n)K$. Ce qui contredit le fait que V_h explose, et donc la preuve est complète. \square

Nous terminons cette section par le théorème suivant dont la preuve sera omise, car elle se fait de manière similaire à celle du Théorème précédent.

Théorème 2.8. *Si $n > p + 1$ et $m \leq 1$, alors V_h explose et U_h reste bornée.*

2.6 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques approximations numériques du temps d'explosion de la solution de (2.5)-(2.7) pour la donnée initiale $u_0(x) = v_0(x) = x^2$, avec différentes valeurs de m , n , p et q . Soit η la longueur d'arc paramétré M telle que $M(t) = (t, W_h(t))$, $\forall t \in [0, T_h[$ avec

$$W_h = (U_1, \dots, U_I, V_1, \dots, V_I), \text{ et } W_h(0) = (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,I}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,I}).$$

Nous avons

$$\eta(t) = \int_0^t \sqrt{1 + U_1'(\tau)^2 + \dots + U_I'(\tau)^2} d\tau.$$

En considérant les variables t et W_i en fonction de η nous obtenons le système d'EDO suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}}, \\ \frac{dW_i}{d\eta} = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}}, \quad i = 1, \dots, 2I, \\ t(0) = 0, \quad W_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 2I, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

où $0 < \eta < \infty$, et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2U_1^m}{h} + \frac{2V_1^p}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2U_I^m}{h} + \frac{2V_I^p}{h} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{I+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{2I} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2U_1^q}{h} + \frac{2V_1^n}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2U_I^q}{h} + \frac{2V_I^n}{h} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons la proposition suivante

Proposition 2.1. *Soit $(\eta_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie par*

$$\eta_l = k^l s_0, \quad t(\eta_l) = \int_0^{\eta_l} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}} \quad \text{et} \quad \eta_0 > 0, \quad k > 1.$$

Si $\max m, n, pq > 1$, alors la suite $(t(\eta_l))_{l \in \mathbb{N}}$ converge linéairement vers T_h .

Par la même procédure que le chapitre précédent nous appliquons DOP54 au système (2.30) et nous obtenons la suite de temps d'explosion numérique $\{t_l^{(k)}\}_{k=1}^{l+1}$, dont nous accélérons la convergence de cette suite par la méthode d'Aitken Δ^2 . Les résultats obtenus sont donnés dans les tableaux et par les graphiques suivants.

2.6.1 Tableaux

Dans les lignes des tableaux suivants, nous présentons le temps d'explosion numérique T_h , le nombre d'itérations k correspondant à des mailles de 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

2.6.2 Graphiques

I	T_h	N
16	0.20921449	3387
32	0.20392241	5565
64	0.20233346	9865
128	0.20186424	18394
256	0.20172799	35908
512	0.20168904	81837

Tableau 2.1 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 2$, $n = 1/2$, $q = 1/2$, $p = 1$.

I	T_h	N	s
16	0.20921448	5335	-
32	0.20392241	8759	-
64	0.20233346	15466	1.74
128	0.20186424	28570	1.77
256	0.20172799	54688	1.80
512	0.20168904	110499	1.83

Tableau 2.2 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 1/2$, $n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$.

I	T_h	N	s
16	0.21130516	5369	-
32	0.20586441	8793	-
64	0.20423910	15509	1.75
128	0.20376098	28640	1.77
256	0.20362255	54830	1.79
512	0.20358307	111270	1.81
1024	0.0		

Tableau 2.3 – Temps d’explosion numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $m=1/2$, $n=1/2$, $q=2$, $p=2$.



Figure 2.1 – Évolution de U_h et V_h pour $p=1$, $q=1/2$, $m=2$, $n=1/2$.

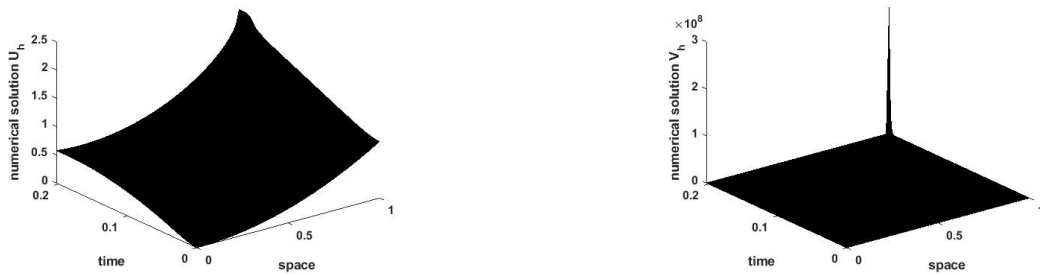


Figure 2.2 – Sur la gauche, évolution de U_h et Sur droite, évolution de V_h pour $p=1/2$, $q=1$, $m=1/2$, $n=2$.

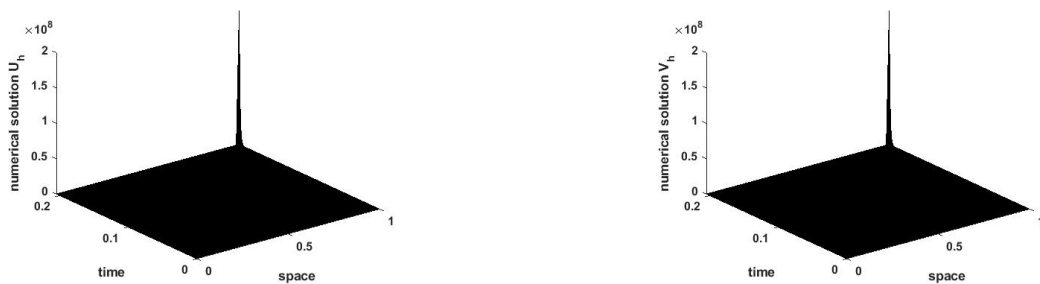


Figure 2.3 – Sur la gauche, évolution de U_h et Sur droite, évolution de V_h pour $p=q=2$, $m=1/2$, $n=1/2$.

Remarque 2.2. Si nous considérons le problème (2.5) -(2.7) dans le cas où la paire fonctions de distributions initiales des températures pour le problème (2.1)-(2.4) est donnée par $(u_0(x), v_0(x)) = (x^2, x^2)$, des figures 2.1 à 2.3, nous observons respectivement l'explosion de (u, v) lorsque les paramètres de réactions vérifient les inégalités suivantes : $m > 1$, $n > 1$ et $pq > 1$. Dans les tableaux 2.1 à 2.3, nous observons la convergence du temps d'explosion T_h de la solution de (2.5) - (2.7). Ce résultat ne nous surprend pas à cause des résultats établis dans les sections précédentes. De plus, nous pouvons voir de la figure 2.1 que u explose alors que v reste bornée lorsque les paramètres de réactions vérifient $m > q + 1$ et $n \leq 1$, de la figure 2.2, u reste bornée tandis que v explose lorsque $n < p + 1$ et $m \leq 1$. De la figure 2.3, u et v explosent simultanément lorsque $n \leq p + 1$ et $m \leq q + 1$. Nous pouvons donc contrôler l'explosion de la solution (u, v) par les paramètres de réactions m , n , p et q .

Chapitre 3

EXTINCTION NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME D'EDP PARABOLIQUES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COUPLÉES NON LINÉAIRES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons les équations de chaleur de la forme

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad v_t(x, t) = v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \quad (3.1)$$

$$u_x(0, t) = u^{-m}(0, t) + v^{-p}(0, t), \quad v_x(0, t) = u^{-q}(0, t) + v^{-n}(0, t), \quad t \in]0, T[, \quad (3.2)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.4)$$

où $m, n \geq 0$, $p, q > 0$, u_0 et v_0 sont des fonctions positives, lisses satisfaisant les conditions de compatibilité $u'_0(0) = u_0^{-m}(0) + v_0^{-p}(0)$, $v'_0(0) = u_0^{-q}(0) + v_0^{-n}(0)$, $u'_0(1) = 0$, $v'_0(1) = 0$, et $u'_0, v'_0 \geq 0$ et $u''_0, v''_0 < 0$ sur $]0, 1[$.

Ici $[0, T[$ est l'intervalle de temps maximal tel que u et v sont strictement positives pour tout $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T[$ et

$$\liminf_{t \rightarrow T^-} \min_{0 \leq x \leq 1} \{u(x, t), v(x, t)\} = 0^+.$$

Quand T est fini, nous disons que la solution (u, v) s'éteint en un temps fini et T est appelé le temps d'extinction de (u, v) . Par contre si T est infini, nous disons que (u, v) s'éteint globalement.

La théorie classique des équations aux dérivées partielles paraboliques fournit également des résultats d'existence locale de solution régulière du problème (3.1)-(3.4), notamment celle de Ladyzenskaja, Solonnikov, Ural'ceva [43]. Pour la question d'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.4) nous nous référons au Théorème 3.12. Les phénomènes d'extinction des systèmes paraboliques ont été largement étudiés (voir [26], [33], [62],[64]). Dans [33], les auteurs étudient ce problème. Ils prouvent que la solution (u, v) s'éteint en un temps fini T pour une donnée initiale sous-solution de (3.1)-(3.4) telle que $0 < u_0, v_0 \leq 1$ et le point $x = 0$ est le seul point d'extinction. Ils montrent aussi que

- si $p < n + 1$, il existe une donnée initiale telle que l'extinction non-simultanée ait lieu ;
- si $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ et $p \geq n + 1$ ($p \leq \frac{m(n+1)}{m+1}$ et $q \geq m + 1$), l'extinction non-simultanée se produit pour chaque donnée initiale positive ;
- si $q \geq m + 1$, $p \geq n + 1$, chaque extinction doit être simultanée.

Dans ce chapitre, nous notons $(u, v) \in (\mathcal{C}([0, 1] \times [0, T]) \cap \mathcal{C}^{4,1}([0, 1] \times]0, T])^2$ la solution de (3.1)-(3.4) pour la donnée initiale (u_0, v_0) et nous nous investissons dans l'étude numérique d'une forme semi-discrète associée à (3.1)-(3.4) obtenue en utilisant le même principe de discrétisation dans la section 1.3 du chapitre 1, qui est la forme suivante

$$U_i'(t) = \delta^2 U_i(t) - b_i (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad (3.5)$$

$$V_i'(t) = \delta^2 V_i(t) - b_i (U_i^{-q}(t) + V_i^{-n}(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad (3.6)$$

$$U_i(0) = \varphi_{1,i} \quad V_i(0) = \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (3.7)$$

où $U_h(t) = (U_1(t), \dots, U_I(t))^T$, $V_h(t) = (V_1(t), \dots, V_I(t))^T$. $U_i(t)$ et $V_i(t)$ sont les valeurs d'une approximation numérique de u et v au nœud x_i et au temps t . Et $\varphi_{1,i}$, $\varphi_{2,i}$, respectivement, les valeurs d'une approximation numérique de u_0 et v_0 au nœud x_i . Ici nous posons que

$$0 < \varphi_{1,i} \leq M, \quad 0 < \varphi_{2,i} \leq N, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\begin{aligned} \delta^2 U_i(t) &= \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-1, \\ \delta^2 U_1(t) &= \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}, \\ b_1 &= \frac{2}{h}, \quad \text{et } b_i = 0, \quad i = 2, \dots, I. \end{aligned}$$

Nous montrons que le schéma semi-discret reproduit bien les conditions d’extinctions simultanée et non-simultanée du problème continu. Le reste du chapitre est organisé comme suit : dans la section suivante nous prouvons que le schéma numérique admet une unique solution et dans la section 3.3 nous donnons les propriétés qualitatives de la solution de (3.5)-(3.7). Dans la section 3.4, sous certaines conditions nous montrons que la solution numérique s’éteint en un temps fini et nous donnons quelques résultats sur le point d’extinction. Nous montrons aussi que la dérivée par rapport au temps de notre solution semi-discrète explose au temps et au nœud d’extinction. Dans la section 3.5, nous identifions les critères d’extinctions simultanée et non-simultanée. Dans la section 3.6, nous montrons la convergence de la solution numérique vers celle du problème continu et aussi la convergence du temps d’extinction de la solution semi-discrète vers celui de la solution du problème continu (3.1)-(3.4), quand le pas de maillage tend vers zéro. Finalement, dans la dernière section nous donnons quelques résultats numériques qui illustrent nos analyses.

3.2 Existence et unicité de la solution du problème semi-discret en espace (3.5)-(3.7)

Dans cette section, nous prouvons l’existence et l’unicité de la solution du problème semi-discret en espace (3.5)-(3.7).

Théorème 3.1. (*Existence et unicité*) *Pour chaque pas de discrétisation h fixé, le problème semi-discret en espace (3.5)-(3.7) admet une unique solution maximale $([0, T_{h,max}[, (U_h(\cdot), V_h(\cdot)))$, où $[0, T_{h,max}[$ désigne l’intervalle maximal d’existence de la solution (U_h, V_h) .*

Preuve. En considérant le problème (3.5)-(3.7). Nous avons

$$\begin{cases} \frac{dX_h(t)}{dt} = F(X_h(t)), \\ X_h(t_0) = X_h^0, \end{cases} \quad (3.8)$$

où $X_h^0 = (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,I}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,I})$ et $t_0 = 0$. F fonction de la variable $X_h(t) = (X_1(t), \dots, X_{2I}(t))^T$

définie sur \mathbb{R}^{2I} par $F(X_h(t)) = (F_1(X_h(t), \dots, F_{2I}(X_h(t))))^T$ avec

$$\begin{aligned} F_1(X_h(t)) &= \frac{2X_2(t) - 2X_1(t)}{h^2} + \frac{2(X_1^{-m}(t) + X_{I+1}^{-p}(t))}{h} \\ F_i(X_h(t)) &= \frac{X_{i-1}(t) - 2X_i(t) + X_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i \in \{2, \dots, I-1, I+2, \dots, 2I-1\} \\ F_I(X_h(t)) &= \frac{2X_{I-1}(t) - 2X_I(t)}{h^2}, \\ F_{I+1}(X_h(t)) &= \frac{2X_{I+2}(t) - 2X_{I+1}(t)}{h^2} + \frac{2(X_1^{-q}(t) + X_{I+1}^{-n}(t))}{h}, \\ F_{2I}(X_h(t)) &= \frac{2X_{2I-1}(t) - 2X_{2I}(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{2I} . D'après le Théorème 3.14 le problème (3.8) admet une unique solution $([0, T_{h,max}[, X_h(\cdot))$. En posant $U_i(t) = X_i(t)$ et $V_i(t) = X_{I+i}(t)$, pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, et $t \in [0, T_{h,max}[$, le problème (3.5)-(3.7) admet une unique solution $([0, T_{h,max}[, (U_h(\cdot), V_h(\cdot)))$.

3.3 Propriétés qualitatives de la solution du problème (3.5)-(3.7)

Dans cette partie, par des méthodes similaires à celles du chapitre 2, nous présentons quelques résultats auxiliaires du problème (2.5)-(2.7) mais avant, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution de notre problème semi-discret.

Dans cette section, nous donnons quelques résultats auxiliaires pour le problème (3.5)-(3.7).

Définition 3.1. *Nous disons que $(\underline{U}_h, \underline{V}_h) \in (C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I))^2$ est une sous-solution (3.5)-(3.7) si*

$$\begin{aligned} \underline{U}'_i(t) &\leq \delta^2 \underline{U}_i(t) - b_i(\underline{U}_i^{-m}(t) + \underline{V}_i^{-p}(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ \underline{V}'_i(t) &\leq \delta^2 \underline{V}_i(t) - b_i(\underline{U}_i^{-q}(t) + \underline{V}_i^{-n}(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ 0 &< \underline{U}_i(0) \leq \varphi_{1,i}, \quad 0 < \underline{V}_i(0) \leq \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

où (U_h, V_h) est la solution de (3.5)-(3.7). De plus, nous disons que $(\overline{U}_h, \overline{V}_h) \in (C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I))^2$ est une sur solution de (3.5)-(3.7) si les inégalités sont inverses.

Le Lemme suivant est la forme discrète du principe du maximum.

Lemme 3.1. *Soient $e_h, c_h, \alpha_h, \beta_h \in (C^0([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I))$ et $U_h, V_h \in C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I)$ telles*

que

$$\begin{aligned} U'_i(t) - \delta^2 U_i(t) + e_i(t)U_i(t) + c_i(t)V_i(t) &\geq 0, \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ V'_i(t) - \delta^2 V_i(t) + \alpha_i(t)U_i(t) + \beta_i(t)V_i(t) &\geq 0, \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ U_i(0) &\geq 0, \quad V_i(0) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I. \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$U_i(t) \geq 0, \quad V_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[.$$

Preuve. Soit $T_0 < T_{h,max}$ et soit $(Z_h(t), W_h(t)) = (e^{\lambda t}U_h(t), e^{\lambda t}V_h(t))$ où λ est un réel. Nous trouvons que $(Z_h(t), W_h(t))$ satisfait les inégalités suivantes :

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + (e_i(t) - \lambda)Z_i(t) + c_i(t)W_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \quad (3.9)$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) + \alpha_i(t)Z_i(t) + (\beta_i(t) - \lambda)W_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \quad (3.10)$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad W_i(0) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I. \quad (3.11)$$

Posons $m = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} Z_i(t), \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} W_i(t) \right\}$. Puisque pour $i \in \{0, \dots, I\}$, Z_i et W_i sont continues sur le compact $[0, T_0]$, nous pouvons supposer que $m = Z_{i_0}(t_{i_0})$ pour un certain $i_0 \in \{0, \dots, I\}$.

Supposons que $m < 0$.

Prenons λ un réel négatif assez petit tel que

$$(e_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda) Z_{i_0}(t_{i_0}) + c_{i_0}(t_{i_0})W_{i_0}(t_{i_0}) < 0.$$

Si $t_{i_0} = 0$, alors $Z_{i_0}(0) < 0$, ce qui contredit (3.11), Donc $t_{i_0} \neq 0$;

si $1 \leq i_0 \leq I$, nous avons

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_{i_0}) - Z_{i_0}(t_{i_0} - k)}{k} \leq 0.$$

De plus, par un simple calcul nous obtenons

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) - \delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) + (e_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda) Z_{i_0}(t_{i_0}) + c_{i_0}(t_{i_0})W_{i_0}(t_{i_0}) < 0,$$

mais cette inégalité contredit (3.9) et la preuve est complète. \square

Lemme 3.2. Soient $(\underline{U}_h, \underline{V}_h)$ et $(\overline{U}_h, \overline{V}_h)$ des sous et sur-solutions respectivement de (3.5)-(3.7)

telles que, $(\underline{U}_h(0), \underline{V}_h(0)) \leq (\overline{U}_h(0), \overline{V}_h(0))$ alors

$$(\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t)) \leq (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)).$$

Preuve. Définissons $(Z_h(t), W_h(t)) = (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)) - (\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t))$. Nous obtenons

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) - mb_i(\mu_i(t))^{-m-1} Z_i(t) - pb_i(\nu_i(t))^{-p-1} W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \quad (3.12)$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) - qb_i(\mu_i(t))^{-q-1} Z_i(t) - nb_i(\nu_i(t))^{-n-1} W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \quad (3.13)$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad W_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \quad (3.14)$$

où $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$ pris respectivement, entre $\underline{U}_i(t)$ et $\overline{U}_i(t)$, et entre $\underline{V}_i(t)$ et $\overline{V}_i(t)$, pour $i \in \{1, \dots, I\}$.

Nous pouvons réécrire (3.12)-(3.13) comme

$$\begin{aligned} Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + e_i(t)Z_i(t) + c_i(t)W_i(t) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \\ W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) + \alpha_i(t)Z_i(t) + \beta_i(t)W_i(t) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_{h,max}[, \end{aligned}$$

où $e_i(t) = -mb_i(\mu_i(t))^{-m-1}$, $c_i(t) = -pb_i(\nu_i(t))^{-p-1}$, $\alpha_i(t) = -qb_i(\mu_i(t))^{-q-1}$, et $\beta_i(t) = -nb_i(\nu_i(t))^{-n-1}$ $i = 1, \dots, I$, $\forall t \in]0, T_{h,max}[$. Selon le Lemme 3.1, $Z_i(t) \geq 0$, $W_i(t) \geq 0$, pour $i = 1, \dots, I$, $t \in [0, T_{h,max}[$ et la preuve est complète. \square

Le Lemme suivant nous donne quelques propriétés de la solution semi-discrète.

Lemme 3.3. Soit $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T_{h,max}[, \mathbb{R}^I])^2$ la solution (3.5)-(3.7) avec une donnée initiale $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ sur-solution telle que $0 < \varphi_{1,i} < \varphi_{1,i+1} \leq M$ et $0 < \varphi_{2,i} < \varphi_{2,i+1} \leq N$ pour $i = 1, \dots, I-1$ où M et N sont des constantes strictements positives. Alors, nous avons

- (i) $0 < U_i(t) \leq \varphi_{1,i} \leq M$ et $0 < V_i(t) \leq \varphi_{2,i} \leq N$, pour $i = 1, \dots, I$, $t \in [0, T_{h,max}[$;
- (ii) $(U_{i+1}(t), V_{i+1}(t)) > (U_i(t), V_i(t))$, $i = 1, \dots, I-1$, $t \in [0, T_{h,max}[$;
- (iii) $(U'_i(t), V'_i(t)) \leq 0$, $i = 1, \dots, I$, $t \in]0, T_{h,max}[$.

Preuve.

- (i) Puisque $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ est une sur-solution de (3.5)-(3.7), par le Lemme 3.1 et 3.2 nous avons $0 < U_i(t) \leq \varphi_{1,i} \leq M$ et $0 < V_i(t) \leq \varphi_{2,i} \leq N$, pour $i = 1, \dots, I$, $t \in [0, T_{h,max}[$.
- (ii) Ici nous argumentons par contradiction. Supposons, que t_0 le premier temps $t > 0$, tel que $(K_i, L_i)(t) = (U_{i+1} - U_i, V_{i+1} - V_i)(t) > 0$, pour $1 \leq i \leq I-1$, mais $\min\{K_{i_0}(t_0), L_{i_0}(t_0)\} = 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, I-1\}$. Supposons que $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$.

Sans perte de généralité, nous supposons que i_0 est un petit entier pour lequel l'inégalité ci-dessus est satisfaite. On a

$$\begin{aligned}
 K'_1(t) &= \frac{U_3(t) - 2U_2(t) + U_1(t)}{h^2} - \left(\frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} - \frac{2}{h}(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) \right) \\
 K'_i(t) &= \frac{U_{i+2}(t) - 2U_{i+1}(t) + U_i(t)}{h^2} - \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-2 \\
 K'_{I-1}(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} - \frac{U_I(t) - 2U_{I-1}(t) + U_{I-2}(t)}{h^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 K'_1(t) = \frac{K_2(t) - 3K_1(t)}{h^2} + \frac{2}{h}(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) \\
 K'_i(t) = \frac{K_{i+1}(t) - 2K_i(t) + K_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-2 \\
 K'_{I-1}(t) = \frac{K_{I-2}(t) - 3K_{I-1}(t)}{h^2}
 \end{cases} \quad (3.15)$$

Selon les hypothèses sur t_0 , nous avons les inégalités suivantes :

$$K'_{i_0}(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_{i_0}(t_0) - K_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0,$$

$$\frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } 2 \leq i_0 \leq I-2,$$

$$\frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = 1,$$

$$\frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0 \quad \text{si } i_0 = I-1,$$

ce qui implique que,

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} < 0 \quad \text{si } 2 \leq i_0 \leq I-2,$$

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} - \frac{2}{h}(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) < 0 \quad \text{si } i_0 = 1,$$

$$K'_{i_0}(t_0) - \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} < 0 \quad \text{si } i_0 = I-1.$$

Ainsi, nous avons une contradiction avec 3.15, ce qui entraîne le résultat désiré.

(iii) Notons $F_i(t) = U_i(t) - U_i(t + \varepsilon)$ et $G_i(t) = V_i(t) - V_i(t + \varepsilon)$, pour $i = 1, \dots, I$, en utilisant

(i) nous obtenons $F_i(0) \geq 0$, $G_i(0) \geq 0$ pour $i = 1, \dots, I$. Il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{aligned} F_i'(t) - \delta^2 F_i(t) + mb_i(\xi_i(t))^{-m-1} F_i(t) + pb_i(\eta_i(t))^{-p-1} G_i(t) &\geq 0, \\ G_i'(t) - \delta^2 G_i(t) + qb_i(\xi_i(t))^{-q-1} F_i(t) + nb_i(\eta_i(t))^{-n-1} G_i(t) &\geq 0, \end{aligned}$$

où $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ pris respectivement, entre $U_i(t + \varepsilon)$ et $U_i(t)$ et entre $V_i(t + \varepsilon)$ et $V_i(t)$. Du Lemme 3.1 nous obtenons

$$F_i(t) \geq 0 \text{ et } G_i(t) \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, I, t \in [0, T_{h,max}].$$

Ce fait implique le résultat souhaité. □

3.4 Extinction de la solution de (3.5)-(3.7)

Soit (U_h, V_h) la solution de (3.5)-(3.7) avec $0 < \varphi_{1,i} \leq M$, $0 < \varphi_{1,i} \leq N$ pour $i = 1, \dots, I$. Nous commençons cette section par la définition suivante

Définition 3.2. La solution (U_h, V_h) de (3.5)-(3.7) s'éteint en un temps, s'il existe un temps fini $T_h > 0$ tel que $U_i(t)$ et $V_i(t)$ sont strictement positives pour $i = 1, \dots, I$, $t \in [0, T_h[$ et

$$\liminf_{t \rightarrow T_h^-} \min_{1 \leq i \leq I} \{U_i(t), V_i(t)\} = 0^+.$$

T_h est appelé le temps d'extinction de (U_h, V_h) .

Si T_h existe et $\lim_{t \rightarrow T_h^-} \min_{1 \leq i \leq I} \{U_i'(t), V_i'(t)\} = \infty$, alors $T_h = T_{h,max}$.

Inspiré par [15, 33] nous prouvons que (U_h, V_h) s'éteint en un temps fini et (U_h', V_h') explose au nœud d'extinction.

Théorème 3.2. La solution (U_h, V_h) de (3.5)-(3.7) s'éteint en un temps fini T_h seulement au nœud $i = 1$

Preuve. En intégrant (3.5) de 0 à t nous obtenons

$$U_i(t) - U_i(0) = \int_0^t \delta^2 U_i(\tau) - b_i(U_i^{-m}(\tau) + V_i^{-p}(\tau)) d\tau, i = 1, \dots, I,$$

en multipliant les inégalités ci-dessus par h et les sommant, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^I h U_i(t) = \sum_{i=1}^I h U_i(0) + \int_0^t \frac{U_{I-1}(\tau) - U_I(\tau)}{h} + \frac{U_2(\tau) - U_1(\tau)}{h} - 2(U_1^{-m}(\tau) + V_1^{-p}(\tau)) d\tau.$$

De (3.5) nous avons

$$\frac{h}{2}U_I(t) - \frac{h}{2}U_I(0) = \int_0^t \frac{U_{I-1}(\tau) - U_I(\tau)}{h} d\tau,$$

et

$$\frac{h}{2}U_1(t) - \frac{h}{2}U_1(0) = \int_0^t \frac{U_2(\tau) - U_1(\tau)}{h} - (U_1^{-m}(\tau) + V_1^{-p}(\tau)) d\tau.$$

Ainsi

$$\frac{h}{2}U_I(t) + \sum_{i=2}^{I-1} hU_i(t) + \frac{h}{2}U_1(t) = \frac{h}{2}U_I(0) + \sum_{i=2}^{I-1} hU_i(0) + \frac{h}{2}U_1(0) - \int_0^t U_1^{-m}(\tau) + V_1^{-p}(\tau) d\tau,$$

par conséquent

$$\frac{h}{2}U_I(t) + \sum_{i=2}^{I-1} hU_i(t) + \frac{h}{2}U_1(t) \leq M - (M^{-m} + N^{-p})t.$$

En procédant comme précédemment, nous obtenons

$$\frac{h}{2}V_I(t) + \sum_{i=2}^{I-1} hV_i(t) + \frac{h}{2}V_1(t) \leq N - (M^{-q} + N^{-n})t,$$

ce qui est une contradiction car $U_h(t)$ et $V_h(t)$ sont positives pour tout $t \in [0, T_h[$. Alors il existe $0 < T_h < \infty$ tel que

$$\liminf_{t \rightarrow T_h^-} \min\{U_1(t), V_1(t)\} = 0^+.$$

Maintenant nous montrons que $i = 1$ est l'unique nœud d'extinction. Dans tout ce qui suit, nous prenons $i \in \{1, \dots, I-1\}$ et $t \in]0, T_h[$. Posons $g(U_i(t)) = U_i^{-m}(t)$, $f(V_i(t)) = V_i^{-p}(t)$, $d(U_i(t)) = U_i^{-q}(t)$, $j(V_i(t)) = V_i^{-n}(t)$, et

$$Z_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} - \phi_i(g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \quad (3.16)$$

$$W_i(t) = \frac{V_{i+1}(t) - V_i(t)}{h} - \phi_i(d(U_i(t)) + j(V_i(t))) \quad (3.17)$$

où $\phi_i, \delta^2\phi_i \geq 0$, $\delta^+\phi_i \leq 0$, $\phi_I = 0$, $\phi_1 = 1$, $\phi_i(g(U_i(0)) + f(V_i(0))) \leq \delta^+U_i(0)$ et $\phi_i(d(U_i(0)) + j(V_i(0))) \leq \delta^+V_i(0)$.

Soient k et $J = (J_1, \dots, J_I)$ telles que $k(s) = s^{-m_2}$, $s > 0$, $m_2 > 0$ et $J_i, \delta^+J_i(t)$ sont positives.

En utilisant un développement limité de type Taylor à l'ordre 2, nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta^2(\phi_i k(J_i(t))) &= \phi_i k'(J_i(t))\delta^2 J_i(t) + k(J_i(t))\delta^2 \phi_i + k'(J_i(t))\delta^+ \phi_i \delta^+ J_i(t) + k'(J_i(t))\delta^- \phi_i \delta^- J_i(t) \\ &\quad + \phi_i \frac{(\delta^+ J_i(t))^2}{2} k''(\rho_i(t)) + \phi_i \frac{(\delta^- J_i(t))^2}{2} k''(\lambda_i(t)), \quad i = 2, \dots, I-1, \\ \delta^2(\phi_1 k(J_1(t))) &= \phi_1 k'(J_1(t))\delta^2 J_1(t) + k(J_1(t))\delta^2 \phi_1 + 2k'(J_1(t))\delta^+ \phi_1 \delta^+ J_1(t) \\ &\quad + \phi_1 (\delta^+ J_1(t))^2 k''(\rho_1(t)).\end{aligned}$$

En considérant les hypothèses sur ϕ_i , k et J_i , nous arrivons à

$$\delta^2(\phi_i k(J_i(t))) \geq \phi_i k'(J_i(t))\delta^2 J_i(t), \quad i = 1, \dots, I-1. \quad (3.18)$$

En utilisant (3.18) nous arrivons à l'inégalité ci-dessous

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) \geq \frac{b_i}{h} (g(U_i) + f(V_i)) + b_i \phi_i g'(U_i) (g(U_i) + f(V_i)) + b_i \phi_i f'(U_i) (d(U_i) + j(V_i)).$$

Les inégalités ci-dessus impliquent l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i g'(U_i(t)) Z_i(t) + b_i f'(V_i(t)) W_i(t) &\geq b_i \left[\frac{1}{h} (g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \right. \\ &\quad \left. + f'(U_i(t)) (d(U_i(t)) + j(V_i(t))) + g'(U_i(t)) (g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \right].\end{aligned}$$

Pour le paramètre h assez petit nous obtenons

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i g'(U_i(t)) Z_i(t) + b_i f'(V_i(t)) W_i(t) \geq 0.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i g'(U_i(t)) Z_i(t) + b_i f'(V_i(t)) W_i(t) &\geq 0, \\ W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) + b_i d'(U_i(t)) Z_i(t) + b_i j'(V_i(t)) W_i(t) &\geq 0, \\ Z_i(0) \geq 0, W_i(0) &\geq 0.\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.1 nous aboutissons au fait que $Z_i(t) \geq 0$ et $W_i(t) \geq 0$, pour $i = 1, \dots, I-1$ et $t \in]0, T_h[$, ceux-ci impliquent que

$$\frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} \geq \phi_i (g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M^m} + \frac{1}{N^p} \right)$$

pour $i = 1, \dots, J$, avec $\phi_J = \frac{1}{2}$, où $J \in \{2, \dots, I-1\}$. Ainsi par sommation des $i-1$ ($i > 1$)

premiers termes des inégalités ci-dessus, nous obtenons

$$U_i(t) \geq U_1 + \frac{(i-1)h}{2} \left(\frac{1}{M^m} + \frac{1}{N^p} \right) \geq \frac{(i-1)h}{2} \left(\frac{1}{M^m} + \frac{1}{N^p} \right) \text{ avec } i > 1.$$

La même chose peut être faite pour V_h . □

Théorème 3.3. *Si $\lim_{t \rightarrow T_h^-} U_1(t) = 0^+$ $\left(\lim_{t \rightarrow T_h^-} V_1(t) = 0^+ \right)$, alors $U'_h(t)$ explose ($V'_h(t)$ explose).*

Preuve. Supposons que $U'_h(t)$ est bornée. Alors, il existe une constante non positive M telle que $U'_h(t) > M$. Nous avons

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 U'_j(t) > \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 M.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 M &= \sum_{i=1}^{I-1} i h^2 M \\ &= \frac{M}{2} + \frac{hM}{2}. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 U'_j(t) = \sum_{i=1}^{I-1} \left(\sum_{j=2}^i h^2 (U'_j(t)) + h^2 U'_1(t) \right)$$

De (3.5) nous arrivons à

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 U'_j(t) = U_I(t) - U_1(t) - (V_1^{-p}(t) + U_1^{-m}(t)) + \frac{h}{2} U'_1(t)$$

et du Lemme 3.3 nous arrivons à

$$U_I(t) - U_1(t) - (V_1(t)^{-p} + U_1(t)^{-m}) > \frac{M}{2} + hM.$$

Comme $t \rightarrow T_h^-$, le côté gauche de l'inégalité ci-dessus tend vers $-\infty$ tandis que le côté droit est borné. Cette contradiction montre que U'_h explose. □

D'après la Définition 3.5, les Théorèmes 3.1 et 3.3, nous pouvons affirmer que $T_h = T_{h,max}$.

3.5 Extinctions simultanée et non simultanée

Dans cette section, nous travaillons dans l'intervalle $[0, T_h[$ et nous considérons (U_h, V_h) solution de (3.5)-(3.7) avec h fixé et nous donnons des conditions pour l'extinction simultanée et l'extinction non simultanée.

Théorème 3.4. *Si U_h s'éteint et V_h ne s'éteint pas (3.5)-(3.7) alors $q < m + 1$ (Si V_h s'éteint et U_h ne s'éteint pas (3.5)-(3.7) alors $p < n + 1$).*

Preuve. Comme V_h ne s'éteint pas, par l'équation (3.5) il existe une constante $c > 0$ telle que

$$U_1'(t) \geq -cU_1^{-m}(t),$$

en intégrant cette inégalité de t à T_h , nous obtenons

$$U_1(t) \leq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}}, \text{ où } C = ((m + 1)c)^{1/(m+1)}. \quad (3.19)$$

En utilisant (3.19) et (3.6), nous obtenons

$$V_1'(t) \leq \delta^2 V_1(t) - b_1 \left(V_1^{-n}(t) + C(T_h - t)^{-\frac{q}{m+1}} \right).$$

Ainsi $V_1(T_h) \leq C_1 - C \int_0^{T_h} (T_h - t)^{-\frac{q}{m+1}} dt$. Nous pouvons voir que cette intégrale diverge si $q \geq m + 1$, ce qui est une contradiction et la preuve est complète. \square

Corollaire 3.1. *L'extinction simultanée a lieu si $q \geq m + 1$, $p \geq n + 1$.*

Lemme 3.4. *Supposons que U_h s'éteint en un temps fini T_h (V_h s'éteint en un temps fini T_h) et*

$$\delta^2 \varphi_{1,i} - b_i (\varphi_{1,i}^{-m} + \varphi_{2,i}^{-p}) + c (\varphi_{1,i}^{-m} + \varphi_{2,i}^{-p}) \leq 0, \quad (3.20)$$

$$\delta^2 \varphi_{2,i} - b_i (\varphi_{1,i}^{-q} + \varphi_{2,i}^{-n}) + c (\varphi_{1,i}^{-q} + \varphi_{2,i}^{-n}) \leq 0. \quad (3.21)$$

Alors il existe une constante strictement positive C telle que pour $t \in]0, T_h[$

$$\begin{aligned} \frac{U_1(t)^{m+1}}{C(m+1)} &\geq T_h - t \quad \left(\frac{V_1(t)^{n+1}}{C(n+1)} \geq T_h - t \right), \\ U_1(t) &\geq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}} \quad \left(V_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Preuve. Posons pour $i = 1, \dots, I$, $t \in]0, T_h[$,

$$Z_i(t) = U_i'(t) + c (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)) \text{ et } W_i(t) = V_i'(t) + c (U_i^{-q}(t) + V_i^{-n}(t)),$$

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} - \frac{2}{h} (U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) + c (U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) \\
Z_i(t) &= \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2} + c (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)) \\
Z_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + c (U_I^{-m}(t) + V_I^{-p}(t)),
\end{aligned}$$

on a d'une part

$$\begin{aligned}
Z'_1(t) &= \frac{2U'_2(t) - 2U'_1(t)}{h^2} + \frac{2}{h} (mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t)) \\
&\quad - c (mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t)) \\
Z'_i(t) &= \frac{U'_{i+1}(t) - 2U'_i(t) + U'_{i-1}(t)}{h^2} - c (mU_i^{-m-1}(t)U'_i(t) + pV_i^{-p-1}(t)V'_i(t)), \quad i = 2, I-1, \\
Z'_I(t) &= \frac{2U'_{I-1}(t) - 2U'_I(t)}{h^2} - c (mU_I^{-m-1}(t)U'_I(t) + pV_I^{-p-1}(t)V'_I(t)),
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{2Z_2(t) - 2Z_1(t)}{h^2} &= \frac{2U'_2(t) - 2U'_1(t)}{h^2} + c \left(\frac{2(U_2^{-m}(t) + V_2^{-p}(t)) - 2(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t))}{h^2} \right) \\
\frac{Z_{i+1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i-1}(t)}{h^2} &= \frac{U'_{i+1}(t) - 2U'_i(t) + U'_{i-1}(t)}{h^2} \\
&\quad + c \frac{U_{i+1}^{-m}(t) + V_{i+1}^{-p}(t) - 2(U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)) + U_{i-1}^{-m}(t) + V_{i-1}^{-p}(t)}{h^2} \\
\frac{2Z_{I-1}(t) - 2Z_I(t)}{h^2} &= \frac{2U'_{I-1}(t) - 2U'_I(t)}{h^2} + c \frac{2U_{I-1}^{-m}(t) + 2V_{I-1}^{-p}(t) - 2U_I^{-m}(t) - 2V_I^{-p}(t)}{h^2},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\delta^2 Z_1(t) &= \frac{2U'_2(t) - 2U'_1(t)}{h^2} + c\delta^2 (U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) \\
\delta^2 Z_i(t) &= \frac{U'_{i+1}(t) - 2U'_i(t) + U'_{i-1}(t)}{h^2} + c\delta^2 (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)) \\
\delta^2 Z_I(t) &= \frac{2U'_{I-1}(t) - 2U'_I(t)}{h^2} + c\delta^2 (U_I^{-m}(t) + V_I^{-p}(t)),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) &= \frac{2}{h} (mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t)) \\
&\quad - c\delta^2 mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t) - c\delta^2 (U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) \\
Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) &= -c (mU_i^{-m-1}(t)U'_i(t) + pV_i^{-p-1}(t)V'_i(t)) - c\delta^2 (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)) \\
Z'_I(t) - \delta^2 Z_I(t) &= -c (mU_I^{-m-1}(t)U'_I(t) + pV_I^{-p-1}(t)V'_I(t)) \\
&\quad - c\delta^2 (U_I^{-m}(t) + V_I^{-p}(t)).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.7, nous avons, pour $t \in]0, T_h[$,

$$\begin{aligned}
Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) &\leq \frac{2}{h} (mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t)) \\
&\quad - c\delta^2 mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t) \\
&\quad + c(mU_1^{-m-1}(t)\delta^2 U_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)\delta^2 V_1(t)) \\
Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) &\leq -c (mU_i^{-m-1}(t)U'_i(t) + pV_i^{-p-1}(t)V'_i(t)) \\
&\quad + c\delta^2 (mU_i^{-m-1}(t)U'_i(t) + pV_i^{-p-1}(t)V'_i(t)), \quad i = 2, \dots, I-1, \\
Z'_I(t) - \delta^2 Z_I(t) &\leq -c (mU_I^{-m-1}(t)U'_I(t) + pV_I^{-p-1}(t)V'_I(t)) \\
&\quad + c\delta^2 (mU_I^{-m-1}(t)\delta^2 U_I(t) + pV_I^{-p-1}(t)\delta^2 V_I(t)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) &\leq \frac{2}{h} (mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t)) \\
&\quad - c\delta^2 mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t) \\
&\quad + c(mU_1^{-m-1}(t)\delta^2 U_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)\delta^2 V_1(t)) \\
Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) &\leq -c (mU_i^{-m-1}(t)(U'_i(t) - \delta^2 U_i(t)) + pV_i^{-p-1}(t)(V'_i(t) - \delta^2 V_i(t))) \\
Z'_I(t) - \delta^2 Z_I(t) &\leq -c (mU_I^{-m-1}(t)(U'_I(t) - \delta^2 U_I(t)) + pV_I^{-p-1}(t)(V'_I(t) - \delta^2 V_I(t))).
\end{aligned}$$

D'après (3.5)-(3.6), pour $t \in]0, T_h[$,

$$\begin{aligned}
Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) &\leq \frac{2}{h} (mU_1^{-m-1}(t)U'_1(t) + pV_1^{-p-1}(t)V'_1(t)) \\
&\quad + c\frac{2m}{h} U_1^{-m-1}(t)(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)) + \frac{2p}{h} V_1^{-p-1}(t)(U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t)), \\
Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) &\leq \frac{2m}{h} U_1^{-m-1}(t) (U'_1(t) + c(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t))) \\
&\quad + \frac{2p}{h} V_1^{-p-1}(t) (V'_1(t) + c(U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1'(t) - \delta^2 Z_1(t) &\leq \frac{2m}{h} U_1^{-m-1}(t) Z_1(t) + \frac{2p}{h} V_1^{-p-1}(t) W_1(t), \\ Z_i'(t) - \delta^2 Z_i(t) &\leq 0, \\ Z_I'(t) - \delta^2 Z_I(t) &\leq 0, \end{aligned}$$

de même nous montrons que

$$\begin{aligned} W_1'(t) - \delta^2 W_1(t) &\leq \frac{2q}{h} \left(U_1^{-q-1}(t) Z_1(t) + \frac{2n}{h} V_1^{-n-1}(t) W_1(t) \right), \\ W_i'(t) - \delta^2 W_i(t) &\leq 0, \\ W_I'(t) - \delta^2 W_I(t) &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_i'(t) - \delta^2 Z_i(t) + \alpha_i(t) Z_i(t) + \beta_i(t) W_i(t) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_h[, \\ W_i'(t) - \delta^2 W_i(t) + a_i(t) Z_i(t) + b_i(t) W_i(t) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_h[, \\ Z_i(0) &\leq 0, \quad W_i(0) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

où $\alpha_1(t) = -\frac{2m}{h} U_1^{-m-1}(t)$, $\beta_1(t) = \frac{2p}{h} V_1^{-p-1}(t)$, $a_1(t) = \frac{2q}{h} U_1^{-q-1}(t)$,
 $b_1(t) = -\frac{2n}{h} V_1^{-n-1}(t)$ et $\alpha_i(t) = \beta_i(t) = a_i(t) = b_i(t) = 0$, $i = 2, \dots, I-1$.

En vertu du Lemme 3.1, nous avons

$$Z_i(t) \leq 0, \quad W_i(t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_h[.$$

Ainsi nous obtenons

$$U_i'(t) \leq -cU_i^{-m}(t) \text{ et } V_i'(t) \leq -cV_i^{-n}(t), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T_h[. \quad (3.23)$$

Supposons que U_h s'éteint (V_h s'éteint).

En intégrant (3.23) de t à T_h , nous arrivons au fait que

$$\frac{U_1(t)^{m+1}}{C(m+1)} \geq T_h - t \quad \left(\frac{V_1(t)^{n+1}}{C(n+1)} \geq T_h - t \right),$$

ce qui implique que

$$U_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}} \quad \left(V_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}} \right).$$

□

Théorème 3.5. *Si $p < n + 1$, alors il existe une donnée initiale telle que, V_h s'éteint tandis*

que U_h ne s'éteint pas.

Preuve. Nous argumentons par contradiction. Supposons que U_h et V_h s'éteignent simultanément au temps T_h pour chaque donnée initiale. Nous aurons dans ce cas

$$\int_0^t U_1'(s) ds \geq \int_0^{T_h} U_1'(s) ds = \frac{2}{h^2} \int_0^{T_h} (U_2(s) - U_1(s)) ds - \frac{2}{h} \int_0^{T_h} (U_1^{-m}(s) + V_1^{-p}(s)) ds$$

En utilisant le Lemme 3.4, nous obtenons

$$U_1(t) \geq U_1(0) + \frac{2}{h^2} \int_0^{T_h} (U_2(s) - U_1(s)) ds - \frac{2C}{h} \int_0^{T_h} \left((T_h - s)^{-\frac{m}{m+1}} + (T_h - s)^{-\frac{p}{n+1}} \right) ds$$

Comme $p < n + 1$, cette intégrale est Riemann convergente et

$$U_1(t) \geq C_1 - C_2 T_h^{\frac{1}{m+1}} - C_3 T_h^{\frac{n+1-p}{n+1}}, \quad \text{avec } C_1, C_2, C_3 > 0.$$

En sommant (3.6) nous observons que

$$-\frac{h}{2} V_1'(t) - \frac{h}{2} V_I'(t) - \sum_{i=2}^{I-1} h V_i'(t) = U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t),$$

$$-\frac{h}{2} V_1'(t) - \frac{h}{2} V_I'(t) - \sum_{i=2}^{I-1} h V_i'(t) \geq U_1^{-q}(0) + V_1^{-n}(0). \quad (3.24)$$

Par intégration de (3.24) de 0 à T_h , nous arrivons à

$$V_I(0) (U_1^{-q}(0) + V_1^{-n}(0))^{-1} \geq T_h,$$

alors si T_h est assez petit (dépendant de $U_h(0)$ et $V_h(0)$), $U_1(T_h) \geq c_0 > 0$. Nous aboutissons à une contradiction avec l'hypothèse que U_h s'éteint et le résultat est obtenu comme désiré. \square

Théorème 3.6. Si $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ et $p \geq n + 1$ ($p \leq \frac{m(n+1)}{m+1}$ et $q \geq m + 1$) seule U_h (seule V_h) s'éteint pour chaque donnée initiale non négative.

Preuve. Dans cette preuve, nous supposons seulement le cas où $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ et $p \geq n + 1$, le cas où $p \leq \frac{m(n+1)}{m+1}$ et $q \geq m + 1$ se traite de manière analogue. Dans la suite, nous supposons qu'il existe une donnée initiale telle que U_h et V_h s'éteignent simultanément au temps T_h . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que cette donnée initiale satisfait (3.20)-(3.21). Selon (3.6)

nous avons

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= \delta^2 V_1(t) - b_1(U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t)), \\ V_1'(t) &\geq -b_1(U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t)), \\ V_1(t) &\leq b_1 \int_t^{T_h} U_1^{-q}(s) + V_1^{-n}(s) ds. \end{aligned}$$

Du Lemme 3.4 nous savons que $U_1(t) \geq C_1(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}}$, $V_1(t) \geq C_2(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}}$. Donc, on a,

$$U_1^{-q}(t) \leq C_1^{-q}(T_h - t)^{-\frac{q}{m+1}}, \text{ et } V_1^{-n}(t) \leq C_2^{-n}(T_h - t)^{-\frac{n}{n+1}}.$$

Comme $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$, alors $U_1^{-q}(t) \leq C_1^{-q}(T_h - t)^{-\frac{n}{n+1}}$. Ce qui implique que

$$V_1(t) \leq b_1 \int_t^{T_h} C_4(T_h - s)^{-\frac{n}{n+1}} ds.$$

D'où

$$V_1(t) \leq \alpha(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}} \text{ avec } \alpha = b_1 n(C_1^{-q+} C_2^{-n}).$$

En considérant l'équation (3.5) nous avons

$$\begin{aligned} U_1'(t) &= \delta^2 U_1(t) - b_1(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)), \\ U_1'(t) &\leq \delta^2 U_1(t) - b_1 V_1^{-p}(t), \\ U_1'(t) &\leq \delta^2 U_1(t) - b_1 \alpha^{-p}(T_h - t)^{-\frac{p}{n+1}}. \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente des deux côtés de 0 à T_h , nous obtenons

$$U_1(0) \geq -c_1 + c_2 \int_0^{T_h} (T_h - t)^{-\frac{p}{n+1}} dt \text{ avec } c_2 = b_1 \alpha^{-p} \text{ et } c_1 = \int_0^{T_h} \delta^2 U_1(t) dt.$$

Nous pouvons voir que l'intégrale diverge si $p \geq n + 1$, ce qui est en contradiction avec le fait que U_h et V_h s'éteignent simultanément. \square

Théorème 3.7. Soit (U_h, V_h) la solution de (3.5)-(3.7) telle que la donnée initiale satisfait (3.20)-(3.21).

Si U_h s'éteint à un temps fini T_h , alors il existe deux constantes non négatives telles que

$$C_1(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}} \leq U_1(t) \leq C_2(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Si V_h s'éteint à un temps fini T_h , alors il existe deux constantes non négatives telles que

$$C_1(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}} \leq V_1(t) \leq C_2(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Remarque 3.1. Soit (U_h, V_h) solution de (3.5)-(3.7) telle que la donnée initiale satisfait (3.20)-(3.21). Nous pouvons voir du Lemme 3.4 et de la preuve du Théorème 3.6 que si U_h (V_h) s'éteint en un temps fini T_h , alors $U_1^{-1}(t) \sim (T_h - t)^{-\frac{1}{m+1}}$ ($V_1^{-1}(t) \sim (T_h - t)^{-\frac{1}{n+1}}$) pour t assez proche de T_h .

3.6 Convergence du temps d'extinction

Dans cette section, nous étudions la convergence du temps d'extinction semi-discrète. Mais avant, nous prouvons que pour chaque intervalle de temps $[0, T^*]$ fixé où (u, v) est définie, la solution (U_h, V_h) de (3.5)-(3.7) converge vers (u, v) quand le paramètre de discrétisation h tend vers zéro. Pour la suite nous posons

$$u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T, \quad v_h(t) = (v(x_1, t), \dots, v(x_I, t))^T,$$

$$\|U_h(t)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I} |U_i(t)|, \quad \|U_h(t)\|_{\inf} = \min_{1 \leq i \leq I} |U_i(t)|.$$

Théorème 3.8. Supposons que la solution (u, v) du problème (3.1)-(3.4) appartient à $(C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^*]))^2$ et la donnée initiale $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ de (3.5)-(3.7) vérifie

$$\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty = o(1) \quad h \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Alors, pour h assez petit, le problème semi-discrète (3.5)-(3.7) a une unique solution $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I))^2$ telle que

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h), \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h), \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Preuve. Soit $\sigma > 0$ tel que

$$(\|u(\cdot, t)\|_\infty, \|v(\cdot, t)\|_\infty) < \sigma, \quad t \in [0, T^*]. \quad (3.26)$$

Alors le problème (3.5)-(3.7) a pour h , une unique solution $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I))^2$. Soit

$t(h) \leq T^*$ la première valeur $t > 0$ telle que

$$\max\{\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty\} < 1. \quad (3.27)$$

La relation (3.25) implique $t(h) > 0$ pour h assez petit. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \text{ et, } \|V_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \text{ pour } t \in (0, t(h)). \quad (3.28)$$

Soit $(e_{1,h}, e_{2,h})(t) = (U_h - u_h, V_h - v_h)(t)$, $\forall t \in [0, T^*]$ l'erreur de discrétisation. Ces fonctions d'erreur vérifient

$$\begin{aligned} e'_{1,1}(t) &= \delta^2 e_{1,1}(t) + mb_1(\theta_1(t))^{-m-1} e_{1,1}(t) + pb_1(\Theta_1(t))^{-p-1} e_{2,1}(t) + O(h), \\ e'_{2,1}(t) &= \delta^2 e_{2,1}(t) + qb_1(\theta_1(t))^{-q-1} e_{1,1}(t) + nb_1(\Theta_1(t))^{-n-1} e_{2,1}(t) + O(h), \\ e'_{1,I}(t) &= \delta^2 e_{1,I}(t) + mb_I(\theta_I(t))^{-m-1} e_{1,I}(t) + pb_I(\Theta_I(t))^{-p-1} e_{2,I}(t) + O(h), \\ e'_{2,I}(t) &= \delta^2 e_{2,I}(t) + qb_I(\theta_I(t))^{-q-1} e_{1,I}(t) + nb_I(\Theta_I(t))^{-n-1} e_{2,I}(t) + O(h), \end{aligned}$$

pour $i = 2, \dots, I - 1$,

$$e'_{1,i}(t) = \delta^2 e_{1,i}(t) + O(h^2), \quad e'_{2,i}(t) = \delta^2 e_{2,i}(t) + O(h^2),$$

où $\theta_i(t)$ et $\Theta_i(t)$ pris respectivement, entre $U_i(t)$ et $u(x_i, t)$, et entre $V_i(t)$ et $v(x_i, t)$, pour $i \in \{1, I\}$. En utilisant (3.26) et (3.28), il existe K et L des constantes positives telles que

$$\begin{aligned} e'_{1,i}(t) &\leq \delta^2 e_{1,i}(t) + b_i L |e_{1,i}(t)| + b_i L |e_{2,i}(t)| + Kh, \\ e'_{2,i}(t) &\leq \delta^2 e_{2,i}(t) + b_i L |e_{1,i}(t)| + b_i L |e_{2,i}(t)| + Kh \end{aligned}$$

Soit $(z, w) \in (C^{4,1}([0, 1], [0, T^*]))^2$ tel que

$z(x, t) = (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh) e^{(M+2)t - (1-x)^2}$ et $w = z$, $\forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*]$, avec M, Q des constantes positives. Nous pouvons prouver par le Lemme 3.2 que

$$|e_{1,i}(t)| < z(x_i, t), \quad |e_{2,i}(t)| < w(x_i, t), \quad 1 \leq i \leq I, \text{ pour } t \in]0, t(h)[.$$

Nous déduisons que

$$\begin{aligned} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty &\leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh) e^{(M+2)t}, \\ \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty &\leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh) e^{(M+2)t}, \end{aligned}$$

pour $t \in]0, t(h)[$. Supposons que $T^* > t(h)$, de (3.27), nous obtenons

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh) e^{(M+2)t}.$$

Puisque le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand h tend vers zero, nous déduisons que $1 \leq 0$, ce qui est absurde. Donc nous avons $t(h) = T^*$, et la preuve est complète. \square

Théorème 3.9. Soit $(u, v) \in (C^{4,1}([0, 1] \times [0, T]))^2$ solution de (3.1)-(3.4) avec T le temps d'extinction et la donnée initiale (3.5)-(3.7) satisfait (3.20)-(3.21) et (3.25). Alors la solution (U_h, V_h) de (3.5)-(3.7) s'éteint en un temps fini T_h et nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Preuve. Posons $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\frac{y^{1+m}}{C(m+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq y \leq \eta. \quad (3.29)$$

Il existe un temps $T_0 \in]T - \frac{\varepsilon}{2}, T[$ tel que $0 < |u(x_i, t)| \leq \frac{\eta}{2}$, pour $i = 1, \dots, I, t \in [T_0, T[$. Posons $T_1 = \frac{T_0+T}{2}$, il n'est pas difficile de voir que $0 < \|u(x_i, t)\|_{\inf}$, pour $t \in [0, T_1]$. Du Théorème 3.8, il suit que pour h suffisamment petit

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq \frac{\eta}{2}.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(T_1)\|_{\inf} \leq \|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty + \|u_h(T_1)\|_{\inf} \leq \eta.$$

Du Théorème 3.2, (U_h, V_h) s'éteint en un temps fini T_h . Si nous supposons que U_h s'éteint, nous déduisons des Lemmes 3.4 et (3.29) que

$$|T_h - T| \leq |T_h - T_1| + |T_1 - T| \leq \frac{\|U_h(T_1)\|_{\inf}^{1+m}}{C(m+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Le cas où V_h s'éteint est traité de façon analogue. \square

3.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques approximations numériques du temps d'extinction de la solution de (3.5)-(3.7) pour la donnée initiale $u_0(x) = v_0(x) = 1 + \frac{4}{\Pi} \sin\left(\frac{\Pi}{2}x\right)$, avec différentes valeurs de m , n , p et q , où $\max\{m, n, p, q\} > 0$.

En posant $W_i(t) = U_i(t)^{-1}$ et $W_{I+i}(t) = V_i(t)^{-1}$, $i = 1, \dots, I$, nous obtenons le système différentiel suivant

$$W_1'(t) = \frac{2}{h^2} \left(W_1(t) - \frac{W_1(t)^2}{W_2(t)} \right) + \frac{2}{h} (W_1(t)^{m+2} + W_{I+1}(t)^p W_1(t)^2) \quad (3.30)$$

$$W_i'(t) = \frac{1}{h^2} \left(2W_i(t) - \frac{W_i(t)^2}{W_{i-1}(t)} - \frac{W_i(t)^2}{W_{i+1}(t)} \right), \quad i = 2, \dots, I-1 \quad (3.31)$$

$$W_I'(t) = \frac{2}{h^2} \left(W_I(t) - \frac{W_I(t)^2}{W_{I-1}(t)} \right) \quad (3.32)$$

$$W_{I+1}'(t) = \frac{2}{h^2} \left(W_{I+1}(t) - \frac{W_{I+1}(t)^2}{W_{I+2}(t)} \right) + \frac{2}{h} (W_1(t)^q W_{I+1}(t)^2 + W_{I+1}(t)^{n+2}) \quad (3.33)$$

$$W_{I+i}'(t) = \frac{1}{h^2} \left(2W_{I+i}(t) - \frac{W_{I+i}(t)^2}{W_{I+i-1}(t)} - \frac{W_{I+i}(t)^2}{W_{I+i+1}(t)} \right), \quad i = 2, \dots, I-1 \quad (3.34)$$

$$W_{2I}'(t) = \frac{2}{h^2} \left(W_{2I}(t) - \frac{W_{2I}(t)^2}{W_{2I-1}(t)} \right) \quad (3.35)$$

avec $W_i(0) = (\varphi_{1,i})^{-1}$ et $W_{I+i}(0) = (\varphi_{2,i})^{-1}$ pour $i = 1, \dots, I$. Nous pouvons constater que W_h explose quand (U_h, V_h) s'éteint. Soit η la longueur d'arc paramétré $M : t \mapsto (t, W(t))$, $t \in [0, T_h[$. En considérant les variables t et W_h en fonction de η , nous obtenons les systèmes d'EDO suivant

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}}, \\ \frac{dW_i}{d\eta} = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}}, \quad i = 1, \dots, 2I, \\ t(0) = 0, \quad W_i(0) = (\varphi_{1,i})^{-1}, \quad W_{I+i}(0) = (\varphi_{2,i})^{-1} \quad i = 1, \dots, I, \end{cases} \quad (3.36)$$

où $0 < \eta < \infty$, et

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \frac{2}{h^2} \left(W_1(t) - \frac{W_1(t)^2}{W_2(t)} \right) + \frac{2}{h} (W_1(t)^{m+2} + W_{I+1}(t)^p W_1(t)^2) \\
f_i(t) &= \frac{1}{h^2} \left(2W_i(t) - \frac{W_i(t)^2}{W_{i-1}(t)} - \frac{W_i(t)^2}{W_{i+1}(t)} \right), \quad i = 2, \dots, I-1 \\
f_I(t) &= \frac{2}{h^2} \left(W_I(t) - \frac{W_I(t)^2}{W_{I-1}(t)} \right) \\
f_{I+1}(t) &= \frac{2}{h^2} \left(W_{I+1}(t) - \frac{W_{I+1}(t)^2}{W_{I+2}(t)} \right) + \frac{2}{h} (W_1(t)^q W_{I+1}(t)^2 + W_{I+1}(t)^{n+2}) \\
f_{I+i}(t) &= \frac{1}{h^2} \left(2W_{I+i}(t) - \frac{W_{I+i}(t)^2}{W_{I+i-1}(t)} - \frac{W_{I+i}(t)^2}{Z_{I+i+1}(t)} \right), \quad i = 2, \dots, I-1 \\
f_{2I}(t) &= \frac{2}{h^2} \left(W_{2I}(t) - \frac{W_{2I}(t)^2}{W_{2I-1}(t)} \right)
\end{aligned}$$

puisque $d\eta^2 = dt^2 + dW_1^2 + \dots + dW_{2I}^2$.

Proposition 3.1. *Soit $(\eta_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie par*

$$\eta_l = k^l s_0, \quad t(\eta_l) = \int_0^{\eta_l} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}} \quad \text{et} \quad \eta_0 > 0, \quad k > 1,$$

alors la suite $(t(\eta_l))_{l \in \mathbb{N}}$ converge linéairement vers T_h .

Preuve. Nous avons le résultat désiré grâce à la Remarque 3.1 et aux Théorèmes 3.15 et 3.16 (voir annexes). \square

Par le même principe de programmation que les chapitres précédents, nous obtenons les résultats ci-dessous.

3.7.1 Tableaux

Dans les lignes des tableaux suivants, nous présentons le temps d'extinction numérique T_h , le nombre d'itérations k , correspondant à des mailles de 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

3.7.2 Graphiques

Tableau 3.1 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$.

I	T_h	k
16	0.14996832	427
32	0.14779261	697
64	0.14712892	1334
128	0.14693093	3490
256	0.14687304	12136
512	0.14685642	46926
1024	0.14685125	18639

Tableau 3.2 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 1$, $p = 2.5$, $q = 0.5$, $n = 1$.

I	T_h	k
16	0.13247290	297
32	0.13052040	557
64	0.12992956	1149
128	0.12975310	3065
256	0.12970112	10682
512	0.12968603	41378
1024	0.12968172	164524

Tableau 3.3 – Temps d’extinction numérique, nombre d’itérations et ordre des approximations obtenues pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$.

I	T_h	k
16	0.12379024	246
32	0.12146439	469
64	0.12074568	982
128	0.12052934	2736
256	0.12046563	9819
512	0.12044721	38351
1024	0.12044198	152745

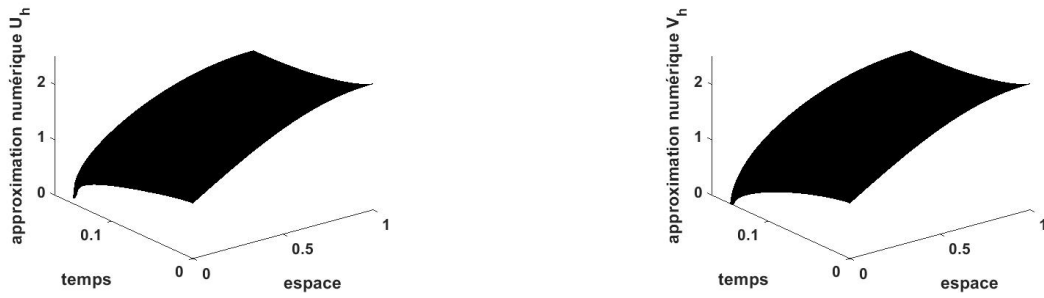


Figure 3.1 – Sur la gauche, non extinction de U_h et sur la droite, extinction de V_h pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$.



Figure 3.2 – Sur la gauche, évolution de U_1 et sur la droite, évolution de V_1 par rapport au temps, pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$.

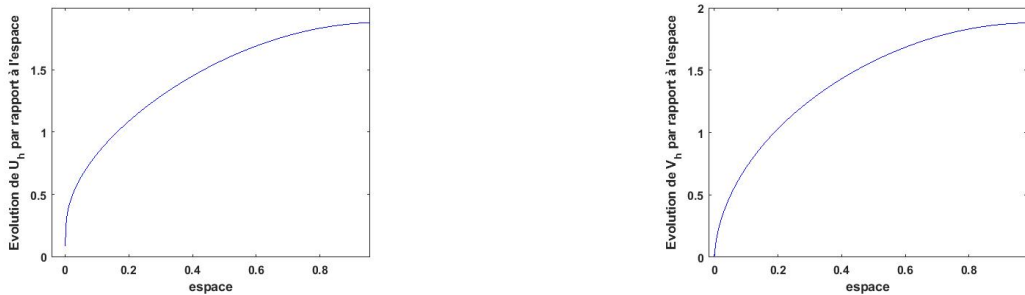


Figure 3.3 – Sur la gauche, évolution de U_h et sur la droite, évolution de V_h par rapport à l'espace, au temps d'extinction, pour $m = 0.5$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 0.5$.

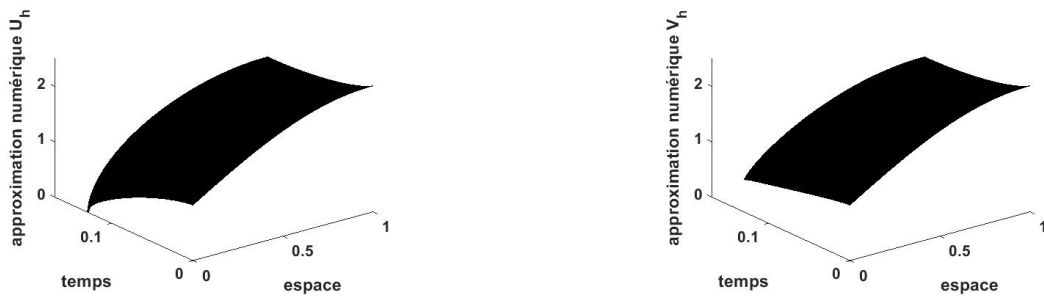


Figure 3.4 – Sur la gauche, extinction de U_h et sur la droite, non extinction de V_h , V_h pour $m = 1$, $p = 2.5$, $q = 0.5$, $n = 1$.

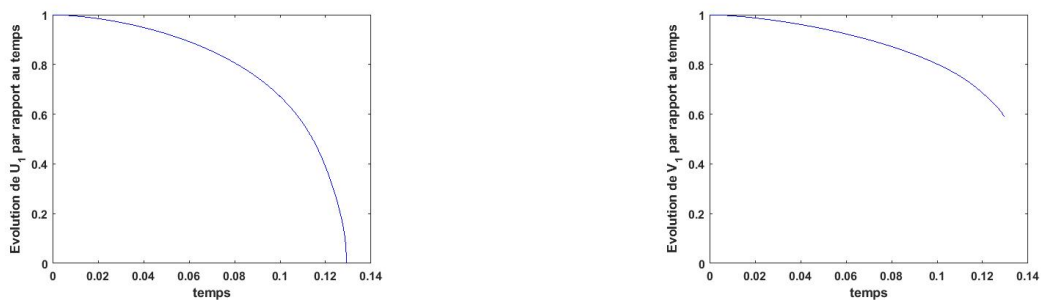


Figure 3.5 – Sur la gauche, évolution de U_1 et sur la droite, évolution de V_1 par rapport au temps, pour $m = 1, p = 2.5, q = 0.5, n = 1$.

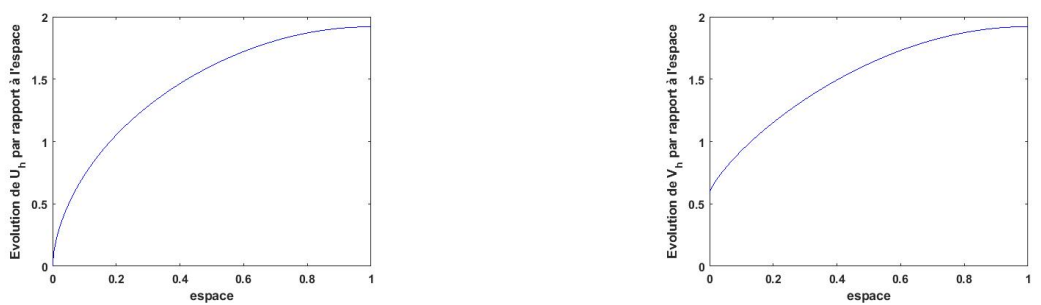


Figure 3.6 – Sur la gauche, évolution de U_h et sur la droite, évolution de V_h par rapport à l'espace, au temps d'extinction, pour $m = 1, p = 2.5, q = 0.5, n = 1$.

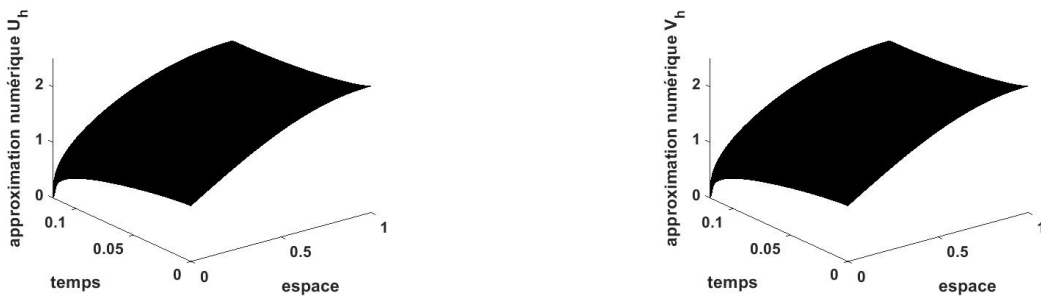


Figure 3.7 – Sur la gauche, extinction de U_h et sur la droite, extinction de V_h , pour $m = 0.3, p = 2, q = 2, n = 0.3$.

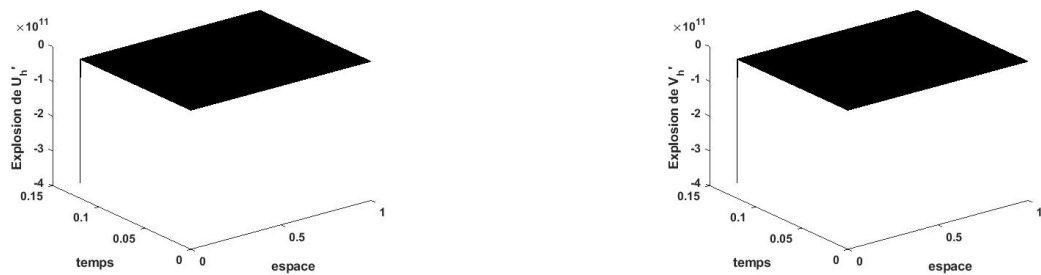


Figure 3.8 – Sur la gauche, explosion de U'_h et sur la droite, explosion de V'_h , pour $m = 0.3, p = 2, q = 2, n = 0.3$.

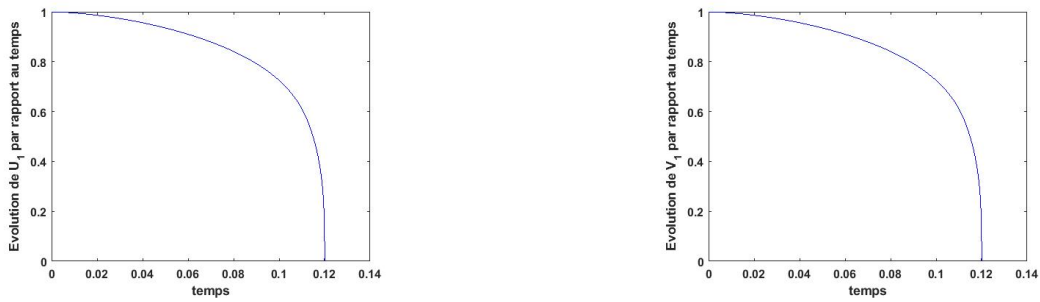


Figure 3.9 – Sur la gauche, évolution de U_1 et sur la droite, évolution de V_1 par rapport au temps, pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$.

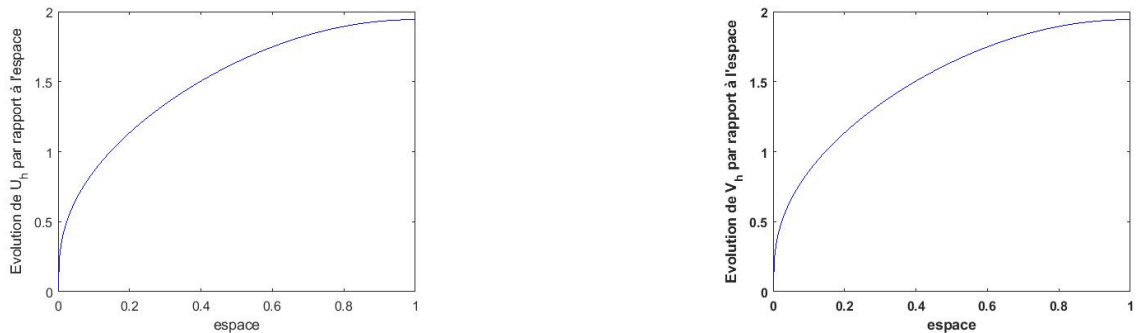


Figure 3.10 – Sur la gauche, évolution de U_h et sur la droite, évolution de V_h par rapport à l'espace, au temps d'extinction, pour $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$.

Remarque 3.2. Si nous considérons le problème (3.5)-(3.7), dans le cas où la paire fonctions de distributions initiales de températures est la donnée par

$$(u_0(x), v_0(x)) = \left(1 + \frac{4}{\Pi} \sin\left(\frac{\Pi}{2}x\right), 1 + \frac{4}{\Pi} \sin\left(\frac{\Pi}{2}x\right) \right).$$

Des figures 3.1 à 3.3, nous observons respectivement l'extinction de (u, v) lorsque les paramètres d'absorptions $m, n \geq 0$ et $p, q > 0$. Dans les tableaux 3.1 à 3.3, nous observons la convergence du temps d'extinction T_h de la solution de (3.5)-(3.7). Ce résultat ne nous surprend pas à cause des résultats établis dans les sections précédentes. De plus, nous pouvons voir de la figure 3.1 que u ne s'éteint pas tandis que v s'éteint lorsque $p < n + 1$. De la figure 3.2, on peut constater que U_h s'éteint tandis que V_h ne s'éteint pas, lorsque $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ et $p \geq n + 1$. Puis de la figure 3.3, u et v s'éteignent simultanément lorsque $n < p + 1$ et $m < q + 1$. Ce qui nous permet de dire que l'extinction de la solution (u, v) peut être contrôlé par les paramètres d'extinctions m , n , p et q .

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé un schéma semi-discret basé sur la méthode des différences finies en espace pour certaines équations aux dérivées partielles paraboliques avec conditions aux limites non linéaires et certains systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques, avec conditions aux limites couplées et non linéaires, permettant d'obtenir les mêmes conditions d'explosion et d'extinction ainsi que celles d'explosion et d'extinction simultanées et non simultanées des problèmes continus. La convergence de ce schéma est prouvée. Nous avons prouvé aussi que pour une classe de données initiales pour lesquelles des théories d'existence, d'unicité et de convergence peuvent être établies pour un intervalle de temps, l'on peut contrôler l'explosion et l'extinction en jouant sur les exposants critiques. Enfin, nous sommes parvenus à déterminer de bonnes valeurs approximatives des temps d'explosions et d'extinctions de quelques EDP paraboliques avec des conditions aux limites non linéaires de type Neumann.

Les méthodes numériques développées dans cette thèse, permettront aux ingénieurs et aux chercheurs d'effectuer des prévisions et des planifications relatives aux dispositifs utilisés.

En perspectives, nous pourrions déterminer des méthodes numériques pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques, avec conditions aux limites couplées et non linéaires pour :

- estimer les temps d'explosion et d'extinction en dimension supérieure à 1,
- estimer les régions d'explosions ou d'extinctions simultanées et non simultanées,
- déterminer des conditions nécessaires pour l'explosion et l'extinction simultanées et non simultanées.

Nous pourrions faire une étude de sensibilité pour quantifier les temps d'explosion et d'extinction simultanées et non simultanée des systèmes couplés en vue de mettre en évidence les paramètres qui sont facteurs d'accélération ou de ralentissement d'explosion et d'extinction.

ANNEXES

Principes de comparaison et du maximum

Nous rappelons quelques résultats qualitatifs (principe de comparaison, principe du maximum, positivité et unicité de la solution) que nous utilisons dans le premier chapitre consacré à l'étude du problème continu. Ces résultats sont issus de [66], [76].

On considère Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , dont le bord $\partial\Omega$ se décompose en deux parties disjointes

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \uplus \partial_2\Omega,$$

où $\partial_2\Omega$ est une partie relativement ouverte dans $\partial\Omega$. Les cas $\partial_2\Omega = \partial\Omega$ et $\partial_2\Omega = \emptyset$ ne sont pas exclus. Pour $\tau > 0$ on définit

$$\overline{\mathcal{Q}}_\tau := \overline{\Omega} \times [0, \tau],$$

puis l'intérieur parabolique

$$\mathcal{Q}_\tau := (\Omega \cup \partial_2\Omega) \times]0, \tau],$$

et le bord parabolique

$$\mathbf{q}_\tau := \overline{\mathcal{Q}}_\tau \setminus \mathcal{Q}_\tau.$$

Soit une fonction

$$F \in C^1(\overline{\mathcal{Q}}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2})$$

croissante par rapport à la variable dans \mathbb{R}^{N^2} . On supposera que la fonction F vérifie la condition de Lipschitz unilatérale suivante :

$$w \geq u \implies F(x, t, w, p, q) - F(x, t, u, p, q) \leq L(w - u) \quad (3.37)$$

dans $\overline{\mathcal{Q}}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2}$, où $L \geq 0$ est une constante ne dépendant que de la fonction F . On considère l'équation parabolique dans $\overline{\mathcal{Q}}_\tau$

$$u_t = F(x, t, u, \nabla u, H^2 u),$$

où H^2u désigne la matrice hessienne de u . Sur $\partial_2\Omega$, on impose la condition dynamique $\mathbf{B}_\sigma(u) = 0$, avec

$$\mathbf{B}_\sigma(u) = \sigma(x, t)\partial_t u + \partial_\nu u - \rho(x, t)u,$$

où $\sigma \geq 0$ sur $\partial_2\Omega \times]0, \tau]$. Nous avons les résultats suivants :

Théorème 3.10. *Principe de comparaison.*

Soient u et v deux fonctions dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$ satisfaisant

$$\begin{cases} u_t - F(x, t, u, \nabla u, H^2u) \leq v_t - F(x, t, v, \nabla v, H^2v) & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathbf{B}_\sigma(u) \leq \mathbf{B}_\sigma(v) & \text{sur } \partial_2\Omega \times]0, \tau]. \end{cases}$$

Alors $u \leq v$ sur \mathbf{q}_τ implique $u \leq v$ dans \mathcal{Q}_τ .

Unicité.

Le problème parabolique à valeur initiale

$$\begin{cases} u_t = F(x, t, u, \nabla u, H^2u) & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathbf{B}_\sigma(u) = 0 & \text{sur } \partial_2\Omega \times]0, \tau], \\ u|_{\mathbf{q}_\tau} = \varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{q}_\tau), \end{cases}$$

admet au plus une seule solution u dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$.

Corollaire 3.2. *Positivité.*

Si l'on suppose en plus que $F(\cdot, \cdot, 0, 0, 0) \geq 0$, une solution $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}}_\tau) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathcal{Q}_\tau)$ de

$$\begin{cases} u_t - F(x, t, u, \nabla u, H^2u) \geq 0 & \text{dans } \mathcal{Q}_\tau, \\ \mathbf{B}_\sigma(u) \geq 0 & \text{sur } \partial_2\Omega \times]0, \tau], \\ u \geq 0 & \text{sur } \mathbf{q}_\tau, \end{cases}$$

est positive dans \mathcal{Q}_τ .

Pour la suite, on pose

$$D[u] = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + g(x, t, u, \nabla u),$$

où les coefficients a_{ij} vérifient, pour μ_1 et μ_2 deux constantes positives,

$$0 \leq \mu_1 \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2,$$

pour tout vecteur ξ de \mathbb{R}^N .

Théorème 3.11. *Principe du maximum \langle minimum \rangle fort.*

Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que dans $\mathcal{Q}_\tau \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on ait

$$g(\cdot, \cdot, \cdot, p) \leq C|p| \quad \langle \quad g(\cdot, \cdot, \cdot, p) \geq -C|p| \quad \rangle.$$

Soit une fonction $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}_\tau}) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{Q}_\tau)$ vérifiant

$$\begin{cases} u_t \leq D[u] \quad \langle \quad u_t \geq D[u] \quad \rangle & \text{dans } \Omega \times]0, \tau], \\ \mathbf{B}_\sigma(u) \leq 0 \quad \langle \quad \mathbf{B}_\sigma(u) \geq 0 \quad \rangle & \text{sur } \partial_2 \Omega \times]0, \tau]. \end{cases}$$

Alors

$$\max_{\mathbf{q}_\tau} u = \max_{\overline{\mathcal{Q}_\tau}} u \quad \langle \quad \min_{\mathbf{q}_\tau} u = \min_{\overline{\mathcal{Q}_\tau}} u \quad \rangle, \quad (3.38)$$

et si u atteint son maximum M \langle son minimum m \rangle en un point $(x_0, t_0) \in \mathcal{Q}_\tau$, alors $u = M$ \langle $u = m$ \rangle sur $\overline{\mathcal{Q}_{t_0}}$.

Unicité des solutions de certains systèmes d'EDP paraboliques

Cette partie traite l'unicité des solutions de certaines classes d'EDP paraboliques et elle est inspirée de Wolfgang Walter [78] et de Herbert Amann [7].

Nous commençons par définir quelques ensembles qui nous seront utiles pour la suite

Définition 3.3. \mathcal{E}_i $i = 1, 2$ est l'ensemble des fonctions $\omega(t, z)$ définies dans $J \times \{z \geq 0\}$ (J un intervalle borné de \mathbb{R}) avec les propriétés suivantes : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ et une fonction $\sigma(t)$ telle que $0 < \sigma(t) \leq \varepsilon$ dans J et

$$\mathcal{E}_1 : \sigma' > \omega(t, \sigma) + \delta \quad \text{et} \quad \delta \geq \delta \quad \text{dans } J ;$$

$$\mathcal{E}_2 : \sigma' > \omega(t, \sigma) \quad \text{et} \quad \delta \geq \delta \quad \text{dans } J .$$

Considérons pour la suite, le système d'équations aux dérivées partielles paraboliques suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t, u)u = f(x, t, u, Du) & \text{sur } \Omega \times]0, T[, \\ \mathcal{B}(t, u)u = g(x, t, u) & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.39)$$

où Ω un domaine lisse borné de \mathbb{R}^n et $\mathcal{A}(t, u)$ une famille d'opérateurs différentiels de second ordre telle que

$$\mathcal{A}(t, u) = - \sum_{j,k=1}^n D_j(a_{jk}(\cdot, t, u)D_k u) + \sum_{j=1}^n a_j(\cdot, t, u)D_j u, \quad 0 \leq t \leq T < \infty,$$

$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ agissant sur un vecteur de N fonctions réelles $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathcal{K}^N \subset \mathbb{R}^N$ avec

$$a_j \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)),$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des endomorphismes de \mathbb{R}^N , $a_{jk} = a_{kj}$. Nous supposons que $\mathcal{A}(t, u)$ est strictement elliptique, c'est-à-dire

$$\sum_{r,s=1}^N \sum_{j,k=1}^n a_{jk}^{rs}(\cdot, t, \eta) \xi^j \xi^k \zeta_r \zeta_s > 0$$

pour tout $(x, t, \eta) \in \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^N$, pour tout $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, a_{jk}^{rs} sont les éléments des matrices a_{jk} .

Notons par $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ la normale extérieure que $\partial\Omega$,

$$\mathcal{B}(t, u)u = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\cdot, t, u) \nu^j D_k u.$$

et

$$f \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R}^{N+nN}, \mathbb{R}^N).$$

Nous posons f_i, g_i la i -ème composante des fonctions vectorielles f et g .

Théorème 3.12. (Théorème d'unicité) *Supposons que $g_i(x, t, z)$ est dépendante de z_j ($j = 1, \dots, N$) et*

$$g_i(x, t, z + \alpha e) - g_i(x, t, z) < 0 \quad \text{pour } \alpha > 0,$$

$e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$. Si, il existe une fonction $\omega(t, z) \in \mathcal{E}_2(\mathcal{E}_1)$ telle que

$$f(x, t, z, p) - f(x, t, \bar{z}, p) \leq \omega(t, \max_j |z_j - \bar{z}_j|) \quad \text{pour } z_i \geq \bar{z}_i,$$

alors le problème (3.39) a au plus une solution dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0, T[) \cap \mathcal{C}^{2,1}(\Omega \times]0, T[)$

Supposons maintenant que

$$g \in C^\infty(\partial\Omega^N \times [0, T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \text{ avec } g(\cdot, \cdot, 0) = 0.$$

Nous avons le Théorème suivant qui est inspiré de Herbert Amann [7]

Théorème 3.13. *Supposons que $n < p < \infty$, $1 + n/p < \tau \leq 2$, et $u_0 \in W_p^\tau(\Omega, \mathbb{R}^N)$ satisfaisant la condition de compatibilité*

$$\mathcal{B}(t, u_0)u_0 = g(x, t, u_0) \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Alors l'équation (3.39) admet une solution maximale

$$u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T[, \mathbb{R}^N) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times]0, T[, \mathbb{R}^N).$$

Si f est indépendant de Du , alors u est l'unique solution maximale de l'équation (3.39).

Unicité des solutions de certains systèmes d'EDO

Comme dans la section précédente, cette présente section traite la question d'unicité des systèmes d'EDO et elle est inspirée de la thèse de N'Guessan Koffi [57].

Nous rappelons quelques définitions suivantes

Définition 3.4. *On appelle système différentiel non linéaire autonome du premier degré, tout système de la forme*

$$\frac{dX}{dt}(t) = F(X(t)), \tag{3.40}$$

où t est une variable réelle,

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_I(t))^T, \quad F(X) = (f_1(X), \dots, f_I(X))^T,$$

les f_i , $i \in \{1, \dots, I\}$, sont des fonctions de la variable X définies et continues sur un ouvert E dans \mathbb{R}^I .

Définition 3.5.

$$\begin{aligned} \text{Soit } X : J \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^I \\ t &\mapsto X(t). \end{aligned}$$

On dit que X est solution du système (3.40) sur l'intervalle J dans E si

1. X est C^1 sur J ,
2. pour tout $t \in J$, $X(t) \in E$,
3. $\frac{dX}{dt}(t) = F(X(t))$.

Par abus de langage, on dira qu'une fonction $X : J \rightarrow \mathbb{R}^I$ est solution de (3.40) si $(J, X(t))$ est solution de (3.40).

Définition 3.6. Une solution $X : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^I$ du système (3.40) est maximale s'il n'existe pas d'intervalle \tilde{J} contenant strictement J et de solution $\tilde{X} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^I$ telle que $X|_{\tilde{J}}(\cdot) = \tilde{X}(\cdot)$.

Définition 3.7. On appelle condition initiale, un point de $K \times \mathbb{R}^I$ de la forme : (t_0, X_0) avec $X_0 = (y_1, \dots, y_I)^T$. Résoudre le système pour une condition initiale donnée, c'est chercher une solution $X(t)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$, $x_i(t_0) = y_i$.

Théorème 3.14. (Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soit $F : E \subseteq \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$ une fonction. On considère le problème de Cauchy (C_{X_0, t_0}) suivant

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = F(X(t)), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Si F est C^1 sur E alors :

1. (C_{X_0, t_0}) admet une unique solution maximale $(J_{max}, X_{max}(\cdot))$
2. Les solutions de (C_{X_0, t_0}) sont exactement les restrictions de l'unique solution maximale, c'est-à-dire les couples $(J, X_{max}|_J(\cdot))$ avec J sous-intervalle de J_{max} .
3. Si F est de classe C^m sur E , alors X_{max} est de classe C^{m+1} sur J_{max} .

Convergence du schéma numérique

Cette partie est inspirée de Ozawa et Hirota dans [41].

On considère le système d'équations aux dérivées partielles différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(y(t)), & 0 < t < T, \\ y(0) = y^0 \end{cases} \quad (3.41)$$

dont la solution est une fonction vectorielle $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ qui explose pour la norme infinie en un temps fini T et d'ordre asymptotique $\max_{1 \leq i \leq n} |y_i(t)| \sim (T-t)^{-p}$ où $p > 0$, $f(y(t)) = (f_1(y(t)), \dots, f_n(y(t)))^T$ et $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^T$. Regardons pour la suite, les variables t et y_1, y_2, \dots, y_n , comme fonction de s où s est la longueur d'arc de la solution y de (3.41). Étant donné que $ds^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^n dy_i^2$, le système d'équations suivant est obtenu

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} t(s) \\ y_1(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(y(s))}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(y(s)) \\ \vdots \\ f_n(y(s)) \end{pmatrix}, & 0 < s < \infty, \\ t(0) = 0, \quad y(0) = y^0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Et on obtient les théorèmes suivants

Théorème 3.15. Si au moins une composante y_ν de la solution y de (3.41) est une fonction croissante sur $[0, T[$ et tend vers $+\infty$ au temps T , alors nous avons

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} t(s) = T.$$

Théorème 3.16. Soit y solution de (3.41) satisfaisant l'hypothèse du Théorème 3.15 telle que $y_\nu(t) \sim (T-t)^{-p}$ ($p > 0$), soit $(s_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie par

$$s_l = q^l s_0, \quad s_0 > 0, \quad q > 1.$$

Si nous définissons

$$t(s_l) = \int_0^{s_l} \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2(y(s))}},$$

alors la suite $(t(s_l))_{l \in \mathbb{N}}$ converge linéairement vers T et le taux de convergence est $q^{-1/p}$.

Nous terminons cet annexe par l'inégalité de Jensen.

Théorème 3.17. (Inégalité de Jensen) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, si la famille $\{x_1, \dots, x_n\} \subset I$ et si les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vérifient : $\alpha_k \geq 0$ pour tout entier $1 \leq k \leq n$ et

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \text{ on } a :$$

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k).$$

Bibliographie

- [1] L. M. Abia, J.C. López-Marcos, J. Martínez, *Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, *Appl. Num. Math.*, **20** (1996), 145-156. [6](#), [14](#)
- [2] L. M. Abia, J. C. López-Marcos, J. Martínez, *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, *Appl. Numer. math.*, **26** (1998), 399-414. [6](#), [14](#)
- [3] L.M. Abia, J.C López-Marcos, J Martínez, *The Euler method in the numerical integration of reactiondiffusion problems with blow-up*, *Appl. Numer. Math.* **38** (2001), 287-313. [6](#)
- [4] A. Acker, W. Walter, *On the global existence of solutions of parabolic differential equations with a singular nonlinear term*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications*, **2** (1978), 499-504. [5](#), [6](#)
- [5] G. Acosta , J. F. Bonder, P. Groisman, J. D. Rossi, *Simultaneous vs. non-simultaneous blow-up in numerical approximations of a parabolic system with non-linear boundary conditions*, *ESAIM : M2AN*, **36** (2002) 55-68. [6](#), [55](#)
- [6] K. A. Adou, K. A. Touré and A. Coulibaly, *Numerical study of the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations*, *Far East J. Appl. Math.*, **4** (2018), 291-308.
- [7] H. Amann, *Quasilinear Parabolic Systems Under Nonlinear Boundary Conditions*, *Mathematisches Institut Universität Zütirich* **11**, [107](#), [109](#)
- [8] M. Berger and R. V. Kohn, *A Rescaling Algorithm for the Numerical Calculation of Blowing-up Solutions*, *Communicationson Pure and Applied Mathematics*, **XLI** (1988), 841-863. [6](#)
- [9] M. Bogoya, C. A. Gomez, *Numerical Analysis for a Non-local Diffusion System*, *Contemporary Engineering Sciences*, **45** (2018), 2225 -2236. [55](#)
- [10] T. K. Boni, *Extinction for discretizations of some semilinear parabolic equations*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (2001), 795-800. [6](#)
- [11] T. K. Boni, B. Y. Diby, *Quenching time of solutions for some nonlinear parabolic equations with Dirichlet boundary condition and a potential*, *Ann. Math. Inform.*, **35** (2008), 31-42. [8](#), [13](#)

- [12] T. K. Boni, H. Nachid, D. Nabongo, Quenching time of semilinear heat equations, *Miskolc Mathematical Notes*, **11** (2010), 27-41. 8
- [13] C. J. Budd, W. Huang, R. D. Russell, Moving mesh for problems with blow-up, *SIAM J. Sci. COMPUT.*, **17** (1996), 305-327. 6, 8
- [14] C. Brandle, F. Quiros and J. D. Rossi, An adaptive numerical method to handle blow-up in a parabolic system, *Numerische Mathematik*, **102** (2005), 39-59. 8
- [15] C.Y. Chan, S.I Yuen, Parabolic problems with nonlinear absorptions and releases at the boundaries, *Appl. Math. Comput.*, **121** (2001), 203-209. 13, 14, 17, 85
- [16] Y. G. Chen, Asymptotic behaviours of blowing up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, Math.*, **33** (1986), 541-574. 6
- [17] M. Chipol, M. Fila and P. Quittner, Stationary solutions, blow-up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, *Acta Math. Univ. Comenianae.*, **1** (1991), 35-103. 6
- [18] C.-H. Cho, On the computation of the numerical blow-up time, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **30** (2013), 331-349. 7
- [19] C.-H. Cho, S. Hamada, H. Okamoto, On the finite difference approximation for a parabolic blow-up problem, *Japan J. Ind. Appl. Math.* **24** (2007), 131-160. 6
- [20] K. Deng, Global Existence and Blow-up for a System of Heat Equations with Non-linear Boundary Conditions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **18**, (1995), 307-315. 55
- [21] K. B. Edja, K. A. Touré, B. J.-C. Koua, Numerical Blow-up for a Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions, *J. Math. Res.*, **10** (2018), 119-128. 8, 13
- [22] K. B. Edja, K. A. Touré, B. J.-C. Koua, Numerical quenching of a heat equation with nonlinear boundary conditions, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **13** (2020), 65-74. 8, 13
- [23] K. B. Edja, K. N'guessan, B. J.-C. Koua, K. A. Touré, Numerical blow-up for heat equations with coupled nonlinear boundary fluxes, *Far East J. Math. Sci.*, **117** (2019), 119-138. 8
- [24] K. B. Edja, K. N'guessan, B. J.-C. Koua, K. A. Touré, Numerical quenching for heat equations with coupled nonlinear boundary flux, *International Journal of Analysis and Applications*, **17** (2019), 1034-1051. 8
- [25] J. Fernandez Bonder, P. Groisman and J. D. Rossi, On numerical blow-up sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130** (2002), 2049-2055.
- [26] R. Ferreira, A. de Pablo, M.P. LLanos, J.D. Rossi, Incomplete quenching in a system of heat equations coupled at the boundary, *J. Math. Anal. Appl.*, **346** (2008), 1145-154. 79

- [27] R. Ferreira, P. Groisman, F. Quiros and J. D. Rossi, Adaptive numerical schemes for a parabolic problem with blow-up, *IMA. J. Numer. Anal.*, **23** (2003), 439-463. 8
- [28] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1964) 4, 6
- [29] U. Frisch, *Turbulence : The legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, NJ, (1995). 6
- [30] S.-C. Fu, J.-S. Guo, Blow-up for a semilinear reaction-diffusion system coupled in both equations and boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, **276** (2002), 458-475. 55
- [31] H. Fujita, On the blow-up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^\alpha$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.*, **13** (1966), 109-104. 4
- [32] V. Galaktionov and J. L. Vazquez, The problem of blow-up in nonlinear parabolic equation, current developments in PDE, (Temuco, 1999), *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **8** (2002), 399-433. 2, 6
- [33] R.H. Ji, C.Y. Quc, L.D. Wang, Simultaneous and non-simultaneous quenching for coupled parabolic system, *Applicable Analysis*, 94 (2015), 233-250. 79, 85
- [34] S. Kaplan, On the Growth of Solutions of Quasi-Linear Parabolic Equations, *Communicationson Pure and Applied Mathematics*, **XVI** (1963), 305-330. 3
- [35] H. Kawarada, On Solutions of Initial-Boundary Problem for $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **10** (1975), 729-736. 5, 13
- [36] C.M. Krirk, C. A. Roberts, A quenching problem for the heat equation, *J. Integral Equations Appl.*, **14** (2002), 53-72. 13
- [37] K. Kobayashi, T. Sirao, H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1977), 407- 424 4
- [38] J. L. Gomez, Márquez, v., Wolanski, N, Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition, *Differential Equations*, 92 (1991)., 384-401. 5, 13
- [39] P. Groisman, Totally discrete explicit and semi-implicit Euler methods for a blow-up problem in several space dimensions, *Computing* **76** (2006), 325-352. 6
- [40] E. Hairer, , S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Springer Series in Comput. Math., (2nd ed.). Springer-Verlag. 42
- [41] C. Hirota, K. Ozawa, Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations an application to the blow-up problems of partial differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 193 (2006), 614-637. 9, 42, 110

- [42] , B. Hu, H.-M. Yin, *The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition* *Amer. Math. Soc. Transl.*, **346** (1994), 117-134. [13](#)
- [43] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, *Trans. of Math. Monographs*, **23**, (1968). [13](#), [79](#)
- [44] H.A. Levine, *The Quenching of Solutions of Linear Parabolic and Hyperbolic Equations with Nonlinear Boundary Conditions*, *SIAM J. MATH. ANAL.*, **4** (1983), 1139-1153. [6](#), [13](#)
- [45] H.A. Levine, *The role of critical exponents in blowup theorems*, *SIAM J. Review*, **32** (1990), 262-288. [6](#)
- [46] H.A. Levine, J.T. Montgomer *The quenching of solutions of some nonlinear parabolic equations*, *SIAM J. MATH. ANAL.*, **11** (1980), 842-847. [5](#), [6](#), [13](#)
- [47] , H. A. Levine, L. E. Payne, *Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time*, *Journal of Differential Equations*, **16** (1974), 319-334. [5](#), [6](#), [13](#)
- [48] K.W. Liang, A. P. Lin, R.C.E. Tan, *Numerical Solution of Quenching Problems Using Mesh-Dependent Variable Temporal Steps*, *Appl. Numer. Math.*, **57** (2007), 791-800. [6](#), [8](#)
- [49] F. Li, B. Liu, S. Zheng, *Simultaneous and non-simultaneous blow-up for heat equations with coupled nonlinear boundary fluxes*, *Z. angew. Math. Phys.*, **58**, (2007) 717-735. [55](#)
- [50] B. Liu , F. Li, *A complete classification for non-simultaneous blow-up*, *Applied Mathematics Letters*, **22** (2009), 548-552. [55](#)
- [51] M. G. McGuigan, *Some Problems in Blow-up*, Ph.D. thesis, Heriot-Watt University, (1991). [2](#)
- [52] D. Nabongo, T.K. Boni, *Quenching for semidiscretizations of a heat equation with a singular boundary condition*, *Asymptotic Anal.*, **59** (2008), 27-38.
- [53] D. Nabongo, K. N'Guessan, K. A. Toure, *Blow-up for discretizations of some reaction-diffusion equations with a nonlinear convection term*, *International Journal of Applied Mathematics*, **29** (2016), 537-568. [7](#)
- [54] T. Nakagawa, *Blowing up of a Finite Difference Solution to $u_t = u_{xx} + u^2$* , 337-350 [6](#)
- [55] T. Nakagawa, T. Ushijima, *Numerical Analysis of the Semi-Linear Heat Equation of Blow-up Type*, *Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, **S5** (1976) 1-14. [6](#)
- [56] K. C. N'dri, K. A. Touré , G. Yoro, *Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, *Int. J. Numer. Methods Appl.*, **17** (2018), 141-160.

- [57] K. N'Guessan, *Étude théorique et numérique de l'explosion des solutions de quelques équations aux dérivées partielles de type parabolique*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny, (2017). 11, 109
- [58] K. N'Guessan, D. Nabongo, *Blow-up for Discretization of some Semilinear Parabolic Equations with a Convection Term*, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12 (2016), 3367-3394.
- [59] K. N'Guessan, N. Diabate, K. A. Toure, *Blow-up for Semidiscretizations of some Semilinear Parabolic Equations with a Convection Term*, *Journal of Progressive Research in Mathematics*, 5 (2015), 499-518. 7, 14
- [60] N. Ozalp, B. Selçuk, *Blow-up and quenching for a problem with nonlinear boundary conditions*, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015 (2015), 1-11. 13, 14, 15
- [61] C. V. Pao, *Finite Difference Reaction Diffusion Equations with Nonlinear Boundary Conditions*, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 11 (1995), 355-374. 6
- [62] H. Pei, Z. Li, *Quenching for a parabolic system with general singular terms*, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 7 (2016), 1-10. 79
- [63] F. Quiros, P. Groisman, J. D. Rossi, *Non-simultaneous blow-up in a numerical approximation of a parabolic system*, *Comput. Appl. Math.*, 21 (2002), 813-831. 55
- [64] B. Selçuk, *Quenching behavior of a semilinear reaction-diffusion system with singular boundary condition*, *Turk. J. Math.*, 40 (2016), 166-180. 13, 79
- [65] B. Selçuk, N. Ozalp, *The quenching behavior of a semilinear heat equation with a singular boundary outflux*, *Q. Appl. Math.*, LXXII (2014), 747-752. 13
- [66] J-F. RAULT, *Phénomène d'explosion et existence globale pour quelques problèmes paraboliques sous les conditions au bord dynamiques*, PhD thesis, Université du Littoral Côte d'Opale, (2010). 105
- [67] E. J. P. G. Schmidt, *Boundary Control for the Heat Equation with Non-linear Boundary Condition* *Journal of Differential Equation*, 78 (1989), 89-121. 6
- [68] P. Souplet, *Finite time blow-up for a non-linear parabolic equation with a gradient term and applications*, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 19 (1996), 1317-1333. 6
- [69] P. Souplet, S. Tayachi, *Optimal condition for non-simultaneous blow-up in a reaction-diffusion system*, *J. Math. Soc. Japan*, 56, (2004), 571-584. 55
- [70] J. Stam, *Real-time fluid dynamics for games*, In *Proceedings of the game developer conference*, 18 (2003). 6
- [71] D. Sun, V. S. Manoranjan, H.-M. Yin, *Numerical Solutions for a Coupled Parabolic Equations Arising Induction Heating Processes*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, (2007), 956-964.

- [72] M. Taha, K. Toure, E. Mensah, *Numerical approximation of the blow-up time for a semi-linear parabolic equation with nonlinear boundary equation*, *Far East J. Appl. Math.*, **60** (2012), 125-167. [7](#), [14](#)
- [73] M.G. Teixeira, M.A. Rincon, I.-S. Liu, *Numerical analysis of quenching - Heat conduction in metallic materials*, *Appl. Math. Modelling*, **33** (2009), 2464-2473.
- [74] K. A. Toure, K. N'Guessan, N. Diabate, *Blow-up for Semidiscretizations of some Reaction-Diffusion Equations with a Nonlinear Convection Term*, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, **11** (2015), 4273-4296. [7](#)
- [75] T. K. Ushijima, *On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations*, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **36**, 613-640. [7](#), [14](#), [36](#)
- [76] J. von Below, C. De Coster, *A Qualitative Theory for Parabolic Problems under Dynamical Boundary Conditions*, *Journal of Inequalities and Applications*, **5**, (2000), 467- 486
- [77] M. Wang, Y. Wu, *Global existence and blow-up problems for quasilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, *Appl. Math. Comput.*, **121** (2001), 117-134. [6](#), [11](#), [105](#)
- [78] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities, Ergebnisse der Mathematik Und ihrer Grenzgebiete, Band 55, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.* [13](#)
- [79] X. Yang, Z. Zhou, *Blow-up problems for heat equation with nonlinear piecewise neumann boundary condition*, *Journal of Differential Equations*, **261** (2016), 2738-2783. [11](#), [107](#)
- [80] Ya. B. Zel'dovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich and G. M. Makhviladze, *The Mathematical Theory of Combustion and Explosions, Consultants Bureau, New York, 1985.* [13](#)
- [81] S. N. Zheng, X. F. Song, *Quenching rates for heat equations with coupled nonlinear boundary flux*, *Sci. China Ser. A.*, **51** (2008), 1631-1643. [6](#)
- [82] Y. Zhi, C. Mu, *The quenching behavior of a nonlinear parabolic equation with nonlinear boundary outflux*, *Appl. Math. Comput.*, **184** (2007), 624-630. [6](#)

Numerical Blow-up for A Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions

Kouamé Béranger Edja¹, Kidjébo Augustin Touré¹ & Brou Jean-Claude Koua²

¹ Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

² Université Félix Houphouët-Boigny de Cocody, Côte d'Ivoire

Correspondence: Kouamé Béranger Edja, Laboratoire de Mathématiques et des Nouvelles Technologies de l'Information, Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire.

Received: August 13, 2018 Accepted: August 28, 2018 Online Published: September 6, 2018

doi:10.5539/jmr.v10n5p119

URL: <https://doi.org/10.5539/jmr.v10n5p119>

Abstract

We study numerical approximations of solutions of a heat equation with nonlinear boundary conditions which produce blow-up of the solutions. By a semidiscretization using a finite difference scheme in the space variable we get a system of ordinary differential equations which is an approximation of the original problem. We obtain sufficient conditions which guarantee the blow-up solution of this system in a finite time. We also show that this blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. We present some numerical results to illustrate certain point of our work.

Keywords: numerical blow-up, heat equation, nonlinear boundary, finite difference, arc length transformation, Aitken method

1. Introduction

In this paper, we study the behavior of a semidiscrete approximation of the following heat equation involving nonlinear boundary flux conditions :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), t \in (0, T), \\ u_x(0, t) = u^p(0, t), & u_x(1, t) = u^q(1, t), t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

where p, q are positive constants. The initial function u_0 is a non-negative smooth function satisfying the compatibility conditions $u'_0(0) = u_0^p(0)$, $u'_0(1) = u_0^q(1)$. Here $(0, T)$ is the maximum time interval on which the solution u of (1) exists. The time T may be finite or infinite. When T is infinite, we affirm that the solution u exists globally. When T is finite, the solution u develops a singularity in a finite time, no matter how smooth u_0 is. Namely, we have

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} = +\infty,$$

where $\|u(\cdot, t)\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)|$. In this previous case, we affirm that the solution u blows up in a finite time and this time is called the blow-up time of the solution u .

The theoretical study of blow-up of solutions for heat equations with nonlinear boundary conditions has been the subject of investigations of many authors (Gomez, Márquez & Wolanski, 1991; Hu & Yin, 1994; Levine & Payne, 1974; Ozalp & Selcuk, 2015; Wang & Wu, 2001; Yang & Zhou, 2016; and the references cited therein). In (Ozalp & Selcuk, 2015) Ozalp and Selcuk show that under certain conditions, any positive solution of the problem (1) must blow up in a finite time and the blow-up point occurs only at the boundary $x = 1$. In this paper, we are interested in the numerical study using a semidiscrete scheme of (1). For previous study on numerical approximations of parabolic system with non-linear boundary conditions we refer to (Abia, Lopez-Marcos & Martinez, 1996; Taha, Toure & Mensah, 2012; Toure, N'Guessan & Diabate, 2015; Ushijima, 2000). In (Ushijima, 2000) Ushijima presents rather simple but general sufficient conditions which guarantee that the blow-up time for the original equation is well approximated by that for approximate equations. By using a theorem of Ushijima (Ushijima, 2000) and under certain conditions we show that any positive solution of semidiscrete scheme of (1) blows up in a finite time and the semidiscrete blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero.

The rest of the paper is organized as follows : in the next section, we present a semidiscrete scheme of the problem (1). In Section 3, we give some properties concerning our semidiscrete scheme. In Section 4, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete scheme of (1) blows up in a finite time and this blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we give some numerical results to illustrate our analysis.

2. The Semidiscrete Problem

We introduce the following uniform mesh on the interval $[0, 1]$

$$x_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, I, \quad h = 1/(I - 1).$$

We denote $U_h = U_h(t) = (U_1(t), \dots, U_I(t))^T$ the values of the numerical approximation at the nodes x_i at time t . For semidiscretization of problem (1) we use a finite difference method and obtain the following system of ODEs :

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad i = 2, \dots, I - 1, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} - \frac{2U_1^p(t)}{h}, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\frac{dU_I(t)}{dt} = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2U_I^q(t)}{h}, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$U_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \tag{5}$$

where $\varphi_{i+1} \geq \varphi_i, 1 \leq i \leq I$ and

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \quad t \in (0, T_h),$$

$$\delta^2 U_1(t) = \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2} - \frac{2U_1^p(t)}{h}, \quad t \in (0, T_h),$$

$$\delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2} + \frac{2U_I^q(t)}{h}, \quad t \in (0, T_h).$$

Here $(0, T_h)$ is the maximum time interval on which $\|U_h(t)\|_\infty$ is finite. When T_h is finite, we affirm that the solution U_h blows up in a finite time and the time T_h is called the blow-up time of the solution U_h .

3. Properties of the Semidiscrete Scheme

In this section, we give some auxiliary results for the problem (1).

Definition 1 A function $V_h \in C^1((0, T_h), \mathbb{R}^I)$ is a lower solution of (2)-(5) if

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - \frac{V_{i-1}(t) - 2V_i(t) + V_{i+1}(t)}{h^2} \leq 0, \quad i = 2, \dots, I - 1, \quad t > 0,$$

$$\frac{dV_1(t)}{dt} - \frac{2V_2(t) - 2V_1(t)}{h^2} + \frac{2V_1^p(t)}{h} \leq 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{dV_I(t)}{dt} - \frac{2V_{I-1}(t) - 2V_I(t)}{h^2} - \frac{2V_I^q(t)}{h} \leq 0, \quad t > 0,$$

$$V_i(0) \leq U_i(0), \quad i = 1, \dots, I,$$

where $U_h = (U_1, \dots, U_I)^T$ is solution of (2)-(5). On the other hand, we say that $V_h \in C^1((0, T_h), \mathbb{R}^I)$ is an upper solution of (2)-(5) if these inequalities are reversed.

lemma 2 Let $W_h, V_h \in C^1((0, T_h), \mathbb{R}^I)$ be lower and upper solutions of (2)-(5) respectively, then

$$W_h(t) \leq V_h(t), \quad \forall t \in (0, T_h).$$

Proof Let us define the vector $Z_h(t) = (V_h(t) - W_h(t))e^{\lambda t}$ with λ a real. We have

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} - \frac{Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i+1}(t)}{h^2} - \lambda Z_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, I - 1, \quad t \in (0, T_h), \tag{6}$$

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} - \frac{2Z_2(t) - 2Z_1(t)}{h^2} + \left(-\lambda + \frac{2p\xi^{p-1}(t)}{h}\right)Z_1(t) \geq 0, \quad t \in (0, T_h), \tag{7}$$

$$\frac{dZ_I(t)}{dt} - \frac{2Z_{I-1}(t) - 2Z_I(t)}{h^2} + \left(-\lambda - \frac{2q\xi^{q-1}(t)}{h}\right)Z_I(t) \geq 0, \quad t \in (0, T_h), \tag{8}$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \tag{9}$$

where $\zeta(t)$, $\xi(t)$ lie, respectively, between $V_1(t)$ and $W_1(t)$, and between $V_I(t)$ and $W_I(t)$.

Denote $m = \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} Z_i(t)$ where $T_0 \in (0, T_h)$. Since for $i \in \{1, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ is a continuous function in the compact $[0, T_0]$, there exists $i_0 \in \{1, \dots, I\}$ such that $m = Z_{i_0}(t_{i_0})$. Assume $m < 0$.

Taking λ negative such that

$$\frac{2p\zeta^{p-1}(t_{i_0})}{h} - \lambda > 0 \text{ and } -\frac{2q\xi^{q-1}(t_{i_0})}{h} - \lambda > 0.$$

If $t_{i_0} = 0$, then $Z_{i_0}(0) < 0$, which contradicts (9), hence $t_{i_0} \neq 0$;

if $1 \leq i_0 \leq I$, we have

$$\frac{dZ_{i_0}(t_{i_0})}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_{i_0}) - Z_{i_0}(t_{i_0} - k)}{k} \leq 0,$$

$$\frac{Z_{i_0-1}(t_{i_0}) - 2Z_{i_0}(t_{i_0}) + Z_{i_0+1}(t_{i_0})}{h^2} \geq 0 \text{ if } 2 \leq i_0 \leq I - 1,$$

$$\frac{2Z_{i_0+1}(t_{i_0}) - 2Z_{i_0}(t_{i_0})}{h^2} \geq 0 \text{ if } i_0 = 1,$$

$$\frac{2Z_{i_0-1}(t_{i_0}) - 2Z_{i_0}(t_{i_0})}{h^2} \geq 0 \text{ if } i_0 = I.$$

Moreover by a straightforward computation we get

$$\frac{dZ_{i_0}(t_{i_0})}{dt} - \frac{Z_{i_0-1}(t_{i_0}) - 2Z_{i_0}(t_{i_0}) + Z_{i_0+1}(t_{i_0})}{h^2} - \lambda Z_{i_0}(t_{i_0}) < 0,$$

$$\frac{dZ_1(t_{i_0})}{dt} - \frac{2Z_2(t_{i_0}) - 2Z_1(t_{i_0})}{h^2} + \left(\frac{2p\zeta^{p-1}(t_{i_0})}{h} - \lambda\right)Z_1(t_{i_0}) < 0,$$

$$\frac{dZ_{I-1}(t_{i_0})}{dt} - \frac{2Z_{I-1}(t_{i_0}) - 2Z_I(t_{i_0})}{h^2} + \left(-\frac{2q\xi^{q-1}(t_{i_0})}{h} - \lambda\right)Z_{I-1}(t_{i_0}) < 0,$$

but these inequalities contradict (6)-(8) and the proof is complete.

The results of the next lemma are analogue to those of continuous problem.

lemma 3 Let $U_h \in C^1((0, T_h), \mathbb{R}^I)$ be solution of (2)-(5) with $\varphi_i \geq 0$ such that $\delta^2\varphi_i \geq 0$ and $\varphi_{i+1} > \varphi_i$, for $i = 1, \dots, I - 1$. Then we have

- (i) $U_i(t) \geq 0$ and $U_i(t) \geq \varphi_i, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h)$;
- (ii) $U_{i+1}(t) > U_i(t), \quad i = 1, \dots, I - 1, \quad t \in (0, T_h)$;
- (iii) $\frac{dU_i(t)}{dt} > 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$

Proof

- (i) $\frac{d}{dt}\varphi_i - \delta^2\varphi_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, I$, hence φ_h is a lower solution of (2)-(5). According to the lemma 2 we have

$$U_i(t) \geq \varphi_i \geq 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$$

(ii) Let t_0 be the first $t > 0$, such that $K_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t) > 0$, for $1 \leq i \leq I-1$, but $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$ for a certain $i_0 \in \{1, \dots, I-1\}$. Without loss of generality, we can suppose that i_0 is the smallest integer which satisfies the above equality. We have

$$\begin{aligned} \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_{i_0}(t_0) - K_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &> 0 \quad \text{if } 2 \leq i_0 \leq I-2, \\ \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} &> 0 \quad \text{if } i_0 = 1, \\ \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &> 0 \quad \text{if } i_0 = I-1, \end{aligned}$$

which implies that

$$\begin{aligned} \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &< 0 \quad \text{if } 2 \leq i_0 \leq I-2, \\ \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} - \frac{2U_{i_0}^p(t)}{h} &< 0 \quad \text{if } i_0 = 1, \\ \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} - \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} - \frac{2U_{i_0+1}^q(t)}{h} &< 0 \quad \text{if } i_0 = I-1, \end{aligned}$$

but these contradict (2)-(4) and we obtain the desired result.

(iii) Denote $Z_i(t) = U_i(t + \epsilon) - U_i(t)$, $i = 1, \dots, I$, using (i) we obtain $Z_i(0) \geq 0$.

A straightforward calculation yields

$$\begin{aligned} \frac{dZ_i(t)}{dt} &= \frac{Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-1, \quad t \in (0, T_h), \\ \frac{dZ_1(t)}{dt} &= \frac{2Z_2(t) - 2Z_1(t)}{h^2} - \frac{2p\eta^{p-1}(t)Z_1(t)}{h}, \quad t \in (0, T_h), \\ \frac{dZ_I(t)}{dt} &= \frac{2Z_{I-1}(t) - 2Z_I(t)}{h^2} + \frac{2q\xi^{q-1}(t)Z_I(t)}{h}, \quad t \in (0, T_h), \\ Z_i(0) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

where $\eta(t)$, $\xi(t)$ lie, respectively, between $U_1(t + \epsilon)$ and $U_1(t)$ and between $U_I(t + \epsilon)$ and $U_I(t)$. Below inequality can easily be proved in a manner similar to that of lemma 2

$$Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \forall t \in (0, T_h).$$

This fact implies the desired result.

The next theorem establishes that for each fixed time interval $[0, T^*]$ where the solution u of (1) is defined, the solution of the semidiscrete problem (2)-(5) approximates u , as $h \rightarrow 0$. This theorem will be used in the study of the convergence of the blow-up time of the semidiscrete problem.

Theorem 4 Assume that the problem (1) has a solution $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^*])$ and the initial condition φ_h at (5) verifies

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad h \rightarrow 0, \tag{10}$$

where $u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T$. Then, for h small enough, the semidiscrete problem (2)-(5) has a unique solution $U_h \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I)$ such that

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2), \quad \text{as } h \rightarrow 0. \tag{11}$$

Proof. Let $\sigma > 0$ be such that

$$\|u\|_\infty < \sigma, \quad t \in [0, T^*].$$

Then the problem (2)-(5) has for each h , a unique solution $U_h \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I)$. Let $t(h) \leq T^*$ be the greatest value of $t > 0$ such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \tag{12}$$

The relation (10) implies $t(h) > 0$ for h small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty + \|u(\cdot, t)\|_\infty, \text{ for } t \in (0, t(h)),$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma, \text{ for } t \in (0, t(h)).$$

Let $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t), \forall t \in [0, T^*]$ be the discretization error and let $W_h \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I)$ be such that $W_i(t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(M+1)t}, i = 1, \dots, I, \forall t \in [0, T^*]$, with M a positive constant. We can prove by the lemma 2 that

$$|e_i(t)| < W_i(t), 1 \leq i \leq I, \text{ for } t \in (0, t(h)).$$

We deduce that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(M+1)t}, \text{ for } t \in (0, t(h)).$$

Suppose that $T^* > t(h)$ from 12, we obtain

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(M+1)t}.$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as h tends to zero, we deduce that, $1 \leq 0$, which is impossible. Hence we have $t(h) = T^*$, and the proof is complete.

4. Numerical Blow-Up

In this section, under some assumptions, we show that for each solution of (1) with a nonnegative initial data, there exists a unique solution of the semidiscrete problem (2)-(5) which blows up in finite time and this time converges to the real one when the mesh size goes to zero. For this fact, we show that the hypothesis of the Theorem 1.4 in (Ushijima, 2000) are satisfied.

Step 1 (blow-up of U_h). Suppose that there exists a unique local solution u of problem (1) which blow up in finite time T for an initial data u_0 . Assume that the hypothesis of the Theorem 4 hold.

Then, for h small enough, the semidiscrete problem (2)-(5) has a unique solution $U_h \in C^1([0, T^*], \mathbb{R}^I)$ with $T^* < T$. For the following we define the energy I by

$$I[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx - \frac{1}{q+1} u^{q+1}(1, t) + \frac{1}{p+1} u^{p+1}(0, t), \forall t \in [0, T]. \tag{13}$$

The derivative $I[u](t)$ is given by

$$\frac{dI[u](t)}{dt} = - \int_0^1 (u_t(x, t))^2 dx < 0, \forall t \in [0, T]. \tag{14}$$

Introduce a function J as follows

$$J(t) = \int_0^1 (u(x, t))^2 dx, \forall t \in [0, T]. \tag{15}$$

Then we have

$$\frac{dJ(t)}{dt} = -4I[u](t) + \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(1, t) - \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(0, t), \forall t \in [0, T].$$

As a consequence of (14) we obtain the following inequality

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq -4I[u_0] + \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(1, t) - \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(0, t), \forall t \in [0, T]. \tag{16}$$

Set $H(t) = -4I[u_0] + \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(1, t) - \gamma, \forall t \in [0, T]$, where

$\gamma = \sup \left\{ \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(0, t) : t \in [0, T] \right\}$, since $u(0, \cdot)$ is continuous function in $[0, T]$. We deduce that $\frac{dJ(t)}{dt} \geq H(t)$,

$\forall t \in [0, T)$, and $\lim_{t \rightarrow T} H(t) = \infty$ since the blow-up point of u is $x = 1$.

Hence the condition (b') of (Ushijima, 2000) is checked. Now we denote by

$$I_h[U_h](t) = h \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{1}{h} (U_{i+1}(t) - U_i(t)) \right)^2 + \frac{1}{p+1} U_1^{p+1}(t) - \frac{1}{q+1} U_l^{q+1}(t), \tag{17}$$

$$J_h(t) = h \sum_{i=1}^l U_i^2(t), \tag{18}$$

and

$$H_h(t) = -I_h[U_h](0) + \frac{2(q-1)}{q+1} U_l^{q+1}(t) - \gamma$$

numerical approximations of I, J and H , respectively.

By the Theorem 4 it is easy to see that the condition (A2') of (Ushijima, 2000) holds. Namely, for any $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\varepsilon]} |J(t) - J_h(t)| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T-\varepsilon]} |H(t) - H_h(t)| = 0.$$

Remark that

$$\frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(1, t) = 2(q-1) \int_0^1 u^q(x, t) u_x(x, t) dx + \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(0, t).$$

According to (16), we obtain

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq -4I[u_0] + 2(q-1) \int_0^1 (u(x, t))^q u_x(x, t) dx + \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(0, t) - \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(0, t).$$

When we assume that the initial data satisfies,

$$u_{xx}(x, 0) \geq 0,$$

we have $u_t > 0$ in $(0, 1) \times (0, T)$ (see Ozalp, & Selcusk, 2015), which implies that u_x is monotone increasing. Thus, we obtain

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq -4I[u_0] + 2(q-1) u_x(0, t) \int_0^1 (u(x, t))^q dx + \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(0, t) - \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(0, t),$$

hence

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \beta \int_0^1 (u(x, t))^q dx + \alpha + \Gamma,$$

where $\alpha = \min\{-4I[u_0], -4I_h[\varphi_h]\}$, $\Gamma = \min\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $\beta = 2(q-1) \min\{u_x(0, t) : t \in [0, T]\}$, with

$$\Gamma_1 = \inf \left\{ \frac{2(q-1)}{q+1} u^{q+1}(0, t) - \frac{2(p-1)}{p+1} u^{p+1}(0, t) : t \in [0, T] \right\},$$

$$\Gamma_2 = \inf \left\{ \frac{2(q-1)}{q+1} U_1^{q+1}(t) - \frac{2(p-1)}{p+1} U_1^{p+1}(0, t) : t \in [0, T] \right\},$$

and

$$I_h[\varphi_h] = h \sum_{i=1}^{l-1} \left(\frac{1}{h} (U_{i+1}(0) - U_i(0)) \right)^2 + \frac{1}{p+1} U_1^{p+1}(0) - \frac{1}{q+1} U_l^{q+1}(0).$$

By Jensen's inequality, we have

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq \beta(J)^{\frac{q}{2}} + \alpha + \Gamma,$$

with $q > 2$.

Let $G(s) = \beta(s)^{\frac{q}{2}} + \alpha + \Gamma$.

Therefore it exists R such that

$$\begin{cases} G(s) > 0, \quad \forall s > R \\ \int_R^\infty \frac{ds}{G(s)} < +\infty, \quad \forall q > 2. \end{cases}$$

A straightforward calculation yields us the following inequality

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq G(J_h).$$

We can see that J_h is a C^1 function satisfying the inequality (I1) of (Ushijima, 2000).

The hypothesis (b'), (I1) and ($A2'$) guarantee the blow-up of the solution U_h of (2)-(5) in finite time T_h .

Step 2 (Convergence of blow-up time). From (17) we have

$$\frac{dI_h[U_h](t)}{dt} = -\frac{h}{2}(U_1'(t))^2 - h \sum_{i=2}^{I-1} (U_i'(t))^2 - \frac{h}{2}(U_I'(t))^2 \leq 0,$$

and

$$\frac{dH_h(t)}{dt} = 2(q-1)U_1^q(t) \frac{dU_1(t)}{dt}.$$

A simple computation gives

$$\frac{dJ_h(t)}{dt} \geq H_h(t).$$

$$\frac{dH_h(t)}{dt} \geq 0, \text{ according to Lemma 3.}$$

It is easy to see that the hypothesis (I1') in (Ushijima, 2000) is satisfied.

By virtue of Theorem 1.4 in (Ushijima, 2000), the results are obtained as desired.

5. Numerical Simulation

In this section, we present some numerical approximations to the blow-up time of (2)-(5) for the initial data $\varphi_i = (i-1)h$, $i = 1, \dots, I$, lower solution of (2)-(5) with different values of q and p , where $q \geq 3$ and $q \geq p$. Here the numerical results are given by the algorithm proposed by C. Hirota and K. Ozawa (Hirota & Ozawa, 2006), we briefly present this algorithm. Consider the system of ODEs (2)-(5). We consider the variables t and U_i as functions of the arc length s . Since $ds^2 = dt^2 + dU_1^2 + \dots + dU_I^2$, the variables $t(s)$ and $U_i(s)$ satisfy the system of differential equations

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}}, \\ \frac{dU_i}{ds} = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^I f_i^2}}, \quad i = 1, \dots, I, \\ t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{cases} \tag{19}$$

where $0 < s < \infty$, and

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2U_1^p}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2U_I^q}{h} \end{pmatrix}.$$

It is well known (Hirota & Ozawa, 2006) that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} t(s) = T_h, \text{ and } \lim_{s \rightarrow \infty} \|U_h(s)\|_{\infty} = \infty.$$

For the numerical computation, let us define $s = s_l$ by $s_l = 2^{16} \cdot 2^l$ ($l = 0, 1, \dots, 12$). For each value of l , we apply DOP54 (see Hairer, Nørsett & Wanner, 1993) to system (19) and we get a linearly convergent sequence to the blow-up time $\{t_l^{(k)}\}_{k=1}^{l+1}$. We also accelerate the sequence recursively by Aitken method's :

$$t_{l+2}^{(k+1)} = t_{l+1}^{(k)} - \frac{(t_{l+2}^{(k)} - t_{l+1}^{(k)})^2}{t_{l+2}^{(k)} - 2t_{l+1}^{(k)} + t_l^{(k)}}, \quad l \geq 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

As in (Hirota & Ozawa, 2006), for our experiments we set RTOL = ATOL = 1.d-15 and ITOL=0. Where the parameters RTOL and ATOL are the tolerances of the relative and absolute errors, respectively, and ITOL is used to choose the manner in which the errors are controlled.

Tables and graphics : $\varphi_i = (i - 1)h, i = 1, \dots, I$

In the following tables, in rows, we present the numerical blow-up times T_h , the numbers of iterations n , orders of the approximations s corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Approximation orders are calculated by

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}, \text{ where } h = 1 / (I - 1).$$

Remark 5. *The various tables of our numerical results show that there is a relationship between the blow-up time and the flow on the boundary. If we consider the problem (2)-(5) in the case where the initial data $\varphi(x) = x$ and $q = 3$, we observe from tables 1-3 that the numerical blow-up time is approximately equal to 0.3. When $q = 4$, we observe from Tables 4-7 that the numerical blow-up time is approximately equal to 0.2. Thus we can said that when rise q we have an acceleration of blow-up of the solution. On the other hand, when q is fixed and p is increased, we observe from tables 1-3 and 4-7 that there is a slight diminishes of the blow-up time. Also, from the tables we observe the convergence of blow-up time T_h of the solution of (2)-(5), since the rate of convergence is near 2. This result does not surprise us because of the result established in the previous section.*

I	T_h	n	s
16	0.264970	12527	-
32	0.260386	15008	-
64	0.259024	19880	1.75
128	0.258625	31186	1.77
256	0.258510	53933	1.79
512	0.258477	114522	1.80
1024	0.258468	357602	1.87

Table 1. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 3$, $p = 3$.

I	T_h	n	s
16	0.277556	12317	-
32	0.272857	14343	-
64	0.271467	18685	1.76
128	0.271061	28043	1.77
256	0.270944	50319	1.79
512	0.270911	117269	1.82
1024	0.270902	373244	1.87

Table 3. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 3$, $p = 1$.

I	T_h	n	s
16	0.193469	8670	-
32	0.189455	10563	-
64	0.188243	14549	1.73
128	0.187885	22704	1.76
256	0.187781	39660	1.78
512	0.187752	84020	1.84
1024	0.187744	260848	1.86

Table 5. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 4$, $p = 3$.

I	T_h	n	s
16	0.199975	8499	-
32	0.195868	9986	-
64	0.194633	13108	1.73
128	0.194270	19838	1.77
256	0.194165	36135	1.79
512	0.194135	84981	1.81
1024	0.194128	268863	2.10

Table 7. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 4$, $p = 1$.

I	T_h	n	s
16	0.267491	12557	-
32	0.262877	15093	-
64	0.261506	20507	1.75
128	0.261106	31642	1.77
256	0.260990	54892	1.78
512	0.260957	116438	1.81
1024	0.260948	360972	1.87

Table 2. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 3$, $p = 2$.

I	T_h	n	s
16	0.193186	8599	-
32	0.189180	10386	-
64	0.187970	14159	1.73
128	0.187613	21902	1.76
256	0.187509	38129	1.78
512	0.187479	83182	1.79
1024	0.187471	260478	1.91

Table 4. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 4$, $p = 4$.

I	T_h	n	s
16	0.194600	8702	-
32	0.190565	10653	-
64	0.189347	14767	1.73
128	0.188989	23175	1.77
256	0.188885	40621	1.78
512	0.188855	85542	1.79
1024	0.188847	262486	1.91

Table 6. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $q = 4$, $p = 2$.

In the following, we also give a plot to illustrate our analysis. In the figure below, we can see that the numerical solution blows up in a finite time at the last node.

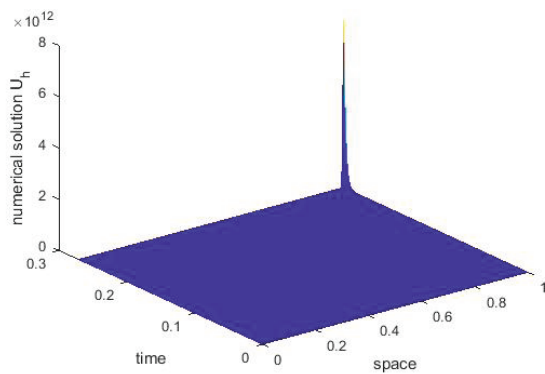


Figure 1. Evolution of the numerical solution for $I=128$, $p=1$ and $q=3$

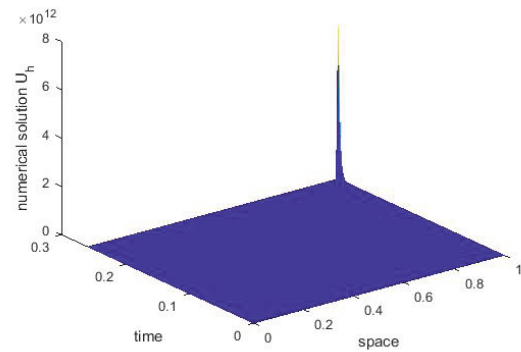


Figure 2. Evolution of the numerical solution for $I=128$, $p=3$ and $q=3$

References

- Abia, L. M., Lopez-Marcos, J. C., & Martinez, J. (1996). Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations. *Appl. Num. Math*, 20, 145-156.
- Gomez, J. L., Márquez, V., & Wolanski, N. (1991). Blow up results and localization of blow up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Differential Equations*, 92, 384-401.
- Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. *Springer Series in Comput. Math.* (2nd ed.). Springer-Verlag.
- Hirota, C., & Ozawa, K. (2006). Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations an application to the blow-up problems of partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 193, 614-637.
- Hu, B., & Yin, H. M. (1994). The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 346, 117-134.
- Levine, H. A., & Payne, L. E. (1974). Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time. *Journal of Differential Equations*, 16, 319-334.
- Ozalp, N., & Selcusk, B. (2015). Blow-up and quenching for a problem with nonlinear boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1-11.
- Taha, M., Toure, K., & Mensah, E. (2012). Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary equation. *Far East J. Appl. Math.*, 60, 125-167.
- Toure K. A., N'Guessan K., & Diabate, N. (2015). Blow-up for semidiscretizations of some reaction-diffusion equations with a nonlinear convection term. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11, 4273-4296.
- Ushijima, T. K. (2000). On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 36, 613-640.
- Wang, M., & Wu, Y. (2001). Global existence and blow-up problems for quasilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, 121, 117-134.
- Yang, X., & Zhou, Z. (2016). Blow-up problems for heat equation with nonlinear piecewise neumann boundary condition. *Journal of Differential Equations*, 261, 2738-2783.

Copyrights

Copyright for this article is retained by the author(s), with first publication rights granted to the journal.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).



Numerical quenching of a heat equation with nonlinear boundary conditions



Kouamé Béranger Edja^{a,*}, Kidjégbo Augustin Touré^a, Brou Jean-Claude Koua^b

^a*Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny Yamoussoukro, BP 2444, Côte d'Ivoire.*

^b*UFR Mathématique et Informatique, Université Félix Houphouët Boigny, Côte d'Ivoire.*

Abstract

In this paper, we study the quenching behavior of semidiscretizations of the heat equation with nonlinear boundary conditions. We obtain some conditions under which the positive solution of the semidiscrete problem quenches in a finite time and estimate its semidiscrete quenching time. We also establish the convergence of the semidiscrete quenching time and obtain some results on numerical quenching rate. Finally we give some numerical results to illustrate our analysis.

Keywords: Numerical quenching, heat equation, nonlinear boundary.

2010 MSC: 35K05, 34B15, 74S20.

©2020 All rights reserved.

1. Introduction

In this paper, we study the behavior of a semidiscrete approximation of the following heat equation involving nonlinear boundary flux conditions:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, a), \quad t \in (0, T), \quad (1.1)$$

$$u_x(0, t) = (1 - u(0, t))^{-p}, \quad u_x(a, t) = (1 - u(a, t))^{-q}, \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

$$0 \leq u(x, 0) = u_0(x) < a, \quad x \in [0, a], \quad (1.3)$$

where $m, n \geq 0, p, q > 0$ and u_0 satisfies the compatibility conditions, i.e., $u_0'(0) = (1 - u_0(0))^{-p}$, $u_0'(a) = (1 - u_0(a))^{-q}$. The problem is said to be quench if there exists a finite time T such that,

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \max_{0 \leq x \leq a} u(x, t) = 1^-.$$

The study of heat equation with nonlinear boundary conditions has deserved a great deal of interest in recent years and has been used to model, for example, heat transfer, polarization phenomena in ionic

*Corresponding author

Email addresses: kouame.edja@inphb.ci (Kouamé Béranger Edja), latoureci@gmail.com (Kidjégbo Augustin Touré), k_brou@hotmail.com (Brou Jean-Claude Koua)

doi: [10.22436/jnsa.013.01.06](https://doi.org/10.22436/jnsa.013.01.06)

Received: 2019-04-10 Revised: 2019-06-15 Accepted: 2019-06-16

conductor, chemical catalyst kinetics, etc. (see [3, 4, 6–9, 14, 15, 17] and the references cited therein). In [4] the authors have given some conditions under which the solution u of (1.1)-(1.3) quenches in a finite time and the quenching occurs only at the boundary $x = a$. They proved that u_t blows up at quenching set and also gave the quenching rate near the quenching time T , which in other word says that there exist constants $C_1, C_2 > 0$ such that $1 - C_1(T - t)^{\frac{1}{q+1}} \leq u(a, t) \leq 1 - C_2(T - t)^{\frac{1}{q+1}}$.

From our knowledge, the numerical approximation of equations (1.1)-(1.3) has not been studied. Thus, in this paper, we are investigated in the numerical study using a semidiscrete form of (1.1)-(1.3). For that, we consider the case where $a = 1$. Let $I \in \mathbb{N}$. We consider a uniform mesh on the interval $[0, 1]$ as

$$x_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, I, \quad h = 1/(I - 1),$$

$U_h = U_h(t) = (U_1(t), \dots, U_I(t))^T$ are the values of the numerical approximation at the nodes x_i at time t of the solution of (1.1)-(1.3). By the finite difference method we obtain the following system of ODEs whose solution is U_h :

$$U'_i(t) = \delta^2 U_i(t), \quad i = 2, \dots, I - 1, \quad t \in (0, T_h), \tag{1.4}$$

$$U'_1(t) = \delta^2 U_1(t) - \frac{2(1 - U_1(t))^{-p}}{h}, \quad t \in (0, T_h), \tag{1.5}$$

$$U'_I(t) = \delta^2 U_I(t) + \frac{2(1 - U_I(t))^{-q}}{h}, \quad t \in (0, T_h), \tag{1.6}$$

$$U_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \tag{1.7}$$

where $0 \leq \varphi_i < 1, 1 \leq i \leq I$ and

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \quad t > 0,$$

$$\delta^2 U_1(t) = \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2}, \quad t > 0, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}, \quad t > 0.$$

We say that the solution of (1.4)-(1.7) quenches in a finite time T_h if

$$\lim_{t \rightarrow T_h} \|U_h(t)\|_\infty = 1.$$

T_h is called the semidiscrete quenching time of (1.4)-(1.7).

For study on numerical approximations of heat equation with non-linear boundary conditions we refer to [1, 5, 10–13, 16]. Nabongo et al. in [12] were interested in the numerical study using a semidiscrete form of

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = -u(1, t)^{-\beta}, \quad t \in (0, T), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

where $\beta > 0$. They showed that some conditions under which the positive solution of the numerical approximation for this heat equation quenches in a finite time, they also established the convergence of the semidiscrete quenching time and obtained some results on numerical quenching rate and set.

Inspired by [4, 5, 12], we give some conditions under which any positive solution of semidiscrete scheme of (1.1)-(1.3) quenches in a finite time. We also show that the semidiscrete quenching time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. The rest of the paper is organized as follows : in the next section, we give some properties concerning our semidiscrete scheme. In Section 3, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete scheme of (1.1)-(1.3) quenches in a finite time, we give a result on numerical quenching rate. In Section 4, we show that the quenching time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we give some numerical results to illustrate our analysis.

2. Properties of the semidiscrete scheme

In this section, we give some auxiliary results for the problem (1.4)-(1.7).

Definition 2.1. A function $V_h \in C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I)$ is a lower solution of (1.4)-(1.7) if

$$\begin{aligned} V_i'(t) - \delta^2 V_i(t) &\leq 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h), \\ V_1'(t) - \delta^2 V_1(t) + \frac{2(1 - V_1(t))^{-p}}{h} &\leq 0, \quad t \in (0, T_h), \\ V_I'(t) - \delta^2 V_I(t) - \frac{2(1 - V_I(t))^{-q}}{h} &\leq 0, \quad t \in (0, T_h), \\ V_i(0) &\leq U_i(0), \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

where $U_h = (U_1, \dots, U_I)^T$ is solution of (1.4)-(1.7). On the other hand, we say that $V_h \in C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I)$ is an upper solution of (1.4)-(1.7) if these inequalities are reversed.

Lemma 2.2. Let $b_h \in C^0([0, T_h], \mathbf{R}^I)$ and let $V_h \in C^1([0, T_h], \mathbf{R}^I)$ such that

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + b_i(t)V_i(t) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq I, \quad t \in (0, T_h), \quad V_i(0) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Then we have $V_i(t) \geq 0, 1 \leq i \leq I, t \in (0, T_h)$.

Proof. Let us define the vector $Z_h(t) = V_h(t)e^{\lambda t}$ with λ a real. We have

$$Z_i'(t) - \delta^2 Z_i(t) + (b_i(t) - \lambda)Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h), \tag{2.1}$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \tag{2.2}$$

Denote $m = \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} Z_i(t)$, where $T_0 \in (0, T_h)$. Since for $i \in \{1, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ is a continuous function on the compact $[0, T_0]$, there exists $i_0 \in \{1, \dots, I\}$ such that $m = Z_{i_0}(t_{i_0})$. Assume $m < 0$. Taking λ such that $b_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda > 0$. If $t_{i_0} = 0$, then $Z_{i_0}(0) < 0$, which contradicts (2.2), hence $t_{i_0} > 0$.

It is not hard to see that

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_{i_0}) - Z_{i_0}(t_{i_0} - k)}{k} \leq 0,$$

moreover by a straightforward computation we get

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) - \delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) + (b_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda)Z_{i_0}(t_{i_0}) < 0,$$

but these inequalities contradict (2.1) and the proof is complete. □

Another form of the maximum principle for semidiscrete equations is the following comparison lemma.

Lemma 2.3. Let $W_h, V_h \in C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I)$ such that for $t \in (0, T_h)$, we have

$$\begin{aligned} W_i'(t) - \delta^2 W_i(t) &\leq V_i'(t) - \delta^2 V_i(t), \quad i = 2, \dots, I-1, \\ W_1'(t) - \delta^2 W_1(t) + g(W_1(t)) &\leq V_1'(t) - \delta^2 V_1(t) + g(V_1(t)), \\ W_I'(t) - \delta^2 W_I(t) + f(W_I(t)) &\leq V_I'(t) - \delta^2 V_I(t) + f(V_I(t)), \\ 0 &\leq W_i(0) \leq V_i(0), \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned}$$

Then we have

$$W_h(t) \leq V_h(t), \quad \forall t \in (0, T_h).$$

Proof. Let us define the vector $Z_h(t) = V_h(t) - W_h(t)$ with λ a real. We have

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) \geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \quad t \in (0, T_h), \tag{2.3}$$

$$Z'_1(t) - \delta^2 Z_1(t) + g'(\zeta(t))Z_1(t) \geq 0, \quad t \in (0, T_h), \tag{2.4}$$

$$Z'_{I-1}(t) - \delta^2 Z_{I-1}(t) - f'(\xi(t))Z_{I-1}(t) \geq 0, \quad t \in (0, T_h), \tag{2.5}$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \tag{2.6}$$

where $\zeta(t)$ and $\xi(t)$ lie, respectively, between $V_1(t)$ and $W_1(t)$, and between $V_{I-1}(t)$ and $W_{I-1}(t)$. We can rewrite (2.3)-(2.6) as

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i(t)Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h),$$

where $b_1(t) = g'(\zeta(t))$, $b_I(t) = -f'(\xi(t))$ and $b_i(t) = 0$, $i = 2, \dots, I-1$, $\forall t \in (0, T_h)$. According to lemma 2.2, $Z_h(t) \geq 0$, $\forall t \in (0, T_h)$ and the proof is complete. \square

The results of the next lemma are analogue to those of continuous problem.

Lemma 2.4. *Let $U_h \in C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I)$ be solution of (1.4)-(1.7) with a nonnegative initial data φ_h such that φ_h is a lower solution and $\varphi_{i+1} > \varphi_i$, for $i = 1, \dots, I-1$. Then we have*

- (i) $U_i(t) \geq 0$ and $U_i(t) \geq \varphi_i$, $i = 1, \dots, I$, $t \in (0, T_h)$;
- (ii) $U_{i+1}(t) > U_i(t)$, $i = 1, \dots, I-1$, $t \in (0, T_h)$;
- (iii) $\frac{dU_i(t)}{dt} > 0$, $i = 1, \dots, I$, $t \in (0, T_h)$.

Proof.

(i) Since φ_h is a lower solution of (1.4)-(1.7), we have

$$U_i(t) \geq \varphi_i \geq 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h),$$

by Lemma 2.3.

(ii) Let t_0 be the first $t > 0$, such that $K_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t) > 0$, for $1 \leq i \leq I-1$, but $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$ for a certain $i_0 \in \{1, \dots, I-1\}$. Without lost of generality, we can suppose that i_0 is the smallest integer which satisfies the above equality. We have

$$\begin{aligned} \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_{i_0}(t_0) - K_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &> 0, \quad \text{if } 2 \leq i_0 \leq I-2, \\ K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)h^2 &> 0, \quad \text{if } i_0 = 1, \\ \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &> 0, \quad \text{if } i_0 = I-1, \end{aligned}$$

which imply that

$$\begin{aligned} \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 2K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} &< 0, \quad \text{if } 2 \leq i_0 \leq I-2, \\ \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} - \frac{K_{i_0+1}(t_0) - 3K_{i_0}(t_0)}{h^2} - \frac{2(1 - U_{i_0}(t))^{-p}}{h} &< 0, \quad \text{if } i_0 = 1, \\ \frac{dK_{i_0}(t_0)}{dt} - \frac{-3K_{i_0}(t_0) + K_{i_0-1}(t_0)}{h^2} - \frac{2(1 - U_{i_0+1}(t))^{-q}}{h} &< 0, \quad \text{if } i_0 = I-1, \end{aligned}$$

but these inequalities contradict (1.4)-(1.6) and we obtain the desired result.

(iii) Denote $Z_i(t) = U_i(t + \varepsilon) - U_i(t)$, $i = 1, \dots, I$, using (i) we obtain $Z_i(0) \geq 0$.

A straightforward calculation yields

$$\begin{aligned} \frac{dZ_i(t)}{dt} &= \frac{Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t) + Z_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I-1, \quad t \in (0, T_h), \\ \frac{dZ_1(t)}{dt} &= \frac{2Z_2(t) - 2Z_1(t)}{h^2} - \frac{2p(1 - \eta(t))^{-p-1}Z_1(t)}{h}, \quad t \in (0, T_h), \\ \frac{dZ_I(t)}{dt} &= \frac{2Z_{I-1}(t) - 2Z_I(t)}{h^2} + \frac{2q(1 - \xi(t))^{-q-1}Z_I(t)}{h}, \quad t \in (0, T_h), \\ Z_i(0) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

where $\eta(t)$ and $\xi(t)$ lie, respectively, between $U_1(t + \varepsilon)$ and $U_1(t)$ and between $U_I(t + \varepsilon)$ and $U_I(t)$. We obtain the below inequality by the same manner as Lemma 2.3

$$Z_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \forall t \in (0, T_h).$$

This fact implies the desired result. □

3. Quenching and quenching rate

In this section, under some assumptions, we show that the solution U_h of (1.4)-(1.7) quenches in a finite time and estimate its semidiscrete quenching time. Moreover we determine the numerical quenching rate and quenching set of the solution.

Theorem 3.1. *Let $U_h(t)$ be the solution of (1.4)-(1.7) such that the initial data φ_h is a lower solution, assumption $q \geq p > 0$. Then there exists a positive constant γ such that U_h quenches in a finite time T_h and we have the following estimate*

$$T_h \leq \frac{(1 - \|\varphi_h\|_\infty)^{q+1}}{\gamma(q+1)}.$$

Proof. Let $(0, T_h)$ be the maximal time interval on which $0 \leq U_h(t) < 1$. Our aim is to show that T_h is finite and satisfies the above inequality. Introduce the function $J_h(t)$ such that

$$J_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt} - \gamma(1 - U_i(t))^{-q}, \quad i = 1, \dots, I.$$

A straightforward calculation gives

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) + \frac{2p}{h}(1 - U_1(t))^{-p-1}J_1(t) &= \frac{2\gamma}{h}(q - p)(1 - U_1(t))^{-p-q-1} + \gamma(\delta^+ U_1(t))^2 g''(\mu_1(t)), \\ \frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) - \frac{2q}{h}(1 - U_I(t))^{-q-1}J_I(t) &= \gamma(\delta^- U_I(t))^2 g''(\theta_I(t)), \\ \frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) &= \gamma(\delta^+ U_i(t))^2 g''(\mu_i(t)) + \gamma(\delta^- U_i(t))^2 g''(\theta_i(t)) \quad i = 2, \dots, I-1, \end{aligned}$$

with $g''(x) = q(q+1)(1-x)^{-q-2}$, $\delta^+ U_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$, $\delta^- U_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$, where θ_i and μ_i lie, respectively, between U_i and U_{i+1} , and between U_i and U_{i-1} . It is not hard to see that

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(t)}{dt} - \delta^2 J_1(t) + \frac{2p}{h}(1 - U_1(t))^{-p-1}J_1(t) &\geq 0, \\ \frac{dJ_I(t)}{dt} - \delta^2 J_I(t) - \frac{2q}{h}(1 - U_I(t))^{-q-1}J_I(t) &\geq 0, \\ \frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) &\geq 0, \quad i = 2, \dots, I-1. \end{aligned}$$

Moreover, using the fact that φ_h is a lower solution, we obtain $J_h(0) \geq 0$. We deduce from Lemma 2.2 that $J_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, I$. As a consequence we get

$$(1 - U_i(t))^q dU_i(t) \geq \gamma dt. \tag{3.1}$$

Integrating (3.1) from 0 to t we obtain

$$(1 - U_i(t))^{q+1} \leq (1 - \varphi_i)^{q+1} - \gamma(q+1)t, \quad i = 1, \dots, I.$$

Denote $\|\varphi_h\|_\infty = \varphi_{i_0}$ and $\|U_h(t)\|_\infty = U_{i_0}(t)$ for a certain $i_0 \in \{1, \dots, I\}$. Which means that $\|U_h(T_0)\|_\infty = 1$ for some $T_0 = \frac{(1 - \|\varphi_h\|_\infty)^{q+1}}{\gamma(q+1)}$. Thus U_h quenches in finite time $T_h \leq T_0$. \square

Theorem 3.2. *Under the assumptions of Theorem 3.1 and Lemma 2.4, the solution U_h of (1.4)-(1.7) quenches in a finite time T_h and*

$$1 - \|U_h(t)\|_\infty \sim (T_h - t)^{\frac{1}{q+1}} \text{ for } t \in (0, T_h).$$

Proof. From Theorem 3.1 U_h quenches in a finite time T_h . Integrating the above inequalities (3.1) over (t, T_h) we obtain

$$T_h - t \leq \frac{(1 - U_i(t))^{q+1}}{\gamma(q+1)}, \quad i = 1, \dots, I, \tag{3.2}$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 - C_2(T_h - t)^{1/(q+1)},$$

where $C_2 = (\gamma(q+1))^{1/(q+1)}$. From Lemma 2.4, $U_i < U_{i+1}$, for $1 \leq i \leq I-1$, hence $\|U_h(t)\|_\infty = U_I(t)$, for $t \in (0, T_h)$. It follows from (1.6) that

$$\frac{dU_I(t)}{dt} \leq \frac{2}{h}(1 - U_I(t))^{-q},$$

which implies that $(1 - U_I(t))^q dU_I(t) \leq \frac{2}{h} dt$. Thus we have

$$1 - C_1(T_h - t)^{1/(q+1)} \leq \|U_h(t)\|_\infty, \text{ where } C_1 = \left(\frac{2(q+1)}{h}\right)^{1/(q+1)},$$

and we have the desired result. \square

Theorem 3.3. *If $\lim_{t \rightarrow T_h^-} U_I(t) = 1$, then $U'_h(t)$ blows up.*

Proof. Suppose $U'_h(t)$ is bounded. Then, there exists a positive constant M such that $U'_h(t) < M$. We have

$$\sum_{i=2}^I \sum_{j=i}^I h^2 U'_j(t) \leq \sum_{i=2}^I \sum_{j=i}^I h^2 M.$$

From (1.4)-(1.6) and lemma 2.4 we get

$$\frac{1}{(1 - U_I(t))^q} < \frac{M}{2} + \frac{hM}{2} + U_I(t) - U_1(t).$$

As $t \rightarrow T_h^-$, the left-hand side tends to infinity while the right-side is finite. This contradiction shows that $U'_h(t)$ blows up. \square

4. Convergence of the semidiscrete quenching time

In this section, we study the convergence of the semidiscrete quenching time. Now we will show that for each fixed time interval $[0, T]$, where u is defined, the solution U_h of (1.4)-(1.7) approximates u when the mesh parameter h goes to zero. We denote

$$u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T \quad \text{and} \quad \|U_h(t)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I} |U_i(t)|.$$

Theorem 4.1. *Assume that the problem (1.1)-(1.3) has a solution $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^*])$ and the initial condition φ_h at (1.7) verifies*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad h \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Then, for h small enough, the semidiscrete problem (1.4)-(1.7) has a unique solution $U_h \in C^1([0, T^], \mathbf{R}^I)$ such that*

$$\max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2), \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

Proof. Let $\sigma > 0$ be such that

$$\|u\|_\infty < \sigma, \quad t \in [0, T^*].$$

Then the problem (1.4)-(1.7), for each h , has a unique solution $U_h \in C^1([0, T^*], \mathbf{R}^I)$. Let $t(h) \leq T^*$ be the greatest value of $t > 0$ such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1. \quad (4.2)$$

The relation (4.1) implies $t(h) > 0$ for h small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty + \|u(\cdot, t)\|_\infty, \quad \text{for } t \in (0, t(h)),$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma, \quad \text{for } t \in (0, t(h)).$$

Let $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$, $\forall t \in [0, T^*]$ be the discretization error and let $W \in C^{4,1}([0, 1], [0, T^*])$ be such that $W(x, t) = (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(M+1)t + \sqrt{M+1}x}$, $\forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*]$, with M a positive constant. We can prove by Lemma 2.3 that

$$|e_i(t)| < W(x_i, t), \quad 1 \leq i \leq I, \quad \text{for } t \in (0, t(h)).$$

We deduce that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(M+1)t + \sqrt{M+1}}, \quad \text{for } t \in (0, t(h)).$$

Suppose that $T^* > t(h)$ from (4.2), we obtain

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Mh^2) e^{(M+1)t(h) + \sqrt{M+1}}.$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as h tends to zero, we deduce that, $1 \leq 0$, which is impossible. Hence we have $t(h) = T^*$, and the proof is complete. \square

Theorem 4.2. *Suppose that the solution u of (1.1)-(1.3) quenches in a finite time T such that $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T])$ and the initial condition at (1.7) satisfies*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad h \rightarrow 0.$$

Then the solution U_h of (1.4)-(1.7) quenches in a finite time T_h and we have

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Proof. Set $\varepsilon > 0$. There exists $\eta > 0$ such that

$$\frac{(1 - y)^{q+1}}{\gamma(q + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq y \leq \eta. \tag{4.3}$$

Since $u(x, t)$ quenches in a finite time T , there exists a time $T_0 < T$ such that $|T_0 - T| < \frac{\varepsilon}{2}$ and $0 \leq \|u(x, t)\|_\infty \leq \frac{\eta}{2}$ for $t \in [T_0, T]$. Setting $T_1 = \frac{T_0 + T}{2}$, it is not hard to see that $\|u(x, t)\|_\infty < 1$ for $t \in [0, T_1]$. From Theorem 4.1, we have $\|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty \leq \frac{\eta}{2}$. Applying the triangle inequality, we get

$$\|U_h(T_1)\|_\infty \leq \|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty + \|u_h(T_1)\|_\infty \leq \eta.$$

From Theorem 3.1, U_h quenches in a finite time T_h . We deduce from (3.2) and (4.3) that

$$|T_h - T| \leq |T_h - T_1| + |T_1 - T| \leq \frac{(1 - \|U_h(T_1)\|_\infty)^{q+1}}{\gamma(q + 1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad \square$$

5. Numerical experiments

In this section, we present some numerical approximations to the quenching time of (1.4)-(1.7), the initial data φ_h such

$$\alpha\varphi_2 \geq (1 - \varphi_1)^{-p}, \tag{5.1}$$

where $\alpha > 0$. We use the following explicit scheme

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t_h^{ne}} &= \frac{u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \\ \frac{u_1^{(n+1)} - u_1^{(n)}}{\Delta t_h^{ne}} &= \frac{2u_2^{(n)} - 2u_1^{(n)}}{h^2} - \frac{2}{h} (1 - u_1^{(n)})^{-p}, \\ \frac{u_I^{(n+1)} - u_I^{(n)}}{\Delta t_h^{ne}} &= \frac{2u_{I-1}^{(n)} - 2u_I^{(n)}}{h^2} + \frac{2}{h} (1 - u_I^{(n)})^{-q}, \\ u_i^{(0)} &= \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq I, \end{aligned}$$

where $n \geq 0$, $\Delta t_h^{ne} = \min \left\{ \frac{h^2}{2}, h^2 \|u_h^{(n)}\|_\infty^{q+1} \right\}$. We also consider the implicit scheme

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{\Delta t_h^n} &= \frac{u_{i+1}^{(n+1)} - 2u_i^{(n+1)} + u_{i-1}^{(n+1)}}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \\ \frac{u_1^{(n+1)} - u_1^{(n)}}{\Delta t_h^n} &= \frac{2u_2^{(n+1)} - 2u_1^{(n+1)}}{h^2} - \frac{2}{h} (1 - u_1^{(n)})^{-p}, \\ \frac{u_I^{(n+1)} - u_I^{(n)}}{\Delta t_h^n} &= \frac{2u_{I-1}^{(n+1)} - 2u_I^{(n+1)}}{h^2} + \frac{2}{h} (1 - u_I^{(n)})^{-q}, \\ u_i^{(0)} &= \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq I, \end{aligned}$$

where $n \geq 0$, $\Delta t_h^n = h^2 \|u_h^{(n)}\|_\infty^{q+1}$.

Let us notice that (5.1) and the restriction on the time step guarantee the positivity of the discrete solution. We need the following definition.

Definition 5.1. We say that the discrete solution $u_h^{(n)}$ of the explicit scheme or the implicit scheme quenches in a finite time if $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_h^{(n)}\|_\infty = 1$ and the series $\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta t_h^n$ converges. The quantity $t_h^n = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_h^j$ is called the numerical quenching time of the solution $u_h^{(n)}$ and $T_h = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta t_h^n$ is called the numerical quenching time of the solution u_h .

In Tables 1, 2, 3, and 4, in rows, we present the numerical quenching times, the numbers of iterations and the orders of the approximations corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. We take for the numerical quenching time $T_h = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta t_h^n$ which is computed at the first time when $\Delta t_h^n = |t_h^{n+1} - t_h^n| \leq 10^{-16}$. The order(s) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}, \text{ where } h = 1/(I - 1).$$

For the numerical values, we take $\varphi_i = \sqrt{1.5} - \cos(\frac{\pi(i-1)h}{4})$ for $i = 1, \dots, I$.

Table 1: Numerical quenching times obtained with the explicit Euler method for $q = 0.5, p = 0.5$.

I	T_h	n	s
16	0.04139596	236	-
32	0.03955588	679	-
64	0.03900581	2164	1.74
128	0.03884205	7556	1.75
256	0.03879396	28153	1.77
512	0.03878005	108750	1.79
1024	0.03877610	427914	1.82

Table 2: Numerical quenching times obtained with the implicit Euler method for $q = 0.5, p = 0.5$.

I	T_h	n	s
16	0.04221929	237	-
32	0.03975759	680	-
64	0.03905612	2163	1.81
128	0.03885465	7558	1.80
256	0.03879711	28155	1.81
512	0.03878084	108753	1.82
1024	0.03877629	427917	1.84

Table 3: Numerical quenching times, obtained with the explicit Euler method for $q = 1, p = 0.5$.

I	T_h	n	s
16	0.00972448	129	-
32	0.00813955	310	-
64	0.00763971	816	1.66
128	0.00748449	2434	1.69
256	0.00743743	8155	1.72
512	0.00742349	29675	1.76
1024	0.00741945	113290	1.79

Table 4: Numerical quenching times obtained with the implicit Euler method for $q = 1, p = 0.5$.

I	T_h	n	s
16	0.01036564	129	-
32	0.00830903	311	-
64	0.00768367	818	1.72
128	0.00749576	2436	1.73
256	0.00744028	8158	1.76
512	0.00742421	29678	1.79
1024	0.00741963	113293	1.81

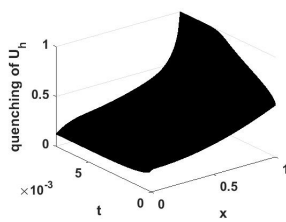


Figure 1: Evolution of the numerical solution U_h for $I = 64, q = 1$ and $p = 0.5$.

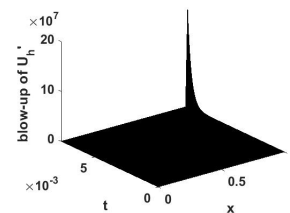


Figure 2: Evolution of U'_h for $I = 64, q = 1$ and $p = 0.5$.

Remark 5.2. The various tables of our numerical results show that there is a relationship between the quenching time and the flows on the boundaries. If we consider the problem (1.4)-(1.7) in the case where the initial data $\varphi(x) = \sqrt{1.5} - \cos(\frac{\pi x}{4})$ and $q = 0.5$, we observe from Tables 1 and 2 that the numerical quenching time is approximately equal to 0.038. When $q = 1$, we observe from Tables 3 and 4 that the numerical blow-up time is approximately equal to 0.0074. Thus we can say that when rise q we have an acceleration of quench of the solution. Also, from the tables we observe the convergence of blow-up time T_h of the solution of (1.4)-(1.7), since the rate of convergence is near 2. This result does not surprise us because of the result established in the previous section.

References

- [1] K. A. Adou, K. A. Touré, A. Coulibaly, *Numerical study of the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations*, Far East J. Appl. Math., **4** (2018), 291–308. 1
- [2] T. K. Boni, *Extinction for discretizations of some semilinear parabolic equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333** (2001), 795–800.
- [3] T. K. Boni, B. Y. Diby, *Quenching time of solutions for some nonlinear parabolic equations with Dirichlet boundary condition and a potential*, Ann. Math. Inform., **35** (2008), 31–42. 1
- [4] C. Y. Chan, S. I. Yuen, *Parabolic problems with nonlinear absorptions and releases at the boundaries*, Appl. Math. Comput., **121** (2001), 203–209. 1, 1
- [5] K. B. Edja, K. A. Touré, B. J.-C. Koua, *Numerical Blow-up for a Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions*, J. Math. Res., **10** (2018), 119–128. 1
- [6] H. Kawarada, *On Solutions of Initial-Boundary Problem for $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$* , Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10** (1975), 729–736. 1
- [7] C. M. Kirk, C. A. Roberts, *A quenching problem for the heat equation*, J. Integral Equations Appl., **14** (2002), 53–72.
- [8] H. A. Levine, *The Quenching of Solutions of Linear Parabolic and Hyperbolic Equations with Nonlinear Boundary Conditions*, SIAM J. Math. Anal., **4** (1983), 1139–1153.
- [9] H. A. Levine, J. T. Montgomery, *The quenching of solutions of some nonlinear parabolic equations*, SIAM J. Math. Anal., **11** (1980), 842–847. 1
- [10] K. W. Liang, P. Lin, R. C. E. Tan, *Numerical Solution of Quenching Problems Using Mesh-Dependent Variable Temporal Steps*, Appl. Numer. Math., **57** (2007), 791–800. 1
- [11] T. M. Mathurin, T. K. Augustin, M. E. Patrice, *Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary equation*, Far East J. Math. Sci. (FJMS), **60** (2012), 125–167.
- [12] D. Nabongo, T. K. Boni, *Quenching for semidiscretizations of a heat equation with a singular boundary condition*, Asymptot. Anal., **59** (2008), 27–38. 1
- [13] K. C. N’dri, K. A. Touré, G. Yoro, *Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Int. J. Numer. Methods Appl., **17** (2018), 141–160. 1
- [14] B. Seluk, *Quenching behavior of a semilinear reaction-diffusion system with singular boundary condition*, Turkish J. Math., **40** (2016), 166–180. 1
- [15] B. Seluk, N. Ozalp, *The quenching behavior of a semilinear heat equation with a singular boundary outflux*, Quart. Appl. Math., **72** (2014), 747–752. 1
- [16] M. G. Teixeira, M. A. Rincon, I.-S. Liu, *Numerical analysis of quenching-Heat conduction in metallic materials*, Appl. Math. Model., **33** (2009), 2464–2473. 1
- [17] Y. H. Zhi, C. L. Mu, *The quenching behavior of a nonlinear parabolic equation with nonlinear boundary outflux*, Appl. Math. Comput., **184** (2007), 624–630. 1



NUMERICAL BLOW-UP FOR HEAT EQUATIONS WITH COUPLED NONLINEAR BOUNDARY FLUXES

**Kouamé Béranger Edja^{a,*}, Koffi N'Guessan^b, Brou Jean-Claude Koua^c
and Kidjegbo Augustin Touré^a**

^aInstitut National Polytechnique Houphouët-Boigny Yamoussoukro

BP 2444, Côte d'Ivoire

e-mail: kouame.edja@inphb.ci

^bUFR SED

Université Alassane Ouattara

01 BP V 18 Bouaké 01, Côte d'Ivoire

^cUFR Mathématique et Informatique

Université Félix Houphouët Boigny

Côte d'Ivoire

Abstract

In this paper, we study the blow-up behavior of semidiscretizations of the blow-up for heat equations coupled with nonlinear boundary conditions. We obtain some conditions under which the positive solution of the semidiscrete equations blows up in a finite time and estimates its semidiscrete blow-up time. We also establish the convergence blow-up time when the mesh parameter goes to zero. Finally we give some numerical results to illustrate our analysis.

Received: June 6, 2019; Accepted: July 13, 2019

2010 Mathematics Subject Classification: 65N06, 35K05, 35K51.

Keywords and phrases: numerical blow-up, non-simultaneous, heat equation, nonlinear boundary.

*Corresponding author

1. Introduction

In this paper we study the behavior of semidiscrete approximations of the heat equations coupled via nonlinear boundary fluxes.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & v_t = v_{xx}, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ -u_x(0, t) = u^m(0, t) + v^p(0, t), & -v_x(0, t) = u^q(0, t) + v^n(0, t), \quad t \in (0, T), \\ u_x(1, t) = u^m(1, t) + v^p(1, t), & v_x(1, t) = u^q(1, t) + v^n(1, t), \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

where $m, n \geq 0$, $p, q > 0$, u_0 and v_0 are positive smooth functions satisfying the compatibility conditions

$$-u'_0(0) = u_0^m(0) + v_0^p(0), \quad -v'_0(0) = u_0^q(0) + v_0^n(0),$$

$$u'_0(1) = u_0^m(1) + v_0^p(1), \quad v'_0(1) = u_0^q(1) + v_0^n(1).$$

Here $[0, T)$ is the maximum time interval on which the solution (u, v) of (1) exists. The time T may be finite or infinite. When T is infinite, we affirm that the solution (u, v) exists globally. When T is finite, the solution (u, v) develops a singularity in a finite time. Namely, we have

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|v(\cdot, t)\|_\infty = +\infty.$$

In this previous case, we affirm that the solution (u, v) blows up in a finite time and this time is called the blow-up time of the solution (u, v) .

Phenomena of blow-up for the heat equations coupled has been the subject of investigations of many authors (see [1, 3, 4, 6, 9, 10, 12] and the references cited therein). For our problem, there exist solutions (u, v) that blow up in finite time T , if and only if $\max\{m, n, pq\} > 1$, see [9]. It is proved that, if $m < q + 1$ and $n < p + 1$, then blow-up must be simultaneous, and that, non-simultaneous blow-up occurs for some initial

data if and only if $m > q + 1$ or $n > p + 1$. They find three regions: (i) $q + 1 < m < p/(p + 1 - n)$ and $n < p + 1$, (ii) $p + 1 < n < q/(q + 1 - m)$ and $m < q + 1$, (iii) $m > q + 1$ and $n > p + 1$, where both simultaneous and non-simultaneous blow-up are possible. In this paper, we investigate in the numerical study using a semidiscrete form of (1). For that, we consider a uniform mesh on the interval $[0, 1]$

$$x_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, I, \quad h = 1/(I - 1),$$

$U_h(t) = (U_1(t), \dots, U_I(t))^T$, $V_h(t) = (V_1(t), \dots, V_I(t))^T$, where $U_i(t)$ and $V_i(t)$ are the values of the numerical approximation of u and v at the nodes x_i at time t . We also denote $\varphi_{1,i}$ and $\varphi_{2,i}$, respectively, the values of the numerical approximation of u_0 and v_0 at the nodes x_i . By the finite difference method we obtain the following system of ODEs whose solution is (U_h, V_h) :

$$U_i'(t) = \delta^2 U_i(t) + b_i(U_i^m(t) + V_i^p(t)), \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h), \quad (2)$$

$$V_i'(t) = \delta^2 V_i(t) + b_i(U_i^q(t) + V_i^n(t)), \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h), \quad (3)$$

$$U_i(0) = \varphi_{1,i}, \quad V_i(0) = \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I, \quad (4)$$

where

$$0 < \varphi_{1,i}, \quad 0 < \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I,$$

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \quad t \in (0, T_h),$$

$$\delta^2 U_1(t) = \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}, \quad t \in (0, T_h),$$

$$b_1 = \frac{2}{h}, \quad b_I = \frac{2}{h}, \quad \text{and } b_i = 0, \quad i = 2, \dots, I - 1.$$

We say that the solution of (2)-(4) blows up in a finite time T_h if

$$\lim_{t \rightarrow T_h} \|U_h(t)\|_\infty + \|V_h(t)\|_\infty = \infty.$$

T_h is called the semidiscrete blow-up time of (2)-(4). We show that our semidiscrete scheme reproduces well the conditions for the blow-up of system (2)-(4) and the semidiscrete blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. For previous work on numerical approximations of blowing up solutions we refer to ([1, 2, 5, 11, 14] and the references cited therein). The rest of the paper is organized as follows: in the next section, we give some properties concerning our semidiscrete scheme (2)-(4). In Section 3, under some conditions, we prove that the solution of (2)-(4) blows up in a finite time and this blow-up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we give some numerical results to illustrate our analysis.

2. Properties of the Semidiscrete Scheme

In this section, by the methods similar to that of [5, 11, 14], we give some auxiliary results for the problem (2)-(4) without proof.

Definition 1. We say that $(\underline{U}_h, \underline{V}_h) \in (C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I))^2$ is a *lower solution* of (2)-(4) if

$$\underline{U}'_i(t) \leq \delta^2 \underline{U}_i(t) + b_i(\underline{U}_i^m(t) + \underline{V}_i^p(t)), \quad i = 1, \dots, I, t > 0,$$

$$\underline{V}'_i(t) \leq \delta^2 \underline{V}_i(t) + b_i(\underline{U}_i^q(t) + \underline{V}_i^n(t)), \quad i = 1, \dots, I, t > 0,$$

$$\underline{U}_i(0) \leq \varphi_{1,i}, \quad \underline{V}_i(0) \leq \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I,$$

where (U_h, V_h) is solution of (2)-(4). On the other hand, we say that $(\overline{U}_h, \overline{V}_h) \in (C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I))^2$ is an *upper solution* of (2)-(4) if these inequalities are reversed.

Lemma 2 (Discrete maximum principle). *Let*

$$e_h, c_h, \alpha_h, \beta_h \in (C^0([0, T], \mathbf{R}^I))$$

and

$$U_h, V_h \in C^1([0, T_h], \mathbf{R}^I)$$

such that

$$U_i'(t) - \delta^2 U_i(t) - e_i(t)U_i(t) - c_i(t)V_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h),$$

$$V_i'(t) - \delta^2 V_i(t) - \alpha_i(t)U_i(t) - \beta_i(t)V_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h),$$

$$U_i(0) \geq 0, V_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I.$$

Then we have

$$U_i(t) \geq 0, \quad V_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$$

Lemma 3 (Comparison lemma). *Let $(\underline{U}_h, \underline{V}_h)$ and $(\overline{U}_h, \overline{V}_h)$ be lower and upper solutions of (2)-(4) respectively such that $(\underline{U}_h(0), \underline{V}_h(0)) \leq (\overline{U}_h(0), \overline{V}_h(0))$. Then*

$$(\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t)) \leq (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)).$$

Lemma 4. *Let $(U_h, V_h) \in (C^1((0, T_h), \mathbf{R}^I))^2$ be solution of (2)-(4) with a non-negative initial data $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ lower solution such that $(\varphi_{1,i+1}, \varphi_{2,i+1}) > (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$, for $i = 1, \dots, I - 1$. Then we have*

$$(i) \quad (U_i(t), V_i(t)) \geq (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h);$$

$$(ii) \quad (U_{i+1}(t), V_{i+1}(t)) > (U_i(t), V_i(t)), \quad i = 1, \dots, I - 1, \quad t \in (0, T_h);$$

$$(iii) \quad (U_i'(t), V_i'(t)) > 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$$

Now, we prove a uniform convergence result for the numerical

scheme, we show that for each interval time $[0, T]$, where u is defined, the solution of the semidiscrete problem (2)-(4) approximates u , when the mesh parameter h goes to zero. In the following we denote $u_h(t) = (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T$.

Theorem 5. *Assume that the problem (1) has a solution*

$$(u, v) \in (C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^*]))^2$$

and the initial data $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ at (2)-(4) verifies

$$\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty = o(1) \quad h \rightarrow 0. \quad (5)$$

Then, for h small enough, the semidiscrete problem (2)-(4) has a unique solution $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T^*], \mathbf{R}^I))^2$ such that

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \\ &= O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2), \text{ as } h \rightarrow 0, \\ & \max_{t \in [0, T^*]} \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty \\ &= O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2), \text{ as } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Proof. Let $\sigma > 0$ be such that

$$(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty) < \sigma, \quad t \in [0, T^*]. \quad (6)$$

Then the problem (2)-(4) has for each h , a unique solution $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T^*], \mathbf{R}^I))^2$. Let $t(h) \leq T^*$ be the greatest value of $t > 0$ such that

$$\max\{\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty\} < 1. \quad (7)$$

The relation (5) implies $t(h) > 0$ for h small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \text{ and } \|V_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \text{ for } t \in (0, t(h)). \quad (8)$$

Let $(e_{1,i}, e_{2,i})(t) = (U_i - u(x_i), V_i - v(x_i))(t)$, for $i = 1, \dots, I$, $t \in [0, T^*]$ be the discretization error. Let $(z, w) \in (C^{4,1}([0, 1], [0, T^*]))^2$ be such that

$$z(x, t) = (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2)e^{(M+4C^2)t+2Cx}$$

and $w = z$, $\forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*]$, with M, C positive constants such that $M > K$ and $C > L$. We can prove by Lemma 3 that

$$(|e_{1,i}(t)|, |e_{2,i}(t)|) < (z(x_i, t), w(x_i, t)), 1 \leq i \leq I, \text{ for } t \in (0, t(h)).$$

We deduce that

$$\begin{aligned} & \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \\ & \leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2)e^{(M+4C^2)t+2C}, \\ & \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty \\ & \leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2)e^{(M+4C^2)t+2C}, \end{aligned}$$

for $t \in (0, t(h))$. Suppose that $T^* > t(h)$ from (7), we obtain

$$\begin{aligned} 1 & = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \\ & \leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2)e^{(M+4C^2)t+2C}. \end{aligned}$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as h tends to zero, we deduce that, $1 \leq 0$, which is impossible. Hence we have $t(h) = T^*$, and the proof is completed. \square

3. Blow-up and Convergence of the Blow-up Time

Now, under some assumptions, we show that for each solution of (1) with a nonnegative initial data, there exists a unique solution of the

semidiscrete problem (2)-(4) which blows up in finite time and this time converges to the real one when the mesh size goes to zero.

Theorem 6. *Every positive solution (U_h, V_h) of (2)-(4) exists globally if*

$$\max\{m, n, pq\} \leq 1.$$

Proof. Let \bar{U}_h and \bar{V}_h such that

$$\bar{U}_i(t) = Ke^{k_1 t + (i-1)hk_2}, \quad \bar{V}_i(t) = Le^{l_1 t + (i-1)hl_2}, \quad i = 1, \dots, I,$$

where K, L, k_j, l_j ($j = 1, 2$) are positive constants satisfying

$$K \geq \max_{1 \leq i \leq I} U_i(0), \quad L \geq \max_{1 \leq i \leq I} V_i(0),$$

$$k_1 = l_1 p \geq \max\{M, N\}, \quad k_2 = l_2 p,$$

with

$$M = \frac{2}{h^2} (\exp(hk_2) - 1 + h(K^m + L^p)/K),$$

$$N = \frac{2}{h^2} (\exp(hl_2) - 1 + h(K^q + L^n)/L).$$

It is easy to check that (\bar{U}_h, \bar{V}_h) satisfies

$$\bar{U}_i'(t) \geq \delta^2 \bar{U}_i(t) + b_i \bar{U}_i^m(t) + b_i \bar{V}_i^p(t), \quad i = 1, \dots, I, \quad t > 0$$

$$\bar{V}_i'(t) \geq \delta^2 \bar{V}_i(t) + b_i \bar{U}_i^q(t) + b_i \bar{V}_i^n(t), \quad i = 1, \dots, I, \quad t > 0.$$

Together with $\bar{U}_i(0) \geq U_i(0), \bar{V}_i(0) \geq V_i(0)$. Due to Lemma 3, we conclude that (\bar{U}_h, \bar{V}_h) is a global super solution of (2)-(4). \square

Theorem 7. *Let (U_h, V_h) be the solution of the semidiscrete problem (2)-(4). If $m > 1$ or $n > 1$ and if there exists a real $\gamma > 0$ such that*

$$\delta^2 \varphi_{1,i} + b_i \varphi_{1,i}^m + b_i \varphi_{2,i}^p \geq \gamma (b_i \varphi_{1,i}^m + b_i \varphi_{2,i}^p), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h) \quad (9)$$

$$\delta^2 \varphi_{2,i} + b_i \varphi_{1,i}^q + b_i \varphi_{2,i}^n \geq \gamma(b_i \varphi_{1,i}^q + b_i \varphi_{2,i}^n), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h). \quad (10)$$

Then the solution (U_h, V_h) blows up in a finite time T_h .

Proof. We only prove case where $m > 1$.

Introduce the functions J_h and I_h such that

$$J_h(t) = U_h'(t) - \gamma((U_h(t))^m + (V_h(t))^p), \quad t \in (0, T_h),$$

$$I_h(t) = V_h'(t) - \gamma((U_h(t))^q + (V_h(t))^n), \quad t \in (0, T_h).$$

A straightforward calculation gives

$$J_i'(t) - \delta^2 J_i(t) - m b_i (U_i(t))^{m-1} J_i(t) - p b_i (V_i(t))^{p-1} I_i(t) \geq 0,$$

$$i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h)$$

$$I_i'(t) - \delta^2 I_i(t) - q b_i (U_i(t))^{q-1} J_i(t) - n b_i (V_i(t))^{n-1} I_i(t) \geq 0,$$

$$i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h).$$

Thereby $(J_h(t), I_h(t)) \geq 0$ by using Lemma 2 and our assumption on the initial data.

Suppose $\max\{m, n\} = m$, since $J_h(t) \geq 0$, we have the next inequality

$$\frac{d\|U_h(t)\|_\infty}{dt} \geq \gamma \|U_h(t)\|_\infty^m. \quad (11)$$

Therefore U_h blows up in a finite time T_h and moreover, integrating (11)

$$\text{from } 0 \text{ to } T_h \text{ we can show that } T_h \leq \frac{\|\varphi_{1,h}\|_\infty^{1-m}}{\gamma(m-1)}.$$

Proceeding as before, we show that V_h blows up in a finite time T_h if $n > 1$ and

$$T_h \leq \frac{\|\varphi_{2,h}\|_\infty^{1-n}}{\gamma(n-1)}.$$

Moreover if, $m, n > 1$, then (U_h, V_h) blows up in a finite time T_h and

$$T_h \leq \min \left\{ \frac{\|\varphi_{1,h}\|_\infty^{1-m}}{\gamma(m-1)}, \frac{\|\varphi_{2,h}\|_\infty^{1-n}}{\gamma(n-1)} \right\}.$$

Remark 8. Integrating the inequalities (11) over (t, T_h) , we get

$$\frac{1}{m-1} \frac{1}{\|U_h(t)\|_\infty^{m-1}} \geq \gamma(T_h - t)$$

and there exists a constant $C_{m,1} > 0$ such that

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq C_{m,1}(T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}, \quad t \in (0, T_h)$$

for $m > 1$. Likewise, if $n > 1$, then there exists a constant $C_{n,1} > 0$ such that

$$\|V_h(t)\|_\infty \leq C_{n,1}(T_h - t)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad t \in (0, T_h).$$

Inspired by [4], we show that (U_h, V_h) blows up in a finite time T_h when $pq > 1$.

Theorem 9. *Suppose $pq > 1$. Then all non-negative solutions of (2)-(4) blow up in a finite time.*

Proof. Assume that $q \geq p$, $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ is lower solution non-negative of (2)-(4) such that $(\varphi_{1,i+1}, \varphi_{2,i+1}) > (\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ for $i = 1, \dots, I-1$. By Lemma 4, we can see that U_h, U'_h, V_h and V'_h are also non-negative and $(U_{i+1}, V_{i+1}) > (U_i, V_i)$. Setting

$$Z(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^I h U_i(\tau) d\tau,$$

we note that since U_h is monotonically increasing,

$$Z(t) \geq \int_0^t \sum_{i=1}^I h \varphi_{1,i} d\tau = c_0 t.$$

Moreover, it is not hard to see that

$$\begin{aligned} Z''(t) &= \frac{U_2(t) - U_1(t)}{h} + \frac{U_{I-1}(t) - U_I(t)}{h} \\ &\quad + 2U_1^m(t) + 2V_1^p(t) + 2U_I^m(t) + 2V_I^p(t). \end{aligned}$$

Since U'_h is non-negative, we can see that

$$\begin{aligned} Z''(t) &\geq U_1^m(t) + V_1^p(t) + U_I^m(t) + V_I^p(t) \\ &\geq V_I^p(t) = \left(\frac{1}{Ih}\right)^p \left(\sum_{i=1}^I h V_i(t)\right)^p. \end{aligned}$$

As $V_{i+1}(t) \geq V_i(t)$ for $i = 1, \dots, I-1$, we have

$$Z''(t) \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^p \left(\sum_{i=1}^I h V_i(t)\right)^p.$$

We then define

$$W(t) = \sum_{i=1}^I h V_i(t).$$

Proceeding as before, we find that

$$W'(t) \geq U_I^q(t) \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \left(\sum_{i=1}^I h U_i(t)\right)^q.$$

Since $q \geq p$, we have $q > 1$. By integrating the above inequality from 0 to t and making use of Jensen's inequality, we observe

$$W(t) \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \int_0^t \left(\sum_{i=1}^I h U_i(\tau)\right)^q d\tau \geq \left(\frac{1}{Ih}\right)^q \frac{t}{t^q} \left(\int_0^t \sum_{i=1}^I h U_i(\tau) d\tau\right)^q.$$

Hence

$$Z''(t) \geq (Ih)^{-p(1+q)} t^{p-pq} Z^{pq}(t).$$

Since $Z'(t) > 0$, we may multiply this last inequality by $Z'(t)$ and integrate by parts on the right to obtain

$$Z'(t) \geq \left(\frac{2(Ih)^{-p(1+q)}}{pq+1} \right)^{\frac{1}{2}} t^{(p-pq)/2} (Z(t))^{(pq+1)/2}. \quad (12)$$

As $pq > 1$, it can be deduced from (12) that Z and hence the solution, cannot be global. \square

We show that numerical blow up time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero.

Theorem 10. *Let (u, v) be a solution of (1) with blow-up time T such that $(u, v) \in (C^{4,1}([0, 1] \times [0, T]))^2$ and the initial condition at (2)-(4) satisfies*

$$\|U_h(0) - u_h(0)\|_{\infty} = o(1), \quad \|V_h(0) - v_h(0)\|_{\infty} = o(1) \quad h \rightarrow 0.$$

Under the assumptions of Theorems 5, 7 and 9, the problem (2)-(4) admits a unique solution (U_h, V_h) which blows up in a finite time T_h and we have

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Proof. We deal the case $m > 1$. Set $\varepsilon > 0$. There exists $\eta > 0$ such that

$$\frac{y^{1-m}}{\gamma(m-1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \eta \leq y. \quad (13)$$

Since u blows up in a finite time T , there exists a time $T_0 \in \left(T - \frac{\varepsilon}{2}, T\right)$

such that $\|u(\cdot, t)\|_{\infty} > 2\eta$ for $t \in [T_0, T)$. Setting $T_1 = \frac{T_0 + T}{2}$, it is not hard to see that

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \|u(\cdot, t)\|_\infty < \infty.$$

From Theorem 5, it follows that for h sufficiently small

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq \eta.$$

Applying the triangle inequality, we get

$$\|U_h(T_1)\|_\infty \geq -\|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_\infty + \|u_h(T_1)\|_\infty \geq \eta.$$

From Theorem 7, U_h blows up in a finite time T_h . We deduce from Remarks (8) and (13) that

$$|T_h - T| \leq |T_h - T_1| + |T_1 - T| \leq \frac{\|U_h(T_1)\|_\infty^{1-m}}{\gamma(m-1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

The case $n > 1$, $pq > 1$ are analogous. □

4. Simultaneous vs. Non-simultaneous Blow-up

In this section, we consider (U_h, V_h) positive solution of (2)-(4) with h fixed, and we give from sufficient conditions for the existence of simultaneous and non-simultaneous blow-up.

Theorem 11. *If U_h blows up and V_h remains bounded, then $m > q + 1$.*

Proof. Since U_h blows up and V_h is bounded, there exist $C > 0$ and $t_0 \in (0, T_h)$ such that

$$U_k'(t) \leq CU_k^m(t), \quad t \in (t_0, T_h),$$

where k is a blow-up node. It follows from above inequality with $m > 1$ that

$U_k(t) \geq K(T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}$, $t \in (t_0, T_h)$. From (3) we can get

$$V_k'(t) \geq C(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}}, \quad t \in (0, T_h).$$

Thus $V_k(T_h) \geq C_1 + C \int_0^{T_h} (T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}} dt$. We can see that this integral diverges if $m \leq q + 1$, which is a contradiction and the proof is completed. \square

Corollary 12. *Simultaneous blow-up occurs for every initial data if $m \leq q + 1$ and $n \leq p + 1$.*

Theorem 13. *If $m > q + 1$ and $n \leq 1$. There exists initial data such that $U_h(t)$ blows up while $V_h(t)$ remains bounded.*

Proof. Let $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ be, which satisfies (9)-(10) and $\varphi_{2,i} \geq 1$ for $i = 1, \dots, I$. From Lemma 4, $V_i(t) \geq 1$ for $i = 1, \dots, I$ and $t \in (0, T_h)$. Since $m > 1$, it follows from Theorem 7 and Remark 8 that (U_h, V_h) blows up in finite time T_h and for $i = 1, \dots, I$, $t \in (0, T_h)$, $U_i(t) \leq C(T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}$.

Assume that V_h blows up at node k . There exist $K, C > 0$, $t_0 \in (0, T_h)$ such that

$$V_k'(t) \leq C(T_h - t)^{-\frac{q}{m-1}} + KV_k^n(t), \quad t \in (t_0, T_h).$$

We then find that

$$V_k(t) \leq \exp(\ln(V_k(0)) + K_1 T^{\frac{m-q-1}{m-1}} + KT), \quad t \in (t_0, T_h), \text{ if } n = 1,$$

$$V_k(t) \leq (V_k^{1-n}(0) + K_3 T^{\frac{m-q-1}{m-1}} + K_2 T)^{\frac{1}{1-n}}, \quad t \in (t_0, T_h), \text{ if } n < 1,$$

which is a contraction, and thus the proof is completed. \square

We can see Remark 8 and the proof of Theorem 13. If $m > 1$ and U_h blow-up ($n > 1$ and V_h blow-up), then $\|U_h(t)\|_\infty \sim (T_h - t)^{-\frac{1}{m-1}}$ ($\|V_h(t)\|_\infty \sim (T_h - t)^{-\frac{1}{n-1}}$).

5. Numerical Simulation

In this section, we present some numerical approximations to the blow-up time of (2)-(4) for the initial data $\varphi_{1,i} = (i - 1)h$, $\varphi_{2,i} = (i - 1)h$, for $i = 1, \dots, I$, with different values of m, n, p and q . Here the numerical results are given by the algorithm proposed by Hirota and Ozawa [8], we briefly present this algorithm. Consider the system of ODEs (2)-(4). We consider the variables t and W_i , as functions of the arc length s , where

$$W = (U_1, \dots, U_I, V_1, \dots, V_I), \text{ and } W(0) = (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,I}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,I}).$$

Since $ds^2 = dt^2 + dW_1^2 + \dots + dW_{2I}^2$, the variables $t(s)$ and $W_i(s)$, satisfy the system of differential equations

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}}, \\ \frac{dW_i}{ds} = \frac{f_i}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2I} f_i^2}}, \quad i = 1, \dots, 2I, \\ t(0) = 0, W_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 2I, \end{cases} \quad (14)$$

where $0 < s < \infty$, and

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_I \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2U_1^m}{h} + \frac{2V_1^p}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2U_I^m}{h} + \frac{2V_I^p}{h} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{I+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{2I} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2U_1^q}{h} + \frac{2V_1^n}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2U_I^q}{h} + \frac{2V_I^n}{h} \end{pmatrix}.$$

It is well known [8] that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} t(s) = T_h, \text{ and } \lim_{s \rightarrow \infty} \|W(s)\|_{\infty} = \infty.$$

For the numerical computation, let us define $s = s_l$ by $s_l = 2^{16} \cdot 2^l$ ($l = 0, 1, \dots, 12$). For each value of l , we apply DOP54 (DOP54 is MATLAB version of the FORTRAN code DOPRI5 see [7]) to system (14) and we get a linearly convergent sequence to the blow-up time $\{t_l^{(k)}\}_{k=1}^{l+1}$. We also accelerate the sequence recursively by Aitken method's:

$$t_{l+2}^{(k+1)} = t_{l+1}^{(k)} - \frac{(t_{l+2}^{(k)} - t_{l+1}^{(k)})^2}{t_{l+2}^{(k)} - 2t_{l+1}^{(k)} + t_l^{(k)}}, \quad l \geq 2k, k = 0, 1, 2, \dots$$

As in [5, 8], for our experiments we set $\text{RTOL} = \text{ATOL} = 1.d-15$ and $\text{ITOL} = 0$, where the parameters RTOL and ATOL are the tolerances of the relative and absolute errors, respectively, and ITOL is used to choose the manner in which the errors are controlled.

Tables and graphics: $\varphi_{1,i} = (i-1)h$, $\varphi_{2,i} = (i-1)h$, $i = 1, \dots, I$.

In the following tables, in rows, we present the numerical blow-up times T_h , the numbers of iterations N , orders of the approximations s corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512. Approximation orders are calculated by

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h})/(T_{2h} - T_h))}{\log(2)}, \text{ where } h = \frac{1}{I-1}.$$

Table 1. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $m = 2$, $n = 1/2$, $q = 1/2$, $p = 1$

I	T_h	N	s
16	0.21027899	5273	-
32	0.20497970	8650	-
64	0.20339696	15268	1.74
128	0.20293318	28208	1.77
256	0.20280022	54024	1.80
512	0.20276306	109572	1.84

Table 2. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $m = 1/2$, $n = 2$, $q = 1$, $p = 1/2$

I	T_h	N	s
16	0.21024818	5050	-
32	0.20494434	8220	-
64	0.20335741	14447	1.74
128	0.20289104	26650	1.77
256	0.20275665	51081	1.80
512	0.20271875	104829	1.83

Table 3. Numerical blow-up times, number of iterations and order of the approximations obtained for $m = 1/2$, $n = 1/2$, $q = 2$, $p = 2$

I	T_h	N	s
16	0.21200025	5357	-
32	0.20653590	8775	-
64	0.20490594	15477	1.75
128	0.20442713	28582	1.77
256	0.20428873	54725	1.79
512	0.20424935	111270	1.81

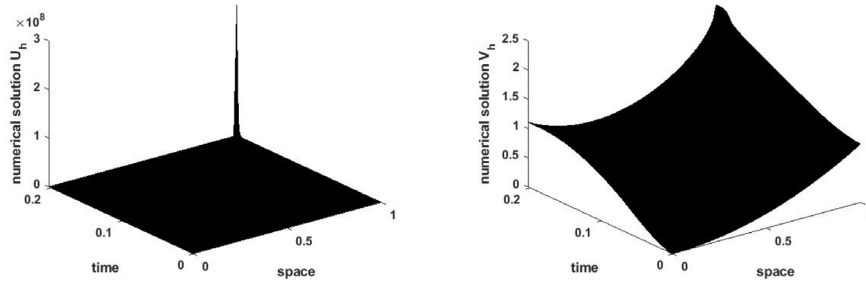


Figure 1. Representation of the evolution of U_h and V_h for $p = 1, q = 1/2, m = 2, n = 1/2$.

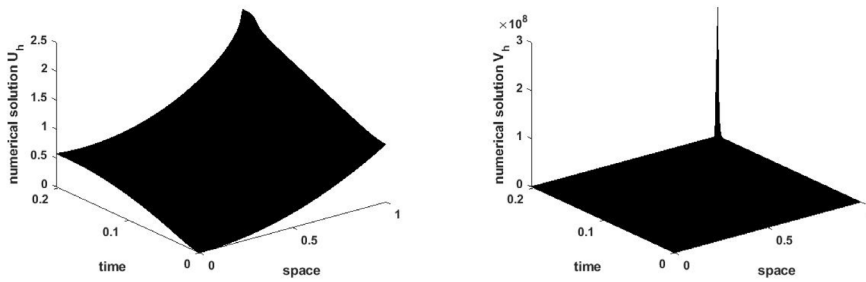


Figure 2. Representation of the evolution of U_h and V_h for $p = 1/2, q = 1, m = 1/2, n = 2$.

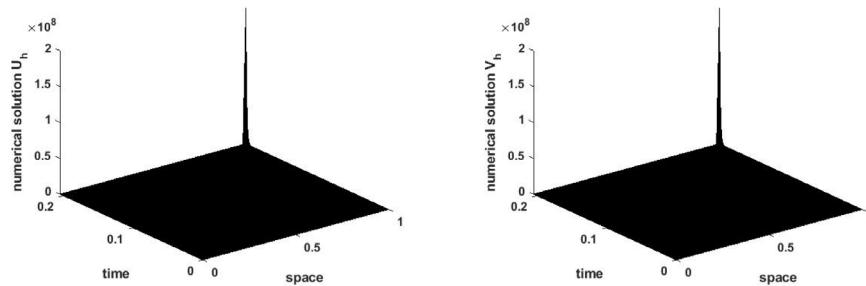


Figure 3. Representation of the evolution of U_h and V_h for $p = q = 2, m = 1/2, n = 1/2$.

Remark 14. If we consider the problem (2)-(4) in the case where the initial data of the problem (1) is $u_0(x) = x$ and $v_0(x) = x$, from Figures 1-3, we observe respectively the blow-up of (U_h, V_h) when $m > 1, n > 1$

and $pq > 1$. From Tables 1-3, we observe the convergence of blow-up time T_h of the solution of (2)-(4), since the rate of convergence is near 2. This result does not surprise us because of the result established in the previous section. Moreover we can see that of the Figure 1, U_h blows up while V_h remains bounded when $m > q + 1$ and $n \leq 1$, of the Figure 2, U_h remains bounded while V_h blows up when $n < p + 1$ and $m \leq 1$ and of the Figure 3, U_h and V_h blow up simultaneously when $n < p + 1$ and $m < q + 1$. These numerical results are in fact consistent with those of Li et al. [9].

References

- [1] G. Acosta, J. F. Bonder, P. Groisman and J. D. Rossi, Simultaneous vs. non-simultaneous blow-up in numerical approximations of a parabolic system with non-linear boundary conditions, *ESAIM: M2AN* 36 (2002), 55-68.
- [2] K. A. Adou, K. A. Tour and A. Coulibaly, Numerical study of the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations, *Far East J. Appl. Math.* 4 (2018), 291-308.
- [3] M. Bogoya and C. A. Gomez, Numerical analysis for a non-local diffusion system, *Contemporary Engineering Sciences* 45 (2018), 2225-2236.
- [4] K. Deng, Global existence and blow-up for a system of heat equations with non-linear boundary conditions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 18 (1995), 307-315.
- [5] K. B. Edja, K. A. Touré and B. J.-C. Koua, Numerical blow-up for a heat equation with nonlinear boundary conditions, *Journal of Mathematics Research* 10 (2018), 119-128.
- [6] S.-C. Fu and J.-S. Guo, Blow-up for a semilinear reaction-diffusion system coupled in both equations and boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 276 (2002), 458-475.
- [7] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Springer Series in Comput. Math., 2nd ed., Springer-Verlag, 1993.
- [8] C. Hirota and K. Ozawa, Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations an application to the blow-up

- 138 K. B. Edja, K. N'Guessan, B. Jean-Claude Koua and K. A. Touré
problems of partial differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 193 (2006),
614-637.
- [9] F. Li, B. Liu and S. Zheng, Simultaneous and non-simultaneous blow-up for heat
equations with coupled nonlinear boundary fluxes, *Z. Angew. Math. Phys.* 58
(2007), 717-735.
- [10] B. Liu and F. Li, A complete classification for non-simultaneous blow-up,
Applied Mathematics Letters 22 (2009), 548-552.
- [11] K. C. N'dri, K. A. Touré and G. Yoro, Numerical blow-up time for a parabolic
equation with nonlinear boundary conditions, *International Journal of Numerical
Methods and Applications* 17 (2018), 141-160.
- [12] Ph. Souplet and S. Tayachi, Optimal condition for non-simultaneous blow-up in a
reaction-diffusion system, *J. Math. Soc. Japan* 56 (2004), 571-584.
- [13] D. Sun, V. S. Manoranjan and H.-M. Yin, Numerical solutions for a coupled
parabolic equations arising induction heating processes, *Discrete and Continuous
Dynamical Systems* (2007), 956-964.
- [14] M. Taha, K. Toure and E. Mensah, Numerical approximation of the blow-up time
for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary equation, *Far East J.
Appl. Math.* 60 (2012), 125-167.



NUMERICAL QUENCHING FOR HEAT EQUATIONS WITH COUPLED NONLINEAR BOUNDARY FLUX

KOUAMÉ BÉRANGER EDJA^{1,*}, KOFFI N'GUESSAN², BROU JEAN-CLAUDE KOUA³
AND KIDJEGBO AUGUSTIN TOURÉ¹

¹*Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny Yamoussoukro, BP 2444, Côte d'Ivoire*

²*UFR SED, Université Alassane Ouattara , 01 BP V 18 Bouaké 01, Côte d'Ivoire*

³*UFR Mathématique et Informatique, Université Félix Houphouët Boigny, Côte d'Ivoire*

* *Corresponding author:* kouame.edja@inphb.ci

ABSTRACT. In this paper, we study a numerical approximation of the following problem $u_t = u_{xx}$, $v_t = v_{xx}$, $0 < x < 1$, $0 < t < T$; $u_x(0, t) = u^{-m}(0, t) + v^{-p}(0, t)$, $v_x(0, t) = u^{-q}(0, t) + v^{-n}(0, t)$ and $u_x(1, t) = v_x(1, t) = 0$, $0 < t < T$, where m, p, q and n are parameters. We prove that the solution of a semidiscrete form of above problem quenches in a finite time only at first node of the mesh. We show that the time derivative of the solution blows up at quenching node. Some conditions under which the non-simultaneous or simultaneous quenching occurs for the solution of the semidiscrete problem are obtained. We establish the convergence of the quenching time. Finally, some numerical results to illustrate our analysis are given.

1. INTRODUCTION

In this paper, we study the behavior of a semidiscrete approximation of the following heat equations involving nonlinear boundary flux conditions :

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad v_t(x, t) = v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \quad (1.1)$$

Received 2019-08-08; accepted 2019-09-23; published 2019-11-01.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 65M06, 65M12, 35K05, 35K55.

Key words and phrases. Numerical quenching; non-simultaneous; heat equation; nonlinear boundary.

©2019 Authors retain the copyrights of their papers, and all open access articles are distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License.

$$u_x(0, t) = u^{-m}(0, t) + v^{-p}(0, t), \quad v_x(0, t) = u^{-q}(0, t) + v^{-n}(0, t), \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.4)$$

where $m, n \geq 0$, $p, q > 0$, u_0 and v_0 are positive smooth functions satisfying the compatibility conditions $u'_0(0) = u_0^{-m}(0) + v_0^{-p}(0)$, $v'_0(0) = u_0^{-q}(0) + v_0^{-n}(0)$, $u'_0(1) = 0$, $v'_0(1) = 0$, and $u'_0, v'_0 \geq 0$ and $u''_0, v''_0 < 0$ on $(0, 1]$.

Here $[0, T)$ is the maximal time interval such that

$$\forall t \in [0, T), \quad \inf_{0 \leq x \leq 1} \min \{u(x, t), v(x, t)\} > 0.$$

We have

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \inf_{0 \leq x \leq 1} \min \{u(x, t), v(x, t)\} = 0^+.$$

The time T can be finite or infinite. If T is finite, then we say that the solution (u, v) quenches in a finite time and T is called the quenching time of (u, v) . If T is infinite, then we affirm that the solution (u, v) quenches globally.

Nonlinear parabolic systems like (1.1)-(1.4) come from chemical reactions, heat transfer, etc, where u and v represent the temperatures of two different materials during heat propagation. The quenching phenomenon of parabolic problems has been the issue of intensive study (see for example [3, 4, 8–10] and the references cited therein), particularly the study of heat equations system with nonlinear boundary conditions has been the subject of investigation of several authors in recent years (see [6, 7, 14, 15, 17] and the references cited therein). In [7] the authors study this problem, they prove that the solution (u, v) quenches in finite time T and the quenching occurs only at the boundary $x = 0$ for $0 < u_0, v_0 \leq 1$. They show that

- if $p < n + 1$, there exist initial data such that the non-simultaneous quenching occurs ;
- if $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ and $p \geq n + 1$ ($p \leq \frac{m(n+1)}{m+1}$ and $q \geq m + 1$), the non-simultaneous quenching occurs for any positive initial data ;
- if $q \geq m+1, p \geq n+1$, any quenching must be simultaneous and obtain of results on non-simultaneous quenching rate.

Moreover, if quenching is simultaneous they found the quenching rate, which depends on the parameter in the flux associated to the other component of the initial data.

To the best of our knowledge, no studies have been performed on the numerical approximation of equations (1.1)-(1.4). In this paper, we investigate in the numerical study using a semidiscrete form of (1.1)-(1.4),

especially in study of simultaneous and non-simultaneous quenching. For that, we consider a uniform mesh on the interval $[0, 1]$

$$x_i = (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, I, \quad h = 1/(I - 1),$$

$U_h(t) = (U_1(t), \dots, U_I(t))^T$, $V_h(t) = (V_1(t), \dots, V_I(t))^T$, where $U_i(t)$ and $V_i(t)$ are the values of the numerical approximation of u and v at the nodes x_i at time t . We also denote $\varphi_{1,i}$ and $\varphi_{2,i}$, respectively, the values of the numerical approximation of u_0 and v_0 at the nodes x_i . By the finite difference method we obtain the following system of ODEs whose the solution is (U_h, V_h) :

$$U'_i(t) = \delta^2 U_i(t) - b_i (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h), \tag{1.5}$$

$$V'_i(t) = \delta^2 V_i(t) - b_i (U_i^{-q}(t) + V_i^{-n}(t)), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h), \tag{1.6}$$

$$U_i(0) = \varphi_{1,i} \quad V_i(0) = \varphi_{2,i}, \quad i = 1, \dots, I, \tag{1.7}$$

where

$$\begin{aligned} 0 < \varphi_{1,i} \leq M, \quad 0 < \varphi_{2,i} \leq N, \quad i = 1, \dots, I, \\ \delta^2 U_i(t) &= \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2}, \quad 2 \leq i \leq I - 1, \quad t \in (0, T_h), \\ \delta^2 U_1(t) &= \frac{2U_2(t) - 2U_1(t)}{h^2}, \quad \delta^2 U_I(t) = \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2}, \quad t \in (0, T_h), \\ b_1 &= \frac{2}{h}, \quad \text{and } b_i = 0, \quad i = 2, \dots, I. \end{aligned}$$

Here $[0, T_h)$ is the maximal time interval such that

$$\forall t \in [0, T_h), \quad \inf_{1 \leq i \leq I} \min \{U_i(t), V_i(t)\} > 0.$$

We have

$$\lim_{t \rightarrow T_h^-} \inf_{1 \leq i \leq I} \min \{U_i(t), V_i(t)\} = 0^+.$$

The time T_h can be finite or infinite. If T_h is finite, then we say that the solution (U_h, V_h) quenches in a finite time and T_h is called the semidiscrete quenching time of (U_h, V_h) . If T_h is infinite, then we affirm that the solution (U_h, V_h) quenches globally.

We show that our semidiscrete scheme reproduces well the conditions for the quenching, quenching set or simultaneous and non-simultaneous quenching of system (1.1)-(1.4). By following, it is also proved that when quenching occurs, the semidiscrete quenching time converges to the theoretical one when the mesh size goes to zero and we give a result on numerical non-simultaneous quenching rate. For previous work on numerical approximations of heat equations with non-linear boundary conditions we refer to [1,2,5,11-13,16] and the references cited therein. The rest of the paper is organized as follows : in the next section, we give

some properties concerning our semidiscrete scheme. In Section 3, under some conditions, we prove that the solution of the semidiscrete scheme (1.5)-(1.7) quenches in a finite time, we give a result on numerical quenching set. We also show that the time derivative of the solution blows up at quenching node. In Section 4 a criterion to identify simultaneous and non-simultaneous quenching is proposed. In Section 5, we show the convergence of the semidiscrete scheme and the convergence of the quenching times to the theoretical one when the mesh size goes to zero. Finally, in the last section, we give some numerical results to illustrate our analysis.

2. PROPERTIES OF THE SEMIDISCRETE SCHEME

In this section, we give some auxiliary results for the problem (1.5)-(1.7).

Definition 2.1. We say that $(\underline{U}_h, \underline{V}_h) \in (C^1([0, T_h], \mathbf{R}^I))^2$ is a lower solution of (1.5)-(1.7) if

$$\begin{aligned} \underline{U}'_i(t) &\leq \delta^2 \underline{U}_i(t) - b_i(\underline{U}_i^{-m}(t) + \underline{V}_i^{-p}(t)), & i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h), \\ \underline{V}'_i(t) &\leq \delta^2 \underline{V}_i(t) - b_i(\underline{U}_i^{-q}(t) + \underline{V}_i^{-n}(t)), & i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h), \\ 0 < \underline{U}_i(0) &\leq \varphi_{1,i}, \quad 0 < \underline{V}_i(0) \leq \varphi_{2,i}, & i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

where (U_h, V_h) is the solution of (1.5)-(1.7). On the other hand, we say that $(\overline{U}_h, \overline{V}_h) \in (C^1([0, T_h], \mathbf{R}^I))^2$ is an upper solution of (1.5)-(1.7) if these inequalities are reversed.

The following lemma is a discrete form of the maximum principle.

Lemma 2.1. Let $e_h, c_h, \alpha_h, \beta_h \in (C^0([0, T_h], \mathbf{R}^I))$ and $U_h, V_h \in C^1([0, T_h], \mathbf{R}^I)$ such that

$$\begin{aligned} U'_i(t) - \delta^2 U_i(t) + e_i(t)U_i(t) + c_i(t)V_i(t) &\geq 0, & i = 1 \dots, I, t \in (0, T_h), \\ V'_i(t) - \delta^2 V_i(t) + \alpha_i(t)U_i(t) + \beta_i(t)V_i(t) &\geq 0, & i = 1 \dots, I, t \in (0, T_h), \\ U_i(0) \geq 0, \quad V_i(0) &\geq 0, & i = 1 \dots, I. \end{aligned}$$

Then we have

$$U_i(t) \geq 0, \quad V_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, t \in (0, T_h).$$

Proof. Let $T_0 < T_h$ and let $(Z_h(t), W_h(t)) = (e^{\lambda t}U_h(t), e^{\lambda t}V_h(t))$ where λ is a real. We find that $(Z_h(t), W_h(t))$ satisfies the following inequalities :

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + (e_i(t) - \lambda)Z_i(t) + c_i(t)W_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, t \in (0, T_h), \tag{2.1}$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) + \alpha_i(t)Z_i(t) + (\beta_i(t) - \lambda)W_i(t) \geq 0, \quad i = 1 \dots, I, t \in (0, T_h), \tag{2.2}$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad W_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \tag{2.3}$$

Set $m = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} Z_i(t), \min_{1 \leq i \leq I, t \in [0, T_0]} W_i(t) \right\}$. Since for $i \in \{0, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ and $W_i(t)$ are continuous functions on a compact, we can assume that $m = Z_{i_0}(t_{i_0})$ for a certain $i_0 \in \{0, \dots, I\}$.

Assume $m < 0$.

Taking λ negative such that

$$e_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda > 0 \text{ and } \beta_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda > 0.$$

If $t_{i_0} = 0$, then $Z_{i_0}(0) < 0$, which contradicts (2.3), hence $t_{i_0} \neq 0$;

if $1 \leq i_0 \leq I$, we have

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_{i_0}) - Z_{i_0}(t_{i_0} - k)}{k} \leq 0.$$

Moreover by a straightforward computation we get

$$Z'_{i_0}(t_{i_0}) - \delta^2 Z_{i_0}(t_{i_0}) + (e_{i_0}(t_{i_0}) - \lambda) Z_{i_0}(t_{i_0}) + c_{i_0}(t_{i_0}) W_{i_0}(t_{i_0}) < 0,$$

but these inequalities contradict (2.1) and the proof is completed. □

Lemma 2.2. *Let $(\underline{U}_h, \underline{V}_h)$ and $(\overline{U}_h, \overline{V}_h)$ be lower and upper solutions of (1.5)-(1.7) respectively such that, $(\underline{U}_h(0), \underline{V}_h(0)) \leq (\overline{U}_h(0), \overline{V}_h(0))$ then*

$$(\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t)) \leq (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)).$$

Proof. Let us define $(Z_h(t), W_h(t)) = (\overline{U}_h(t), \overline{V}_h(t)) - (\underline{U}_h(t), \underline{V}_h(t))$. We obtain

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) - mb_i(\mu_i(t))^{-m-1} Z_i(t) - pb_i(\nu_i(t))^{-p-1} W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \tag{2.4}$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) - qb_i(\mu_i(t))^{-q-1} Z_i(t) - nb_i(\nu_i(t))^{-n-1} W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \tag{2.5}$$

$$Z_i(0) \geq 0, \quad W_i(0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \tag{2.6}$$

where $\mu_i(t)$, $\nu_i(t)$ lie, respectively, between $\underline{U}_i(t)$ and $\overline{U}_i(t)$, and between $\underline{V}_i(t)$ and $\overline{V}_i(t)$, for $i \in \{1, \dots, I\}$.

We can rewrite (2.4)-(2.5) as

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + e_i(t) Z_i(t) + c_i(t) W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h),$$

$$W'_i(t) - \delta^2 W_i(t) + \alpha_i(t) Z_i(t) + \beta_i(t) W_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in (0, T_h),$$

where $e_i(t) = -mb_i(\mu_i(t))^{-m-1}$, $c_i(t) = -pb_i(\nu_i(t))^{-p-1}$, $\alpha_i(t) = -qb_i(\mu_i(t))^{-q-1}$, and $\beta_i(t) = -nb_i(\nu_i(t))^{-n-1}$ $i = 1, \dots, I, \forall t \in (0, T_h)$. According to Lemma 2.1, $Z_i(t) \geq 0, W_i(t) \geq 0$, for $i = 1, \dots, I, \forall t \in (0, T_h)$ and the proof is completed. □

The next lemma gives the properties of the semidiscrete solution.

Lemma 2.3. *Let $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T_h], \mathbf{R}^I))^2$ be the solution of (1.5)-(1.7) with an initial data $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ upper solution such that $0 < \varphi_{1,i} < \varphi_{1,i+1} \leq M$ and $0 < \varphi_{2,i} < \varphi_{2,i+1} \leq N$ for $i = 1, \dots, I - 1$. Then we have*

- (i) $0 < U_i(t) \leq \varphi_{1,i} \leq M$ and $0 < V_i(t) \leq \varphi_{2,i} \leq N$, for $i = 1, \dots, I, t \in [0, T_h]$;
- (ii) $(U_{i+1}(t), V_{i+1}(t)) > (U_i(t), V_i(t))$, $i = 1, \dots, I - 1, t \in (0, T_h)$;
- (iii) $(U'_i(t), V'_i(t)) \leq 0$, $i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h)$.

Proof. (i) Since $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ is an upper solution of (1.5)-(1.7), by the Lemma 2.1 and 2.2 we have $0 < U_i(t) \leq M$ and $0 < V_i(t) \leq N$, for $i = 1, \dots, I, t \in [0, T_h]$.

(ii) We argue by contradiction. Assume, that t_0 the first $t > 0$, such that $(K_i, L_i)(t) = (U_{i+1} - U_i, V_{i+1} - V_i)(t) > 0$, for $1 \leq i \leq I - 1$, but $\min\{K_{i_0}(t_0), L_{i_0}(t_0)\} = 0$ for a certain $i_0 \in \{1, \dots, I - 1\}$. Assume that $K_{i_0}(t_0) = U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) = 0$. Without lost of generality, we can suppose that i_0 is the smallest integer which satisfies the above equality. Therefore, by simple computation, (K_h, L_h) verifies

$$\begin{aligned} K'_h(t) &= -A'K_h(t) + B'U_h^{-m}(t) + B'V_h^{-p}(t), \\ L'_h(t) &= -A'L_h(t) + B'U_h^{-q}(t) + B'V_h^{-n}(t), \end{aligned}$$

where

$$A' = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On the one hand

$$K'_{i_0}(t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_{i_0}(t_0) - K_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0,$$

and, on the other hand

$$-\sum_{j=1}^I a'_{i_0,j} K_j(t) + b'_{i_0} U_{i_0}^m(t_0) + b'_{i_0} V_{i_0}^p(t_0) > 0.$$

Thus we have a contradiction, hence we obtain the desired result.

(iii) Denote $F_i(t) = U_i(t) - U_i(t + \varepsilon)$ and $G_i(t) = V_i(t) - V_i(t + \varepsilon)$, for $i = 1, \dots, I$, using (i) we obtain $F_i(0) \geq 0, G_i(0) \geq 0$ for $i = 1, \dots, I$. It is not hard to see that

$$F'_i(t) = \delta^2 F_i(t) + mb_i(\xi_i(t))^{-m-1} F_i(t) + pb_i(\eta_i(t))^{-p-1} G_i(t) \geq 0,$$

$$G'_i(t) = \delta^2 G_i(t) + qb_i(\xi_i(t))^{-q-1} F_i(t) + nb_i(\eta_i(t))^{-n-1} G_i(t) \geq 0,$$

where $\xi_i(t), \eta_i(t)$ lie, respectively, between $U_i(t + \varepsilon)$ and $U_i(t)$ and between $V_i(t + \varepsilon)$ and $V_i(t)$. From Lemma 2.1 we get

$$F_i(t) \geq 0 \text{ and } G_i(t) \geq 0 \text{ for } i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h).$$

This fact implies the desired result. □

3. QUENCHING AND BLOW-UP

Let (U_h, V_h) be the solution of (1.5)-(1.7) with $0 < \varphi_{1,i} \leq M, 0 < \varphi_{1,i} \leq N$ for $i = 1, \dots, I$. Inspired by [4, 7] we prove that (U_h, V_h) quenches in a finite time and (U'_h, V'_h) blows up at quenching node.

Theorem 3.1. *The solution (U_h, V_h) of (1.5)-(1.7) quenches in a finite time with the only quenching node $i = 1$.*

Proof. Integrating (1.5) in time we find

$$U_i(t) - U_i(0) = \int_0^t \delta^2 U_i(\tau) + b_i(U_i^{-m}(\tau) + V_i^{-p}(\tau)) d\tau$$

summing up the above inequality we get

$$\sum_{i=1}^I hU_i(t) = \sum_{i=1}^I hU_i(0) + \int_0^t \frac{U_{I-1}(\tau) - U_I(\tau)}{h} + \frac{U_2(\tau) - U_1(\tau)}{h} - 2(U_1^{-m}(\tau) + V_1^{-p}(\tau)) d\tau.$$

From (1.5) we have

$$\frac{h}{2} U_I(t) - \frac{h}{2} U_I(0) = \int_0^t \frac{U_{I-1}(\tau) - U_I(\tau)}{h} d\tau, \text{ and}$$

$$\frac{h}{2} U_1(t) - \frac{h}{2} U_1(0) = \int_0^t \frac{U_2(\tau) - U_1(\tau)}{h} - (U_1^{-m}(\tau) + V_1^{-p}(\tau)) d\tau.$$

Thus

$$\frac{h}{2} U_I(t) + \sum_{i=2}^{I-1} hU_i(t) + \frac{h}{2} U_1(t) = \frac{h}{2} U_I(0) + \sum_{i=2}^{I-1} hU_i(0) + \frac{h}{2} U_1(0) - \int_0^t U_1^{-m}(\tau) + V_1^{-p}(\tau) d\tau,$$

therefore

$$\frac{h}{2} U_I(t) + \sum_{i=2}^{I-1} hU_i(t) + \frac{h}{2} U_1(t) \leq M - (M^{-m} + N^{-p})t.$$

Proceeding as before, we find that

$$\frac{h}{2}V_I(t) + \sum_{i=2}^{I-1} hV_i(t) + \frac{h}{2}V_1(t) \leq N - (M^{-q} + N^{-n})t,$$

which yield a contradiction because U_h and V_h are positive for all times. Then there exists $0 < T_h < \infty$ such that

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \min\{U_1(t), V_1(t)\} = 0^+.$$

To show $i = 1$ is the unique quenching node. In everything that follows $i \in \{1, \dots, I - 1\}$ and $t \in (0, T_h)$.

Set $g(U_i(t)) = U_i^{-m}(t)$, $f(V_i(t)) = V_i^{-p}(t)$, $d(U_i(t)) = U_i^{-q}(t)$, $j(V_i(t)) = V_i^{-n}(t)$, and

$$Z_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} - \phi_i(g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \tag{3.1}$$

$$W_i(t) = \frac{V_{i+1}(t) - V_i(t)}{h} - \phi_i(d(U_i(t)) + j(V_i(t))) \tag{3.2}$$

where $\phi_i, \delta^2\phi_i \geq 0, \delta^+\phi_i \leq 0, \phi_I = 0, \phi_1 = 1, \phi_i(g(U_i(0)) + f(V_i(0))) \leq \delta^+U_i(0)$ and $\phi_i(d(U_i(0)) + j(V_i(0))) \leq \delta^+V_i(0)$.

By means of Taylor expansions we have

$$\begin{aligned} \delta^2(\phi_i k(J_i(t))) &= \phi_i k'(J_i(t))\delta^2 J_i(t) + k(J_i(t))\delta^2 \phi_i + k'(J_i(t))\delta^+ \phi_i \delta^+ J_i(t) + k'(J_i(t))\delta^- \phi_i \delta^- J_i(t) \\ &\quad + \phi_i \frac{(\delta^+ J_i(t))^2}{2} k''(\rho_i(t)) + \phi_i \frac{(\delta^- J_i(t))^2}{2} (k''(\lambda_i(t))), \quad i = 2, \dots, I - 1, \\ \delta^2(\phi_1 k(J_1(t))) &= \phi_1 k'(J_1(t))\delta^2 J_1(t) + k(J_1(t))\delta^2 \phi_1 + 2k'(J_1(t))\delta^+ \phi_1 \delta^+ J_1(t) \\ &\quad + \phi_1 (\delta^+ J_1(t))^2 k''(\rho_1(t)). \end{aligned}$$

If we use the fact that $J_i, \delta^+ J_i(t)$ and $\delta^2 J_i(t)$ are nonnegative and the hypothesis on ϕ_h , we arrive at

$$\delta^2(\phi_i k(J_i(t))) \geq \phi_i k'(J_i(t))\delta^2 J_i(t), \quad i = 1, \dots, I - 1. \tag{3.3}$$

By using (3.3) we can get

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) \geq \frac{b_i}{h} (g(U_i) + f(V_i)) + b_i \phi_i g'(U_i) (g(U_i) + f(V_i)) + b_i \phi_i f'(U_i) (d(U_i) + j(V_i)).$$

The above inequalities implies that

$$\begin{aligned} Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i g'(U_i(t))Z_i(t) + b_i f'(V_i(t))W_i(t) &\geq b_i \left[\frac{1}{h} (g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \right. \\ &\quad \left. + f'(U_i(t))(d(U_i(t)) + j(V_i(t))) + g'(U_i(t))(g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \right]. \end{aligned}$$

We obtain

$$Z'_i(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i g'(U_i(t))Z_i(t) + b_i f'(V_i(t))W_i(t) \geq 0,$$

for the parameter h small enough. Thus we have

$$\begin{aligned} Z_i'(t) - \delta^2 Z_i(t) + b_i g'(U_i(t)) Z_i(t) + b_i f'(V_i(t)) W_i(t) &\geq 0, \\ W_i'(t) - \delta^2 W_i(t) + b_i d'(U_i(t)) Z_i(t) + b_i j'(V_i(t)) W_i(t) &\geq 0, \\ Z_i(0) \geq 0, W_i(0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Using the Lemma 2.1 we have $Z_i(t) \geq 0$ and $W_i(t) \geq 0$, for $i = 1, \dots, I - 1$ and $t \in (0, T_h)$. This implies that $\frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} \geq \phi_i(g(U_i(t)) + f(V_i(t))) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M^m} + \frac{1}{N^p} \right)$ for $i = 1, \dots, J$, with $\phi_J = \frac{1}{2}$, where $J \in \{2, \dots, I - 1\}$. Thus by summing we obtain

$$U_i(t) \geq U_1 + \frac{(i - 1)h}{2} \left(\frac{1}{M^m} + \frac{1}{N^p} \right) \geq \frac{(i - 1)h}{2} \left(\frac{1}{M^m} + \frac{1}{N^p} \right) \text{ whenever } i > 1.$$

The same happens for V_h . □

Theorem 3.2. *If $\lim_{t \rightarrow T_h^-} U_1(t) = 0^+$ $\left(\lim_{t \rightarrow T_h^-} V_1(t) = 0^+ \right)$, then $U_h'(t)$ blows up ($V_h'(t)$ blows up).*

Proof. Suppose $U_h'(t)$ is bounded. Then, there exists a negative constant M such that $U_h'(t) > M$. We have

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 U_j'(t) > \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 M.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 M &= \sum_{i=1}^{I-1} i h^2 M \\ &= \frac{M}{2} + \frac{hM}{2}. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 U_j'(t) = \sum_{i=2}^{I-1} \left(\sum_{j=2}^i h^2 U_j'(t) + h^2 U_1'(t) \right) + h^2 U_1'(t)$$

From (1.5) we arrive at

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^i h^2 U_j'(t) = U_I(t) - U_1(t) - (V_1^{-p}(t) + U_1^{-m}(t)) + \frac{h}{2} U_1'(t)$$

and Lemma 2.3 we arrive at

$$U_I(t) - U_1(t) - (V_1(t)^{-p} + U_1(t)^{-m}) > \frac{M}{2} + hM.$$

As $t \rightarrow T_h^-$, the left-hand side tends to infinity while the right-side is finite. This contradiction shows that U_h' blows up. □

4. SIMULTANEOUS VS. NON-SIMULTANEOUS QUENCHING

In this Section we consider (U_h, V_h) the solution of (1.5)-(1.7) with h fixed, and we give some sufficient conditions for the existence of simultaneous and non-simultaneous quenching.

Theorem 4.1. *If U_h quenches and V_h does not quench in (1.5)-(1.7) then $q < m + 1$.*

Proof. As V_h does not quench, by (1.5) there exists $c > 0$ such that

$$U_1'(t) \geq -cU_1^{-m}(t),$$

integrating this inequality from t to T_h , we get

$$U_1(t) \leq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}}, \text{ where } C = ((m + 1)c)^{1/(m+1)}. \tag{4.1}$$

By using (4.1) and (1.6), we obtain

$$V_1'(t) \leq \delta^2 V_1(t) - b_1 \left(V_1^{-n}(t) + C(T_h - t)^{-\frac{q}{m+1}} \right).$$

Thus $V_1(T_h) \leq C_1 - C \int_0^{T_h} (T_h - t)^{-\frac{q}{m+1}} dt$. We can see that this integral diverges if $q \geq m + 1$, which is a contradiction and the proof is completed. □

Corollary 4.1. *Simultaneous quenching happens if $q \geq m + 1, p \geq n + 1$.*

Lemma 4.1. *Let (U_h, V_h) be the solution of (1.5)-(1.7). Assume that U_h quenches at time T_h (V_h quenches at time T_h) and*

$$\delta^2 \varphi_{1,i} - b_i (\varphi_{1,i}^{-m} + \varphi_{2,i}^{-p}) + c (\varphi_{1,i}^{-m} + \varphi_{2,i}^{-p}) \leq 0, \tag{4.2}$$

$$\delta^2 \varphi_{2,i} - b_i (\varphi_{1,i}^{-q} + \varphi_{2,i}^{-n}) + c (\varphi_{1,i}^{-q} + \varphi_{2,i}^{-n}) \leq 0. \tag{4.3}$$

Then there exists a positive constant C such that for $t \in (0, T_h)$

$$\frac{U_1(t)^{m+1}}{C(m+1)} \geq T_h - t \quad \left(\frac{V_1(t)^{n+1}}{C(n+1)} \geq T_h - t \right),$$

$$U_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}} \quad \left(V_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}} \right). \tag{4.4}$$

Proof. Set for $i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h)$,

$$Z_i(t) = U_i'(t) + c (U_i^{-m}(t) + V_i^{-p}(t)) \text{ and } W_i(t) = V_i'(t) + c (U_i^{-q}(t) + V_i^{-n}(t)).$$

A straightforward calculation gives

$$Z_i'(t) - \delta^2 Z_i(t) + \alpha_i(t)Z_i(t) + \beta_i(t)W_i(t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h),$$

$$W_i'(t) - \delta^2 W_i(t) + a_i(t)Z_i(t) + b_i(t)W_i(t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h),$$

$$Z_i(0) \leq 0, \quad W_i(0) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I.$$

By virtue of Lemma 2.1

$$Z_i(t) \leq 0, W_i(t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h).$$

Thus we get

$$U'_i(t) \leq -cU_i^{-m}(t) \text{ and } V'_i(t) \leq -cV_i^{-n}(t), \quad i = 1, \dots, I, t \in (0, T_h). \tag{4.5}$$

Assume that U_h quenches (V_h quenches), integrating (4.5) from t to T_h , we arrive at

$$\frac{U_1(t)^{m+1}}{C(m+1)} \geq T_h - t \quad \left(\frac{V_1(t)^{n+1}}{C(n+1)} \geq T_h - t \right),$$

which implies

$$U_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}} \quad \left(V_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}} \right).$$

□

Theorem 4.2. *If $p < n + 1$, then there exist initial data such that V_h quenches but U_h doesn't.*

Proof. We argue by contradiction. Assuming that U_h and V_h quench simultaneously at time T_h for any initial data. We have

$$\int_0^t U'_1(s) ds \geq \int_0^{T_h} U'_1(s) ds = \frac{2}{h^2} \int_0^{T_h} U_2(s) - U_1(s) ds - \frac{2}{h} \int_0^{T_h} U_1^{-m}(s) + V_1^{-p}(s) ds$$

By using the Lemma 4.1, we obtain

$$U_1(t) \geq U_1(0) + \frac{2}{h^2} \int_0^{T_h} U_2(s) - U_1(s) ds - \frac{2C}{h} \int_0^{T_h} (T_h - s)^{-\frac{m}{m+1}} + (T_h - s)^{-\frac{p}{n+1}} ds$$

As $p < n + 1$ this integral is converged and

$$U_1(t) \geq C_1 - C_2 T_h^{\frac{1}{m+1}} - C_3 T_h^{\frac{n+1-p}{n+1}}, \quad \text{with } C_1, C_2, C_3 > 0.$$

By summation of (1.6) we observe that

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} V'_1(t) - \frac{h}{2} V'_I(t) - \sum_{i=2}^{I-1} h V'_i(t) &= U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t), \\ -\frac{h}{2} V'_1(t) - \frac{h}{2} V'_I(t) - \sum_{i=2}^{I-1} h V'_i(t) &\geq U_1^{-q}(0) + V_1^{-n}(0) \end{aligned} \tag{4.6}$$

integrate (4.6) from 0 to T_h , we can obtain

$$V_I(0) (U_1^{-q}(0) + V_1^{-n}(0))^{-1} \geq T_h,$$

then if T_h is small enough (depending on $U_h(0)$ and $V_h(0)$), $U_1(T_h) \geq c_0 > 0$. We have a contradiction with the hypothesis that U_h quenches and the result is obtained as desired. □

Theorem 4.3. *If $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ and $p \geq n + 1$ ($p \leq \frac{m(n+1)}{m+1}$ and $q \geq m + 1$) then U_h (V_h) quenches alone under any positive initial data.*

Proof. Assume that there exists initial data such that U_h and V_h quench simultaneously at time T_h . Without loss of generality, we can suppose that this initial data satisfies (4.2)-(4.3). According to (1.6)

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= \delta^2 V_1(t) - b_1(U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t)), \\ V_1'(t) &\geq -b_1(U_1^{-q}(t) + V_1^{-n}(t)), \\ V_1(t) &\leq b_1 \int_t^{T_h} U_1^{-q}(s) + V_1^{-n}(s) ds. \end{aligned}$$

From Lemma 4.1 we know $U_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{m+1}}$, $V_1(t) \geq C(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}}$, moreover $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$. Hence there exists $C' > 0$ such that $V_1(t) \leq C'(T_h - t)^{\frac{1}{n+1}}$. Let us consider (1.5)

$$\begin{aligned} U_1'(t) &= \delta^2 U_1(t) - b_1(U_1^{-m}(t) + V_1^{-p}(t)), \\ U_1'(t) &\leq \delta^2 U_1(t) - b_1 V_1^{-p}(t), \\ U_1'(t) &\leq \delta^2 U_1(t) - b_1 C'^{-p} (T_h - t)^{-\frac{p}{n+1}}. \end{aligned}$$

Integrating both sides from 0 to T_h , we obtain

$$-U_1(0) \leq c_1 - c_2 \int_0^{T_h} (T_h - t)^{-\frac{p}{n+1}} dt.$$

We can see that the integral diverges if $p \geq n + 1$, which is a contradiction. The result is obtained. □

Remark 4.1. *Let (U_h, V_h) be the solution of (1.5)-(1.7) such that the initial data satisfies (4.2)-(4.3). We can see of the Lemma 4.1 and the proof of Theorem 4.3 that if U_h (V_h) quenches at time T_h , then $U_1(t) \sim (T_h - t)^{\frac{1}{m+1}}$ ($V_1(t) \sim (T_h - t)^{\frac{1}{n+1}}$) for t close enough to T_h .*

5. CONVERGENCE OF THE SEMIDISCRETE QUENCHING TIME

In this section, we study the convergence of the semidiscrete quenching time. Now we will show that for each fixed time interval $[0, T]$ where (u, v) is defined, the solution (U_h, V_h) of (1.5)-(1.7) approximates (u, v) when the mesh parameter h goes to zero. We denote

$$\begin{aligned} u_h(t) &= (u(x_1, t), \dots, u(x_I, t))^T, \quad v_h(t) = (v(x_1, t), \dots, v(x_I, t))^T, \\ \|U_h(t)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq I} |U_i(t)|, \quad \|U_h(t)\|_{\inf} = \min_{1 \leq i \leq I} |U_i(t)|. \end{aligned}$$

Theorem 5.1. *Assume that the problem (1.1)-(1.4) has solution*

$(u, v) \in (C^{4,1}([0, 1] \times [0, T^]))^2$ and the initial data $(\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h})$ at (1.5)-(1.7) verifies*

$$\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty = o(1) \quad h \rightarrow 0. \tag{5.1}$$

Then, for h small enough, the semidiscrete problem (1.5)-(1.7) has a unique solution $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T^*], \mathbf{R}^I))^2$ such that

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T^*]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty &= O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2), \text{ as } h \rightarrow 0, \\ \max_{t \in [0, T^*]} \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty &= O(\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + h^2), \text{ as } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Proof. Let $\sigma > 0$ be such that

$$(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty) < \sigma, \quad t \in [0, T^*]. \tag{5.2}$$

Then the problem (1.5)-(1.7) has for each h , a unique solution $(U_h, V_h) \in (C^1([0, T^*], \mathbf{R}^I))^2$. Let $t(h) \leq T^*$ be the greatest value of $t > 0$ such that

$$\max\{\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty\} < 1. \tag{5.3}$$

The relation (5.1) implies $t(h) > 0$ for h small enough. Using the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \text{ and } \|V_h(t)\|_\infty \leq 1 + \sigma \text{ for } t \in (0, t(h)). \tag{5.4}$$

Let $(e_{1,h}, e_{2,h})(t) = (U_h - u_h, V_h - v_h)(t), \forall t \in [0, T^*]$ be the discretization error. these error functions verify

$$\begin{aligned} e'_{1,i}(t) &= \delta^2 e_{1,i}(t) + mb_i(\theta_i(t))^{-m-1} e_{1,i}(t) + pb_i(\Theta_i(t))^{-p-1} e_{2,i}(t) + O(h^2), \\ e'_{2,i}(t) &= \delta^2 e_{2,i}(t) + qb_i(\theta_i(t))^{-q-1} e_{1,i}(t) + nb_i(\Theta_i(t))^{-n-1} e_{2,i}(t) + O(h^2), \end{aligned}$$

where $\theta_i(t)$ and $\Theta_i(t)$ lie, respectively, between $U_i(t)$ and $u(x_i, t)$, and between $V_i(t)$ and $v(x_i, t)$, for $i \in \{1, \dots, I\}$. Using (5.2) and (5.4), there exist K and L positive constants such that

$$\begin{aligned} e'_{1,i}(t) &\leq \delta^2 e_{1,i}(t) + b_i L |e_{1,i}(t)| + b_i L |e_{2,i}(t)| + Kh^2, \\ e'_{2,i}(t) &\leq \delta^2 e_{2,i}(t) + b_i L |e_{1,i}(t)| + b_i L |e_{2,i}(t)| + Kh^2 \end{aligned}$$

let $(z, w) \in (C^{4,1}([0, 1], [0, T^*]))^2$ be such that

$z(x, t) = (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh^2) e^{(M+2)t - (1-x)^2}$ and $w = z, \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T^*]$, with M, Q positive constants. We can prove by the Lemma 2.2 that

$$|e_{1,i}(t)| < z(x_i, t), \quad |e_{2,i}(t)| < w(x_i, t), \quad 1 \leq i \leq I, \text{ for } t \in (0, t(h)).$$

We deduce that

$$\begin{aligned} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty &\leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh^2) e^{(M+2)t}, \\ \|V_h(t) - v_h(t)\|_\infty &\leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh^2) e^{(M+2)t}, \end{aligned}$$

for $t \in (0, t(h))$. Suppose that $T^* > t(h)$ from (5.3), we obtain

$$1 = \|U_h(t(h)) - u_h(t(h))\|_\infty \leq (\|\varphi_{1,h} - u_h(0)\|_\infty + \|\varphi_{2,h} - v_h(0)\|_\infty + Qh^2) e^{(M+2)t}.$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as h tends to zero, we deduce that, $1 \leq 0$, which is impossible. Hence we have $t(h) = T^*$, and the proof is completed. \square

Theorem 5.2. *Let $(u, v) \in (C^{4,1}([0, 1] \times [0, T]))^2$ be solution of (1.1)-(1.4) with quenches time T and the initial data at (1.5)-(1.7) satisfies (4.2)-(4.3) and (5.1). Then the solution (U_h, V_h) of (1.5)-(1.7) quenches in a finite time T_h and we have*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

Proof. From Theorem 3.1, (U_h, V_h) quenches in a finite time T_h . Assume that U_h quenches.

Set $\varepsilon > 0$. There exists $\eta > 0$ such that

$$\frac{y^{1+m}}{C(m+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq y \leq \eta. \tag{5.5}$$

There exists a time $T_0 \in (T - \frac{\varepsilon}{2}, T)$ such that $0 < |u(x_i, t)| \leq \frac{\eta}{2}$, for $i = 1, \dots, I, t \in [T_0, T)$. Setting $T_1 = \frac{T_0+T}{2}$, it is not hard to see that $0 < \|u(x_i, t)\|_{\inf}$, for $t \in [0, T_1]$. From Theorem 5.1, it follows that for h sufficiently small

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_{\infty} \leq \frac{\eta}{2}.$$

Applying the triangle inequality, we get

$$\|U_h(T_1)\|_{\inf} \leq \|U_h(T_1) - u_h(T_1)\|_{\infty} + \|u_h(T_1)\|_{\inf} \leq \eta.$$

Since U_h quenches, we can deduce from Lemma 4.1 and (5.5) that

$$|T_h - T| \leq |T_h - T_1| + |T_1 - T| \leq \frac{\|U_h(T_1)\|_{\inf}^{1+m}}{C(m+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

The case where V_h quenches is analogous. \square

6. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this section, we present some numerical approximations to the quenching time of (1.5)-(1.7) for the initial data $\varphi_{1,i} = \varphi_{2,i} = 1 + \frac{4}{\Pi} \sin(\frac{\Pi}{2}(i-1)h)$ for $i = 1, \dots, I-1$, with different values of m, n, p and q .

We also consider the implicit scheme below

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)}}{\Delta t_h^k} &= \delta^2 U_i^{(k+1)} - b_i \left((U_i^{(k)})^{-m} + (V_i^{(k)})^{-p} \right), \quad 1 \leq i \leq I, \\ \frac{V_i^{(k+1)} - V_i^{(k)}}{\Delta t_h^k} &= \delta^2 V_i^{(k+1)} - b_i \left((U_i^{(k)})^{-q} + (V_i^{(k)})^{-n} \right), \quad 1 \leq i \leq I, \\ U_i^{(0)} &= \varphi_{1,i}, \quad V_i^{(0)} = \varphi_{2,i} \quad 1 \leq i \leq I, \end{aligned}$$

where $k \geq 0, \Delta t_h^k = h^2 \min \left\{ \|U_h^{(k)}\|_{\inf}^{m+1}, \|U_h^{(k)}\|_{\inf}^{q+1}, \|V_h^{(k)}\|_{\inf}^{p+1}, \|V_h^{(k)}\|_{\inf}^{n+1} \right\}$.

Definition 6.1. We say that the discrete solution $(U_h^{(k)}, V_h^{(k)})$ of the implicit scheme quenches in a finite time if

$\liminf_{k \rightarrow \infty} \{\|U_h^{(k)}\|_{\inf}, \|V_h^{(k)}\|_{\inf}\} = 0$ and the series $\sum_{k=0}^{+\infty} \Delta t_h^k$ converges. The quantity $t_h^k = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta t_h^j$ is called the numerical quenching time of the solution $(U_h^{(k)}, V_h^{(k)})$ and $T_h = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta t_h^k$ is called the numerical quenching time of the solution (U_h, V_h) .

In Tables 1, 2 and 3, in rows, we present the numerical quenching times, the numbers of iterations and the orders of the approximations corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. We take for the numerical quenching time $T_h = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta t_h^k$ which is computed at the first time when $\Delta t_h^k = |t_h^{k+1} - t_h^k| \leq 10^{-16}$. The order(s) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}, \text{ where } h = 1 / (I - 1).$$

TABLE 1. Numerical quenching times obtained with the implicit Euler method for $m = 0.5, p = 1, q = 2, n = 0.5$.

I	T_h	k	s
16	0.15390794	34896	-
32	0.14878519	48454	-
64	0.14737661	66676	1.86
128	0.14699264	92814	1.87
256	0.14688843	137205	1.88
512	0.14686025	238258	1.89
1024	0.14685267	545941	1.89

TABLE 2. Numerical quenching times obtained with the explicit Euler method for $m = 1, p = 2.5, q = 0.5, n = 1$.

I	T_h	k	s
16	0.13630655	168	-
32	0.13147195	484	-
64	0.13016571	1540	1.89
128	0.12981187	5384	1.88
256	0.12971578	20063	1.88
512	0.12968969	77515	1.88
1024	0.12968263	305050	1.88

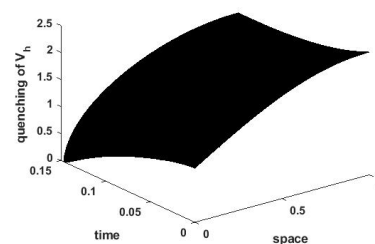
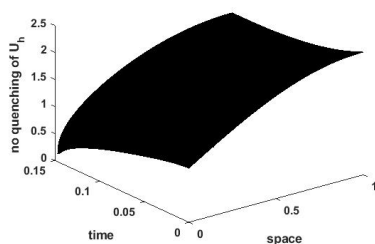


FIGURE 1. On the left, no quenching of U_h and on the right, quenching of V_h for $m = 0.5, p = 1, q = 2, n = 0.5$.

TABLE 3. Numerical quenching times obtained with the implicit Euler method for $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$.

I	T_h	k	s
16	0.12862938	127	-
32	0.12271047	372	-
64	0.12106075	1213	1.84
128	0.12060846	4323	1.87
256	0.12048544	16309	1.88
512	0.12045217	63432	1.89
1024	0.12044321	250457	1.89



FIGURE 2. On the left, quenching of U_h and on the right, no quenching of V_h for $m = 1$, $p = 2.5$, $q = 0.5$, $n = 1$.



FIGURE 3. On the left, quenching of U_h and on the right, quenching of V_h for $m = 0.3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 0.3$.

Remark 6.1. *The various tables of our numerical results show that there is a relationship between the quenching time and flows on the boundaries. If we consider the problem (1.5)-(1.7) in the case where the initial data $\varphi_{2,i} = \varphi_{1,i} = 1 + \frac{4}{\Pi} \sin(\frac{\Pi}{2}(i-1)h)$, $i = 1, \dots, I$, from figures 1-3, we observe respectively the quenching of (U_h, V_h) . From tables 1-3, we observe the convergence of quenching time T_h of the solution of (1.5)-(1.7), since the rate of convergence is near 2. This result does not surprise us because of the result*

established in the previous section. Moreover we can see that of the figure 1, V_h quenches while U_h doesn't when $p < n + 1$, of the figure 2, U_h quenches while V_h doesn't when $q \leq \frac{n(m+1)}{n+1}$ and $p \geq n + 1$ and of the figure 3, U_h and V_h quench simultaneously when $p \geq n + 1$ and $q \geq m + 1$. These numerical results are in fact consistent with the Corollary 4.1, Theorem 4.2 and Theorem 4.3.

CONCLUSION

In this work, we proposed a semi-discrete scheme, based on finite difference method in space for system of heat equations, coupled by nonlinear boundary flux. The stability and the convergence of semi-discrete scheme are proved respectively. Under some conditions the semidiscrete scheme reproduces well the conditions for the quenching, quenching set and simultaneous and non-simultaneous quenching. The analysis in this paper can be extended to more general to some systems of nonlinear parabolic equations.

REFERENCES

- [1] K.A. Adou, K.A. Touré, A. Coulibaly, Numerical study of the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations, Far East J. Appl. Math., 4 (2018), 91-308.
- [2] T. K. Boni, Extinction for discretizations of some semilinear parabolic equations, C. R. Acad. Sci. Paris, 333 (2001), 79-800.
- [3] T. K. Boni, H. Nachid, D. Nabongo, Quenching time of semilinear heat equations, Miskolc Math. Notes, 11 (2010), 27-41.
- [4] C.Y. Chan, S.I. Yuen, Parabolic problems with nonlinear absorptions and releases at the boundaries, Appl. Math. comput., 121 (2001), 203-209.
- [5] K.B. Edja, K.A. Touré, B. J.-C. Koua, Numerical Blow-up for a Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions, J. Math. Res., 10 (2018), 119-128.
- [6] R. Ferreira, A. de Pablo, M.P. LLanos, J.D. Rossi, Incomplete quenching in a system of heat equations coupled at the boundary, J. Math. Anal. Appl., 346 (2008), 1145-154.
- [7] R.H. Ji, C.Y. Quc, L.D. Wang, Simultaneous and non-simultaneous quenching for coupled parabolic system, Appl. Anal., 94 (2015), 233-250.
- [8] H. Kawarada, On Solutions of Initial-Boundary Problem for $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 10 (1975), 729-736.
- [9] H.A. Levine, The Quenching of Solutions of Linear Parabolic and Hyperbolic Equations with Nonlinear Boundary Conditions, SIAM J. Math. Anal., 4 (1983), 1139-1153.
- [10] H.A. Levine, J.T. Montgomer The quenching of solutions of some nonlinear parabolic equations, SIAM J. Math. Anal., 11 (1980), 842-847.
- [11] Liang K.W, Lin AP, Tan RCE. Numerical Solution of Quenching Problems Using Mesh-Dependent Variable Temporal Steps, Appl. Numer. Math., 57 (2007), 791-800.
- [12] D. Nabongo, T.K. Boni, Quenching for semidiscretizations of a heat equation with a singular boundary condition, Asymptotic Anal., 59 (2008), 27-38.
- [13] K.C. N'dri, K.A. Touré, G. Yoro, Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions, Int. J. Numer. Methods Appl., 17 (2018), 141-160.
- [14] H. Pei, Z. Li, Quenching for a parabolic system with general singular terms, J. Nonlinear Sci. Appl., 7 (2016), 1-10.
- [15] B. Seluk, Quenching behavior of a semilinear reaction-diffusion system with singular boundary condition, Turk. J. Math., 40 (2016), 166-180.

-
- [16] M. Taha, K. Toure, E. Mensah, Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary equation, *Far East J. Appl. Math.*, 60 (2012), 125-167.
- [17] S.N. Zheng, X.F. Song, Quenching rates for heat equations with coupled nonlinear boundary flux, *Sci. China Ser. A.*, 51 (2008), 1631-1643.