

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union - Discipline – Travail

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Institut National Polytechnique
Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro



Ecole Doctorale Polytechnique

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY

Mention : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Edp et Analyse Numérique

Thème :

Approximations numériques du temps d'explosion des solutions

**de quelques équations aux dérivées partielles (edp) de
type parabolique semi-linéaires : étude comparative**

Présentée et soutenue publiquement le 10 juillet 2020 par

ADOU Koffi Achille

JURY

M. ASSIDJO Nogbou Emmanuel	Professeur Titulaire, Institut National Polytechnique HB	Président
M. TOURE Kidjégbo Augustin	Professeur Titulaire, Institut National Polytechnique HB	Co-Directeur de thèse
M. COULIBALY Adama	Maître de Conférences, Université Félix Houphouët-Boigny	Co-Directeur de thèse
M. MONSIA Marc Delphin	Professeur Titulaire, Université d'Abomey-Calavi	Rapporteur
M. KOUA Brou Jean Claude	Maître de Conférences, Université Félix Houphouët-Boigny	Rapporteur
M. ADOU Kablan Jérôme	Professeur Titulaire, Université Félix Houphouët-Boigny	Examineur

*« C'est à force d'études et de travaux que l'homme réussit
à distinguer qu'il a une âme différente de son corps ;
et c'est à force de génie, la meilleure partie de lui-même,
qu'il devient immortel par ses ouvrages. »*

Pierre-Jules Stahl

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut et tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, le respect, l'amour et l'estime que j'ai. Aussi, c'est tout simplement que je dédie cette thèse

✠ à la mémoire de ma mère *FANGBE AHOU* ✠

✠ à mes parents ✠

✠ à ma fille Maëlys ✠

✠ à ma famille et mes amis ✠

✠ à tous ceux qui m'aiment ✠

puisse ce travail, constituer le bon modèle que vous attendez de moi.

Remerciements

Le bon déroulement de cette thèse, jusqu'à son aboutissement, est en grande partie imputable à mon Directeur de thèse, Monsieur TOURÉ Kidjégbo Augustin, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny de Yamoussoukro. Je le remercie du fond du cœur, aussi bien pour avoir accepté de diriger mes travaux avec talent, que pour m'avoir encouragé et transmis sa passion de la recherche et la motivation nécessaire pour mener à bien ce travail. Son énergie, sa rigueur, ses compétences et sa constante disponibilité aux appels téléphoniques et aux e-mails sont autant de qualités sans faille que j'apprécie chez lui et qui m'ont beaucoup aidé dans ce cheminement. Je le remercie vivement et chaleureusement pour son soutien et ses conseils avisés. Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance et ma profonde gratitude à mon Co-Directeur de Thèse, Monsieur COULIBALY Adama, Maître de conférences à l'Université Félix Houphouët-Boigny, pour le soutien, les conseils précieux et l'intérêt incessant qu'il a porté au suivi de ce travail.

Je remercie respectueusement Monsieur ASSIDJO Nogbou Emmanuel, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette Thèse. Ce fut un grand honneur que Monsieur MONSIA Marc Delphin, Professeur Titulaire à l'Université d'Abomey-Calavi et Monsieur KOUA Brou Jean Claude, Maître de Conférences à l'Université Félix Houphouët-Boigny aient accepté de rapporter sur cette thèse. Je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce mémoire, et pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail. Je n'oublie pas Professeur ADOU

Remerciements

Kablan Jérôme qui a accepté d'être l'examineur de cette Thèse. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Je remercie profondément Monsieur KOFFI N'Guessan, Directeur Général de l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny (INP-HB) de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour leur accueil cordial dans l'illustre école de formation qu'ils gèrent excellemment. Je remercie vivement Professeur YAO Kouassi Benjamin, Directeur de l'École Doctorale Polytechnique INP-HB Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour leur accueil chaleureux dans la prestigieuse école doctorale dont ils assurent la direction. Un merci particulier au Professeur HILI Ouagnina, Directeur du laboratoire de Mathématiques et des Nouvelles Technologies de l'Information. Je remercie sincèrement Docteur TAHA M. Mathurin pour son hospitalité, sa gentillesse et sa disponibilité depuis mon arrivée dans cette école doctorale et à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques et des Nouvelles Technologies de l'Information, pour leur accueil chaleureux et leur franche collaboration. Je tiens aussi à affirmer ma reconnaissance à tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique et le personnel administratif de l'Institut National Polytechnique INP-HB Yamoussoukro, Côte d'Ivoire pour leur douceur et leurs critiques constructives. Je remercie cordialement Docteur KOUASSI Ayo Hermith, pour ses conseils avisés et ses encouragements. Je remercie profondément Docteur KOFFI N'Guessan, pour ses conseils avisés et son aide précieuse dans la relecture de ma Thèse. Que Dieu le récompense. Je tiens à remercier TEBILY Blessing, étudiante à l'UFR Sciences Naturelles de l'Université Nangui Abrogoua d'Abidjan, avec qui j'ai partagé des moments inoubliables, pour son aide et son soutien durant toutes ces années de Thèse. Je remercie affectueusement mes amis depuis l'Université Nangui Abrogoua d'Abidjan, N'DRI Cyrille, BAMBA Lanciné, KANGA Serges, GANON Ardjouma, EDJA Beranger, KOUAKOU Jérôme, TA bi David, WADJA Marcelin, AHIWA Nicolas, Boua Amichia pour leur soutien et conseils.

Remerciements

Enfin, il me paraît aussi important de mentionner ici toutes les personnes évoluant hors de la sphère universitaire, mais sans lesquelles cette Thèse n'aurait sûrement jamais pu se faire. Toute ma famille bien entendu, qui m'a toujours apporté son soutien, sa patience et son optimisme quant à ma carrière dans le supérieur. Une pensée particulière va à mon père ADOU Osséi Joseph, ma grande sœur Mme KONATÉ épse KOFFI Marcelline , mes mamans MESSOUMA Élise et KINIMO Lucienne qui ont beaucoup rêvé de ce jour. Que Dieu leur accorde santé et longue vie. Je n'oublie pas mes proches pour leur soutien tout au long de ces années d'intenses recherches et tous ceux qui, de près ou de loin, ont aidé à la réalisation de cette thèse.

Table des matières

Dédicace	ii
Remerciements	iii
Liste des tableaux	x
Table des figures	xi
Liste des symboles et abréviations	xii
Résumé	xiv
Abstract	xv
Introduction	1
1 Etude du problème continu	7
1.1 Présentation du problème continu	7
1.2 Existence et unicité de la solution du problème continu	8
1.3 Quelques propriétés du problème continu	9
2 Étude numérique de l'approximation du temps d'explosion des solutions d'edp paraboliques semi-linéaires	13
2.1 Étude du problème I	14
2.1.1 Étude du problème semi-discret en espace	14

Table des matières

2.1.2	Quelques propriétés du problème semi-discret	18
2.1.3	Étude du problème discret	32
2.1.4	Quelques propriétés du problème discret	36
2.1.5	Explosion de la solution discrète	41
2.1.6	Estimation du temps d'explosion numérique	44
2.2	Étude du problème II	46
2.2.1	Étude du problème semi-discret en espace	46
2.2.2	Estimation du temps d'explosion numérique	52
2.3	Expériences numériques	55
3	Du temps d'extinction numérique au temps d'explosion numérique	63
3.1	Préliminaires	63
3.2	Problème semi-discret	66
3.3	Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'ex- plosion	68
3.4	Expériences numériques	73
4	Comparaison de méthodes numériques	77
4.1	Etude qualitative	77
4.2	Etude quantitative	79
4.2.1	Expériences numériques	79
4.2.1.1	Tableaux	79
4.2.1.2	Figures	85
	Conclusion et Perspectives	97
A		99
	ANNEXE A : Notations, définitions et quelques propriétés	99
A.1	Notations et définitions	100

Table des matières

A.2	Existence et unicité des solutions de problèmes paraboliques	102
A.3	Principe du maximum et de comparaison pour des équations paraboliques	104
	Bibliographie	106

Liste des tableaux

2.1	Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 2$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$	56
2.2	Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$	56
2.3	Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.001$	56
2.4	Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{5/1000}$ et $\tau = 0.001$	57
2.5	Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 2$	58
2.6	Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$	58
2.7	Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$	58
3.1	Résultats numériques obtenus pour $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 10$	73
3.2	Résultats numériques obtenus pour $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 9$	73
3.3	Résultats numériques obtenus pour $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 2$	74
3.4	Résultats numériques obtenus pour $\beta = 3$ et $\varepsilon = 6$	74
3.5	Résultats numériques obtenus pour $\beta = 3$ et $\varepsilon = 3$	74
3.6	Résultats numériques obtenus pour $\beta = 3$ et $\varepsilon = 1$	74
3.7	Résultats numériques obtenus pour $\varepsilon = 3$ et $\beta = 2$	74
3.8	Résultats numériques obtenus pour $\varepsilon = 1$ et $\beta = 2$	74
4.1	Table de comparaison de méthodes numériques	78
4.2	<i>Probleme I</i> : Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$	79
4.3	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 2$	80

Liste des tableaux

4.4	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$	80
4.5	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$	80
4.6	<i>Probleme I</i> : Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.001$	81
4.7	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$, $p = 2$ avec $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$	81
4.8	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$ avec $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.001$	82
4.9	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$ avec $H(s) = s^{5/1000}$ et $\tau = 0.001$	82
4.10	<i>Probleme I</i> : Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$	82
4.11	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 2$	83
4.12	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$	83
4.13	<i>Probleme II</i> : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$	83

Table des figures

4.1	Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 2$	85
4.2	Evolution de la solution discrète pour $I = 128$, $\lambda = 0$ et $p = 2$	86
4.3	Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 2$	87
4.4	Evolution de la solution discrète pour $I = 32$, $\lambda = 1$ et $p = 2$	88
4.5	Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$, $p = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$	89
4.6	Evolution de la solution discrète pour $I = 128$, $\lambda = 0$, $p = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$	90
4.7	Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 1$, $p = 2$, $H(s) = s^{5/1000}$ et $\tau = 0.001$	91
4.8	Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 3$	92
4.9	Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 128$, $\lambda = 0$ et $p = 3$	93
4.10	Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 2$	94
4.11	Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 32$, $\lambda = 1$ et $p = 2$	95

Liste des symboles et abréviations

$\mathbb{R}^N = \{x = (x_1, \dots, x_N), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}$;

$C^{k,l}([-1, 1] \times [0, T])$, $k \geq 0$, $l \geq 0$: Fonctions k fois, continûment différentiable sur $[-1,1]$ et l fois, continûment différentiable sur $[0,T]$;

I : Entier naturel strictement positif, représente le nombre d'intervalles consécutifs dans une subdivision de l'intervalle $[-1,1]$;

$C^k([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$, $k \geq 0$: Fonctions k fois, continûment différentiable sur $[0,T]$ à valeurs dans \mathbb{R}^{I+1} ;

x_i : Abscisse du i -ième point de la subdivision de l'intervalle $[-1,1]$

t_n : n -ième mesure du temps dans l'intervalle $[0,T]$;

n_τ : Nombre d'itérations faites par l'ordinateur, pour calculer le temps d'explosion numérique, pour chaque valeur de I ;

s : Ordre de l'approximation du calcul du temps d'explosion par l'ordinateur à partir de $I = 64$.

h : Taille du pas d'espace ;

$\tau = \Delta t_n$: Taille du pas de temps ;

X^T : Transposée du vecteur X ;

u_t : Dérivée partielle de u par rapport à t ;

u_x : Dérivée partielle de u par rapport à x ;

u'_0 : Dérivée première de u_0 par rapport à x ;

u''_0 : Dérivée seconde de u_0 par rapport à x ;

$\frac{dU}{dt}$: Dérivée première de U par rapport à t ;

Liste des symboles et abréviations

u_{xx} : Dérivée partielle seconde de u par rapport à x ;

$U_i(t)$: Approximation semi-discrète de $u(x_i, t)$;

δ^2 : Opérateur discret de dérivation du second ordre en espace ;

δ^0 : Opérateur discret de dérivation centrée du premier ordre en espace ;

δ_+ : Opérateur discret de dérivation avancée du premier ordre en espace ;

δ_t : Opérateur discret de dérivation du premier ordre en temps ;

∇ : Opérateur gradient ;

Δ : Opérateur laplacien ;

T_b : Temps d'explosion du problème continu ;

T_b^h : Temps d'explosion du problème semi-discrète en espace ;

$T_\infty(\tau, h)$: Temps d'explosion du problème discret ;

T^{max} : Temps maximal d'existence de la solution u ;

$\|u(\cdot, t)\|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |u(x, t)|$;

$\|u_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |u(x_i, t)|$;

$\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$;

$\|U_h^{(n)}\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i^{(n)}|$;

$\|u\| = \sup_{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |u(x, t)|$

CPU time (Control process Unit) : Temps mis par l'ordinateur pour calculer le temps d'explosion numérique, pour chaque valeur de I .

Résumé

Cette thèse porte sur l'approximation numérique du temps d'explosion des solutions des équations de réaction diffusion non linéaires soumises à des conditions aux bords de Dirichlet et à une donnée initiale positive. Après avoir prouvé l'explosion et l'extinction des solutions théoriques en temps fini de ces équations aux dérivées partielles (edp), nous donnons des conditions suffisantes sous lesquelles l'explosion numérique se produit. Les principaux résultats concernent l'approximation numérique du temps d'explosion et la comparaison des méthodes numériques utilisées. Par différentes méthodes numériques conservant fidèlement les propriétés du problème continu, nous avons estimé le temps d'explosion de quelques edp d'explosion ainsi que des edp d'extinction tout en transformant ces dernières en edp d'explosion. Nous avons comparé qualitativement et quantitativement ces différentes méthodes numériques et pour vérifier nos différents résultats obtenus, nous avons effectué des simulations numériques qui ont donné de bonnes approximations du temps d'explosion des solutions des problèmes continus.

Mots-clés : Equations paraboliques, équations de réaction diffusion non linéaires, discrétisation, explosion, temps d'explosion, extinction, temps d'extinction.

Abstract

This thesis deals with the theoretical and numerical study of blow-up and quenching problems for nonlinear diffusion reaction equations subjected to Dirichlet boundary conditions and to an initial positive data. After proving blow-up and quenching of theoretical solutions in a finite time of these partial differential equations (pde), we give sufficient conditions under which numerical blow-up occurs.

The main results concern the numerical estimating of the blow-up time and the comparison of the numerical methods used.

By different numerical methods preserving faithfully properties of continuous problems, we estimated the blow-up time of some blow-up problems and quenching problem by transforming these last into blow-up problems. we compared these different numerical methods qualitatively and quantitatively and to verify ours different results, we did numerical simulations that gave good approximations of the blow-up time of the solution of the continuous problem.

Keywords : Parabolic equations, Reaction-diffusion equation, discretization, blow-up, blow-up time, quenching, quenching time.

Introduction

Les équations d'évolution (équations aux dérivées partielles dépendant du temps) sont omniprésentes dans bon nombre de domaines tels que la physique, la biologie, la simulation aéronautique, la prévision météorologique, la théorie de la gravitation. Elles modélisent un grand nombre de problèmes importants dans ces domaines et peuvent capter les caractéristiques essentielles d'un système complexe, naturel ou artificiel en vue de décrire, prévoir ou de contrôler son évolution. Plusieurs auteurs ont étudié depuis des décennies, l'existence et l'unicité des solutions de ces équations aux dérivées partielles (edp) de type linéaires ou non linéaires. Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux. C'est pourquoi dans ce mémoire, nous considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaires suivante

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x, t, u, \nabla u, \Delta u), & x \in \Omega, t \in]0, T[& (0.1) \\ Bu(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in]0, T[& (0.2) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega} & (0.3) \end{cases}$$

où B représente les conditions au bord, T le temps maximal d'existence de la solution u et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On s'intéresse en particulier aux équations de réaction-diffusion semi-linéaires dans le cas où F dépend seulement de u . Ces situations se composent de manière rigoureuse en deux cas.

Le cas où $F(u) \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow K$, ($K \in [0, \infty[$). Ce type de réaction diffusion

intervient par exemple en chimie, dans l'étude des phénomènes de polarisation dans les conducteurs ioniques et a été beaucoup investi par plusieurs auteurs, (voir [56, 32, 51, 75, 67]). Ils montrent que sous certaines conditions la solution approche K en temps fini T . C'est le phénomène d'extinction ou "quenching". T est appelé temps d'extinction.

Le second cas concerne le phénomène d'explosion où $F(u) \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow \infty$. De manière plus simple on dit que la solution d'une edp explose si elle atteint une valeur infinie en un temps fini. Ce phénomène se produit en théorie de combustion ou en dynamique de la population y compris dans les systèmes explosifs naturels ou artificiels comme les éruptions volcaniques, les grondements de tonnerre ou les bombes etc...

Le phénomène d'explosion remonte à la seconde partie du XX^e siècle et a été largement investi par un grand nombre d'auteurs, (voir [83, 37, 2, 19, 76, 72, 45, 23, 60, 89, 87]). L'étude de ce phénomène n'est pas intéressant seulement du point de vue mathématique mais elle l'est aussi pour la compréhension profonde de la nature des phénomènes que les équations mathématiques décrivent. Depuis les travaux des pionniers tels que Fujita [44], Kaplan [69], etc... le phénomène d'explosion pour les edp paraboliques non linéaires a fait l'objet de plusieurs investigations et l'accent a été mis particulièrement sur où, quand et comment la solution explose. En effet la connaissance du lieu et du temps d'explosion permet de faire des prévisions et également de prévenir des catastrophes liées à des systèmes explosifs (les éruptions volcaniques, les bombes etc...). Mais plusieurs questions à ce niveau restent encore ouvertes. En général il est très difficile voire impossible de calculer théoriquement la solution ou le temps d'explosion des solutions de ces edp. C'est pourquoi les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour approximer les solutions, les temps et lieux d'explosions de ces équations. Les méthodes numériques sont donc devenues une alternative indispensable dans l'étude des équations aux dérivées partielles d'explosion.

Mais il n'est toujours pas évident de simuler numériquement ce phénomène avec précision. En effet lorsqu'on s'approche du temps d'explosion les données numériques croissent indéfiniment. De plus il n'est pas tout à fait clair que les caractéristiques d'un tel phénomène (naturel) puissent être fidèlement mises en évidence dans une équation discrétisée qui est une approximation de l'équation originelle. Même si contrairement à l'étude théorique, l'étude numérique des phénomènes d'explosion des solutions des équations aux dérivées partielles a connu un intérêt un peu tardif, il existe cependant quelques méthodes numériques de plus en plus efficaces pour approximer le temps d'explosion numérique. A cet effet plusieurs algorithmes ont été développés (voir [26, 76, 53, 23]).

Pour reproduire le phénomène d'explosion numériquement, T. Nakagawa [76] considère le schéma aux différences finies de (0.1),

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t_n} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + F(U_j^n).$$

où h représente le pas de maillage en espace et $x_j = jh$. Le pas de temps est défini de manière adaptative en fonction de $F(u)$. Par exemple pour $F(u) = u^2$ on peut prendre

$$\Delta t_n = \tau \cdot \min \left\{ 1, \frac{1}{\|U_h^n\|_\infty} \right\},$$

et $t_0 = 0$, $t_n = t_{n-1} + \Delta t_{n-1}$ et τ est un paramètre prescrit et $\|\cdot\|_\infty$ indique la norme L^∞ . U_j^n est une approximation de $u(t_n, x_j)$. Il définit le temps d'explosion numérique par

$$T(\tau, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta t_n.$$

Ensuite il montre que ce temps numérique $T(\tau, h)$ est fini et converge vers le temps réel T quand $\tau, h \rightarrow 0$. Ce qui semblait être le premier algorithme qui pouvait approximer numériquement le temps d'explosion. Plus tard les résultats de T. Nakagawa ont été généralisés dans [1, 27, 23]. la convergence était également prouvée. Toutefois cette méthode peut ne pas bien fonctionner lors du calcul d'un

temps d'explosion numérique puisque le temps est défini par une somme infinie. Ce qui nous oblige à déterminer quand arrêter le calcul. Or il n'existe pas de stratégie simple permettant de déterminer quand arrêter ce calcul, voir [26, 27].

Notre contribution dans ce mémoire est l'étude numérique et principalement l'approximation numérique du temps d'explosion du problème (0.1 – 0.3) dans les cas où $F(u) = (u + \lambda)^p$, $F(u) = e^{\alpha u}$ et $F(u) = \frac{\varepsilon}{(1-u)^\beta}$, par différentes méthodes ainsi que la comparaison de ces méthodes numériques utilisées.

Cette thèse est organisée de la façon suivante : d'abord nous allons adapter quelques résultats théoriques existants à l'aperçu de l'étude théorique, ensuite nous passons à l'étude principale qui est l'étude numérique du problème continu (0.1 – 0.3) et terminons par l'étude comparative des différentes méthodes numériques utilisées pour approcher le temps d'explosion.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous donnons un aperçu de l'étude théorique du problème continu (0.1 – 0.3). La résolution de ce genre de problème consiste à trouver une fonction u à deux variables (espace et temps), dépendant des choix de $F(u)$ et u_0 telle que u vérifie chacune des équations du problème (0.1 – 0.3), et

$$u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T_{max}]) \cap C^{2,1}(\Omega \times [0, T_{max}]),$$

où $T_{max} \in]0, \infty]$ désigne le temps d'existence maximal de la fonction u , dépendant également de $F(u)$ et u_0 . Quand T_{max} est fini, alors la solution devient non bornée en temps fini et on dit qu'elle explose. Quand $T_{max} = \infty$, on dit que la solution est globale. On peut consulter par exemple ([87, 86, 72, 31, 74, 81, 39, 42]).

Nous donnons ensuite quelques propriétés qualitatives de la solution ainsi que des références sur l'étude théorique de ce problème.

Le second chapitre est consacré à l'étude numérique des problèmes I et II. Ce chapitre est subdivisé en deux parties.

La première partie concerne l'étude du problème I. Dans cette partie nous ef-

fectuons une semi discrétisation en espace, Ensuite Nous montrons que la solution du problème semi-discret existe et est unique. puis Nous prouvons que cette unique solution converge vers la solution du problème continu lorsque le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro. Nous montrons également que notre schéma reproduit les propriétés du problème continu et que la solution semi-discrète explose en un temps fini. Enfin nous reprenons ce même travail pour le problème totalement discrétisé et estimons le temps d'explosion discret.

Dans la deuxième partie on s'intéresse au problème II. Ici nous faisons une semi discrétisation (en espace) du problème continu. Ensuite nous montrons que cette solution semi-discrète explose en un temps fini. Puis nous estimons ce temps d'explosion numérique et montrons la convergence de ce temps vers le temps d'explosion réel. Nous terminons ce chapitre par des expériences numériques.

Le chapitre 3 concerne l'étude numérique du problème d'extinction (problème III) où $F(u) = \frac{\varepsilon}{(1-u)^\beta}$. Dans ce chapitre, nous transformons le problème d'extinction en un problème d'explosion, ensuite nous montrons que les deux problèmes sont équivalents et prouvons l'explosion de la solution du problème obtenu en temps fini, puis nous estimons le temps numérique et montrons la convergence de ce temps vers le temps réel du problème continu. Nous terminons par quelques résultats numériques.

Le dernier chapitre est destiné à l'étude comparative des méthodes numériques utilisées pour approcher le temps d'explosion numérique des solutions des problèmes étudiés ci-dessus. Nous relevons quelques avantages et insuffisances de chacune de ces méthodes. Nous faisons quelques expériences numériques pour illustrer notre analyse.

En annexe nous rappelons quelques notions telles que des définitions et des propriétés sur les équations aux dérivées partielles paraboliques, les principes du maximum et de comparaison qui ont été fréquent dans notre thèse ainsi que des

résultats d'existence et d'unicité. Les annexes contiennent aussi trois publications tirées de la présente thèse. Il s'agit des articles suivants :

1. **Numerical study of estimating the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations**, Far East Journal of Applied Mathematics (FJAM), 100, 4, 291-308, (2018).
2. **On the computation of the numerical blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation**, International Journal of Numerical Methods and Applications, 18, 1 :7-18, (2019).
3. **On the numerical quenching time at blow-up** , Advances in Mathematics : Scientifis Journal (AMSJ), 8, 2, 71-85, (2019).

Chapitre 1

Etude du problème continu

L'organisation de ce chapitre se présente comme suit : dans la section 1.1, nous présentons le problème continu ensuite la section 1.2 traite de l'existence locale et de l'unicité de la solution du problème continu et enfin nous donnons dans la section 1.3, quelques propriétés qualitatives de la solution du problème continu.

1.1 Présentation du problème continu

On considère l'équation parabolique semi-linéaire

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)), \quad -1 < x < 1, \quad t \in]0, T[, \quad (T > 0) \quad (1.1)$$

soumise aux conditions aux bords de Dirichlet homogène

$$u(-1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (1.2)$$

et à la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) = \phi(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.3)$$

1.2 Existence et unicité de la solution du problème continu

dans les cas suivants :

Premier cas : $f(u) = e^{\alpha u}$, ($\alpha > 0$).

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi(-x) = \phi(x), \quad \phi(0) > 0, \quad \phi(1) = 0, \quad (1.4)$$

$$\phi''(x) + f(\phi(x)) \geq 0 \quad \text{si } -1 < x < 1, \quad \phi'(x) \leq 0 \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

Deuxième cas : $f(u) = (u + \lambda)^p$, ($p > 1$, $\lambda \geq 0$).

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi(-x) = \phi(x), \quad \phi(0) > 0, \quad \phi(1) = 0, \quad (1.5)$$

$$\phi''(x) + f(\phi(x)) \geq 0 \quad \text{si } -1 < x < 1, \quad \phi'(x) \leq 0 \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

Troisième cas : $f(u) = \frac{\varepsilon}{(1-u)^\beta}$, ($\beta > 0$, $\varepsilon > 0$).

$$\phi''(x) + f(\phi(x)) \geq 0, \quad \phi(\pm 1) = 0, \quad 0 \leq \phi(x) < 1 \quad \text{si } -1 < x < 1. \quad (1.6)$$

NB : Dans ce travail, on appellera respectivement Problème I, Problème II, et problème III, le problème (1.1) – (1.3) respectivement dans les cas (1.4), (1.5) et (1.6) et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

1.2 Existence et unicité de la solution du problème continu

L'existence et l'unicité pour la solution régulière du problème continu (1.1) – (1.3) dans le premier et le second cas (problèmes I et II) ont été prouvées. En effet d'après le théorème A.4 (voir Annexe), le problème (1.1) – (1.3) admet une unique

1.3 Quelques propriétés du problème continu

solution pour $f(u) = e^{\alpha u}$ et $f(u) = (u + \lambda)^p$. On peut aussi consulter [85] et [59] ainsi que la théorie classique des équations paraboliques qui fournit également des résultats d'existence et d'unicité pour ce genre de problème, notamment les résultats de J. Below [15, 16], H. Amann [7] et O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva [60]. Par ailleurs Arturo De Pablo [30] prouve que si f est convexe et satisfait $\int_{u_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty$ alors la solution de (1.1) – (1.3) explose en temps fini. En particulier pour $f(u) = (u + \lambda)^p$ et $f(u) = e^{\alpha u}$, il est prouvé dans [41, 42, 89] que le problème (1.1) – (1.5) explose en temps fini en un seul point $x = 0$.

Concernant le problème III où (1.1) – (1.3) décrit un phénomène d'extinction, les auteurs dans ([32, 5, 56, 64, 51]) établissent l'existence locale de la solution et prouvent que l'unique solution non négative s'éteint en temps fini. La littérature sur les problèmes d'extinction fournit aussi des résultats sur l'existence, l'unicité et le comportement des solutions, on pourra consulter ([73, 82, 67, 75] et les références s'y trouvant).

1.3 Quelques propriétés du problème continu

Ici nous rappelons quelques définitions et propriétés de notre problème continu qui nous servirons dans la suite de notre travail.

Définition 1.1. *On dit que la solution u du problème continu (1.1) – (1.3) explose en un temps fini, s'il existe un temps fini T_b tel que $\|u(\cdot, t)\|_\infty < \infty$ pour $t \in [0, T_b[$, mais*

$$\lim_{t \rightarrow T_b} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

où $\|u(\cdot, t)\|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |u(x, t)|$.

Le temps T_b est appelé temps d'explosion de la solution u . On dit de même que la solution u du problème continu (1.1) – (1.3) s'éteint ou "quenches" en un temps fini,

1.3 Quelques propriétés du problème continu

s'il existe un temps fini T_q tel que $\|u(\cdot, t)\|_\infty < 1$ pour $t \in [0, T_q[$, mais

$$\lim_{t \rightarrow T_q} \|u(\cdot, t)\|_\infty = 1.$$

et T_q est alors appelé temps d'extinction de la solution u .

Définition 1.2. Un point $x \in]-1, 1[$ est un point d'explosion (respectivement point d'extinction) de (1.1) – (1.3) s'il existe une suite (x_m, t_m) telle que

$$t_m \uparrow T, \quad x_m \rightarrow x \text{ et } u(x_m, t_m) \rightarrow \infty \text{ si } m \rightarrow \infty$$

(respectivement $t_m \uparrow T, \quad x_m \rightarrow x \text{ et } u(x_m, t_m) \rightarrow 1 \text{ si } m \rightarrow \infty$.)

Définition 1.3. La fonction u est solution classique de (1.1) – (1.3) si

$$u \in C^{2,1}(\text{]}-1, 1[\times]0, T[) \cap C(\text{]}-1, 1[\times [0, T]) \text{ et vérifie (1.1) – (1.3).}$$

Définition 1.4. Une fonction u est appelée sous-solution de (1.1) – (1.3) sur

$$\text{]}-1, 1[\times [0, T[\text{ si } u(x, t) \in C^{2,1}(\text{]}-1, 1[\times]0, T[) \cap C(\text{]}-1, 1[\times [0, T]) \text{ satisfait}$$

$$u_t(x, t) \leq u_{xx}(x, t) + f(u(x, t)), \quad -1 < x < 1, \quad t \in]0, T[,$$

$$u(\pm 1, t) \leq 0, \quad t \in]0, T[,$$

$$u_0(x) \leq \phi(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Dans le cas où les inégalités ci-dessus sont renversées, on parle de sur-solution.

Théorème 1.1. Soit u une sous solution et v une sur-solution du problème

$$(1.1) – (1.3), \text{ alors } u \leq v \text{ sur } \text{]}-1, 1[\times [0, T[.$$

On pourra consulter [87, 32] pour une preuve.

Corollaire 1.1. Si $u_0'' + f(u_0) \geq 0$ sur $\text{]}-1, 1[$, alors $u_t \geq 0$ sur $\text{]}-1, 1[\times [0, T[$.

Preuve. La condition sur u_0 et (1.3–1.4) impliquent que u_0 est une sous solution de (1.1) – (1.3), ainsi $u(x, t) \geq u_0(x)$ sur $\text{]}-1, 1[\times [0, T[$.

1.3 Quelques propriétés du problème continu

Soit $v(x, t) = u(x, t + h)$ ($0 < h < \frac{T}{2}$), dans $] - 1, 1[\times] 0, T - h[$, on trouve que $v(x, 0) = u(x, h) \geq u_0(x)$, et $v(x, t)$ est une solution et donc une sur-solution de (1.1) – (1.3). Par le théorème 1.1 on a $u(x, t + h) \geq u(x, t)$ pour $h > 0$ (h assez petit), par conséquent $u_t \geq 0$. \square

Les lemmes suivants sont les formes continues du principe du maximum ainsi que celles de comparaison (voir [16, 84, 43, 59]).

Lemme 1.1. *Soit T un réel strictement positif.*

Soient $a(x, t), b(x, t) \in C([-1, 1] \times [0, T])$ et $v(x, t) \in C^{2,1}([-1, 1] \times [0, T[)$ tels que $b(x, t)v_x(x, t) \leq 0$ et $a(x, t) \leq 0$ pour tout $(x, t) \in [-1, 1] \times] 0, T[$,

$$\begin{aligned} v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) + b(x, t)v_x(x, t) + a(x, t)v(x, t) &> 0, \\ v(x, 0) &> 0. \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$v(x, t) > 0 \quad \text{pour tout } (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T[.$$

Lemme 1.2. *Soit T un réel strictement positif.*

Soient $a(x, t), b(x, t) \in C([-1, 1] \times [0, T])$ et $v(x, t) \in C^{2,1}([-1, 1] \times [0, T])$ tels que $b(x, t)v_x(x, t) \leq 0$ et $a(x, t) \leq 0$ pour $(x, t) \in [-1, 1] \times] 0, T[$,

$$\begin{aligned} v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) + b(x, t)v_x(x, t) + a(x, t)v(x, t) &\geq 0, \\ v(x, 0) &\geq 0. \end{aligned}$$

1.3 Quelques propriétés du problème continu

Alors, on a :

$$v(x, t) \geq 0, \quad \text{pour tout } (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T[.$$

Le lemme suivant montre que la solution du problème (1.1) – (1.3) reste symétrique si la donnée initiale est symétrique.

Lemme 1.3. *Soit T un réel strictement positif. Si u est solution du problème (1.1) – (1.3) telle que*

$$0 \leq \phi(x) = \phi(-x) \text{ dans } [-1, 1], \tag{1.7}$$

alors

$$u(x, t) = u(-x, t) \text{ pour tout } -1 \leq x \leq 1, 0 < t < T.$$

Preuve. Soit v solution du problème (1.1) – (1.3) telle que $v(x, t) := u(-x, t)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et $0 \leq t < T$. La condition 1.7 et le théorème A.3 impliquent que $u = v$ dans $[-1, 1] \times [0, T[$. □

Théorème 1.2. [67] *Si la solution u de (1.1) – (1.3) s'éteint en un temps fini T , alors on a :*

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u_t(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

Chapitre 2

Étude numérique de l'approximation du temps d'explosion des solutions d'edp paraboliques semi-linéaires

Le présent chapitre concerne l'étude numérique du phénomène d'explosion pour des problèmes semi-linéaires paraboliques. Le phénomène d'explosion a été l'objet d'investigations de nombreux auteurs, voir [69, 42, 44, 89]. Leurs travaux montrent que les propriétés de l'explosion sont dues à la géométrie du domaine Ω , aux données initiales u_0 et à la non linéarité de la source $f(u)$. Étudier ce problème soulève naturellement d'importantes questions à savoir le comportement de la solution, le lieu d'explosion, le temps d'explosion etc... qui ont été largement discutées théoriquement (voir [61, 90, 36, 7, 3, 49, 38]). Par différentes méthodes numériques nous étudions les problèmes I et II. Dans la première section consacrée au problème I, après avoir prouvé l'existence et l'unicité des solutions semi-discrètes et discrètes, on montre l'explosion de ces solutions et ensuite on détermine le temps d'explosion de la solution discrète. Dans la section 2, on considère le problème II, par la méthode de l'énergie ou de concavité introduite par H.A Levine dans [65, 66], on prouve l'explosion de la solution semi-discrète

2.1 Étude du problème I

et par la technique de la transformation de la longueur d'arc (voir [53]), on estime le temps d'explosion de cette solution. Finalement on présente des résultats numériques pour illustrer notre analyse.

2.1 Étude du problème I

Ici on utilise la méthode de discrétisation la plus classique : la méthode des différences finies qui est la "mère" des méthodes de discrétisation plus élaborées telles que les méthodes d'éléments finis, de volumes finis ou de Galerkin discontinu. Le principe de la méthode des différences finies consiste à écrire l'équation aux dérivées partielles (1.1) – (1.3) aux points de discrétisation x_i , puis à approcher l'opérateur différentiel par un quotient différentiel, de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnues discrètes sensées représenter des approximations de u aux points de discrétisation. Une fois le problème discret obtenu, il est raisonnable de se demander si ce problème admet une unique solution. Si oui, en quel sens cette solution est-elle proche de celle du problème continu. c'est pourquoi nous examinerons les résultats obtenus après discrétisation.

2.1.1 Étude du problème semi-discret en espace

Considérons la subdivision

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_I = 1,$$

de l'intervalle $[-1, 1]$, où I est un entier naturel non nul et $i = 0, \dots, I$.

Nous choisissons comme pas constant d'espace, le réel strictement positif h tel que

$$h = h_i = x_{i+1} - x_i = \frac{2}{I} \quad \text{pour } i = 0, \dots, I.$$

2.1 Étude du problème I

Nous avons alors

$$x_{i+1} = x_i + h \quad \text{pour } i = 0, \dots, I.$$

Ce qui implique

$$x_i = ih - 1 \quad \text{pour } i = 0, \dots, I.$$

Soit T un réel strictement positif. $]0, T[$ est un intervalle de temps sur lequel la solution u du problème continu est définie. En remplaçant x par x_i dans le problème continu (1.1)-(1.3), nous obtenons le schéma suivant pour $t \in]0, T[$

$$\begin{cases} u_t(x_i, t) = u_{xx}(x_i, t) + f(u(x_i, t)), & i = 1, \dots, I - 1, \\ u(x_0, t) = 0, \quad u(x_I, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i) = \phi(x_i) > 0, & i = 0, \dots, I. \end{cases} \quad (2.1)$$

On suppose que $u \in C^{4,1}([-1, 1] \times [0, T])$. Soit $t \in]0, T[$. On détermine des approximations de $u_{xx}(x_i, t)$. on a :

$$u(x_{i+1}, t) = u(x_i + h, t), \quad i = 0, \dots, I - 1, \quad t \in]0, T[,$$

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i - h, t), \quad i = 1, \dots, I, \quad t \in]0, T[.$$

Un développement de Taylor-Young à l'ordre 4 en espace nous donne :
pour $i = 0, \dots, I - 1$ et $t \in]0, T[$,

$$u(x_{i+1}, t) = u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t) + O(h^4),$$

2.1 Étude du problème I

pour $i = 1, \dots, I$ et $t \in]0, T[$,

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t) + O(h^4),$$

avec $|O(h^4)| \leq ch^4$, où c est une constante indépendante de h . En additionnant les deux précédentes égalités, on obtient l'expression suivante de $u_{xx}(x_i, t)$:

$$u_{xx}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in]0, T[.$$

Autrement dit, pour h suffisamment petit, on a :

$$u_{xx}(x_i, t) \approx \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad t \in]0, T[.$$

On cherche une approximation $U_i(t)$ de $u(x_i, t)$, $i = 0, \dots, I$, $t \in]0, T[$. Un choix de schéma numérique pour le problème (2.1) est alors le schéma suivant qui représente le problème semi-discret en espace associé au problème continu (1.1)-(1.3)

$$\begin{cases} \frac{dU_i(t)}{dt} = \delta^2 U_i(t) + f(U_i(t)), & 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T[\end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} U_0(t) = 0 \quad U_I(t) = 0, & t \in [0, T[\end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} U_i(0) = \varphi_i \geq 0, & 0 \leq i \leq I, \end{cases} \quad (2.4)$$

où

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1,$$

$$\varphi_0 = 0 = \varphi_I, \quad \varphi_i = \varphi_{I-i}, \quad \delta^+ \varphi_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h}, \quad 0 \leq i \leq I-1, \quad (2.5)$$

$$\delta^+ \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq k-1, \quad (2.6)$$

avec k la partie entière du nombre $I/2$. Dans ce qui suit, nous prouvons l'existence

2.1 Étude du problème I

et l'unicité de la solution du problème semi-discret en espace (2.2)-(2.4).

Définition 2.1. Soient J un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $A \subset J \times \Omega$.

Une application f est dite lipschitzienne en sa deuxième variable sur A s'il existe $L \geq 0$ tel que

$$\forall (t, x) \in A, \forall (t, y) \in A \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

– L'application f est dite localement lipschitzienne en la deuxième variable si tout point de $J \times \Omega$ admet un voisinage A sur lequel f est lipschitzienne en la deuxième variable.

– L'application f est dite globalement lipschitzienne en la deuxième variable si elle est lipschitzienne en la deuxième variable sur $J \times \Omega$.

Théorème 2.1. (Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soit J un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^{I+1} et $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable alors si $t_0 \in J$ et $Y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) = F(t, Y(t)), & t \in J \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale (J, Y) dans un intervalle ouvert J .

Théorème 2.2. Le problème semi-discret (2.2)-(2.4) possède une unique solution maximale $(]0, T_{max}^h[, U_h(\cdot))$,

où $T_{max}^h > 0$ désigne le temps d'existence maximal de la solution U_h .

NB : Dans ce chapitre, lorsqu'on parlera de solution, il s'agira de l'unique solution maximale.

Preuve. Posons $X(t) = (X_0(t), \dots, X_I(t))^T = U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$ et $t_0 = 0$ tel que $X(t_0) = \varphi_h = (\varphi_0, \dots, \varphi_I)^T$. Considérons une fonction G définie sur \mathbb{R}^{I+1} par

2.1 Étude du problème I

$G(t, X(t)) = (G_0(t, X(t)), \dots, G_I(t, X(t)))$ pour tout $t \in]0, T_{max}^h[$ où

$$G_i(t, X(t)) = \frac{X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)}{h^2} + f(X_i(t)), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad (2.7)$$

$$G_0(t, X(t)) = 0, \quad (2.8)$$

$$G_I(t, X(t)) = 0. \quad (2.9)$$

On peut voir que la fonction G est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{I+1} et le problème (2.2)-(2.4) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = G(t, X(t)), & t \in]0, T_{max}^h[\\ X(t_0) = \varphi_h. \end{cases} \quad (2.10)$$

Par conséquent, d'après le théorème 2.1 le problème semi-discret (2.2)-(2.4) possède une unique solution $X(t) \in C^1(]0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$. \square

2.1.2 Quelques propriétés du problème semi-discret

Ici nous donnons quelques propriétés du schéma semi-discret qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Définition 2.2. On dit que la solution U_h du problème semi-discret (2.2)-(2.4) explose en un temps fini, s'il existe un temps fini T_b^h tel que $\|U_h(t)\|_\infty < \infty$, pour $t \in [0, T_b^h[$, mais

$$\lim_{t \rightarrow T_b^h} \|U_h(t)\|_\infty = \infty,$$

où $\|U_h(t)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$ et T_b^h est appelé temps d'explosion de la solution U_h .

Définition 2.3. Une fonction $V_h \in C^1([0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ est une sous-solution de

2.1 Étude du problème I

(2.2)-(2.4) si

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_i(t) - \delta^2 V_i(t) &\leq f(V_i(t)), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T_{max}^h[, \\ V_0(t) &\leq 0, \quad t \in [0, T_{max}^h[, \\ V_I(t) &\leq 0, \quad t \in [0, T_{max}^h[, \\ V_i(0) &\leq \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

D'autre part, on dit que $V_h \in \mathcal{C}^1([0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ est une sur-solution de (2.2)-(2.4) si les inégalités ci-dessus sont renversées.

Le lemme suivant est la forme discrète du principe du maximum.

Lemme 2.1. Soit $a_h(t) \in \mathcal{C}^0([0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ et $V_h(t) \in \mathcal{C}^1([0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ tel que

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + a_i(t)V_i(t) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{max}^h[\quad (2.11)$$

$$V_i(0) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.12)$$

alors on a

$$V_i(t) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{max}^h[. \quad (2.13)$$

Preuve. Soit $T_0 \leq T_{max}^h$ et définissons le vecteur $Z_h(t) = e^{\lambda t} V_h(t)$ où λ est tel que $(a_i(t) - \lambda) > 0$ pour $t \in [0, T_0]$, $0 \leq i \leq I$. Pour tout $i \in \{0, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ est une fonction continue sur le compact $[0, T_0]$, alors il existe $t_i \in [0, T_0]$ tel que

$$\alpha_i = \min_{0 \leq t \leq T_0} Z_i(t) = Z_i(t_i).$$

Pour un certain $i_0 \in \{0, \dots, I\}$, il existe $t_0 \in [0, T_0]$ tel que $\alpha_{i_0} = \min_{0 \leq i \leq I} \alpha_i = Z_{i_0}(t_0)$.

On a alors $Z_{i_0+1}(t_0) - Z_{i_0}(t_0) = Z_{i_0+1}(t_0) - \min_{0 \leq i \leq I} \alpha_i \geq Z_{i_0+1}(t_0) - \alpha_{i_0+1} \geq 0$.

2.1 Étude du problème I

De manière similaire on obtient $Z_{i_0-1}(t_0) - Z_{i_0}(t_0) \geq 0$. On peut alors voir que

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0 \quad (2.14)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0. \quad (2.15)$$

Par ailleurs en utilisant (2.11), on obtient

$$\frac{dZ_{i_0}(t)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + (a_{i_0}(t) - \lambda)Z_{i_0}(t_0) \geq 0. \quad (2.16)$$

De (2.14)-(2.15), on déduit que

$$(a_{i_0}(t) - \lambda)Z_{i_0}(t_0) \geq 0$$

ce qui implique que $Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ à cause de $(a_i(t) - \lambda) > 0$. On conclut que $V_h(t) \geq 0$ pour $t \in [0, T_0]$. \square

Lemme 2.2. Soient $V_h(t), W_h(t) \in \mathcal{C}^1([0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\frac{d}{dt}V_i - \delta^2 V_i - f(V_i) < \frac{d}{dt}W_i - \delta^2 W_i - f(W_i), 1 \leq i \leq I-1, t \in [0, T_{max}^h[, (2.17)$$

$$V_0(t) < W_0(t), t \in [0, T_{max}^h[, (2.18)$$

$$V_I(t) < W_I(t), t \in [0, T_{max}^h[, (2.19)$$

$$V_i(0) < W_i(0), 0 \leq i \leq I, (2.20)$$

alors on a

$$V_i(t) < W_i(t), 0 \leq i \leq I, t \in [0, T_{max}^h[.$$

Preuve. Définissons le vecteur $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$. A $t = 0$ on a $Z_i(0) > 0$ à

2.1 Étude du problème I

cause de (2.20). Soit t_0 le premier $t \in [0, T_{max}^h[$ tel que $Z_i(t) > 0$ pour $t \in [0, t_0[$, $0 \leq i \leq I$ mais $Z_{i_0}(t_0) = 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, I\}$. Nous remarquons que :

- si $i_0 = 0$, alors $Z_0(t_0) = 0$; ce qui contredit (2.18).
- Si $i_0 = I$, alors $Z_I(t_0) = 0$; ce qui contredit (2.19).
- Si $i_0 \in \{1, \dots, I - 1\}$, alors on a

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0,$$

par conséquent, nous avons

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + f(V_{i_0}(t_0), t_0) - f(W_{i_0}(t_0), t_0) \leq 0,$$

$$\frac{dW_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 W_{i_0}(t_0) - f(W_{i_0}(t_0), t_0) \leq \frac{dV_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 V_{i_0}(t_0) - f(V_{i_0}(t_0), t_0).$$

Mais cette inégalité contredit (2.17), et la preuve est complète. □

Remarque 2.1. De manière similaire au lemme ci-dessus on obtient le résultat suivant : Soient $V_h(t), W_h(t) \in \mathcal{C}^1([0, T_{max}^h[, \mathbb{R}^{I+1})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\frac{d}{dt} V_i - \delta^2 V_i - f(V_i) \leq \frac{d}{dt} W_i - \delta^2 W_i - f(W_i), \quad 1 \leq i \leq I - 1, t \in [0, T_{max}^h[,$$

$$V_0(t) \leq W_0(t), \quad t \in [0, T_{max}^h[,$$

$$V_I(t) \leq W_I(t), \quad t \in [0, T_{max}^h[,$$

$$V_i(0) \leq W_i(0), \quad 0 \leq i \leq I,$$

alors on a

$$V_i(t) \leq W_i(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{max}^h[.$$

Le résultat suivant montre que la solution du problème (2.2)-(2.4) est crois-

2.1 Étude du problème I

sante en fonction du temps.

Lemme 2.3. Soit U_h la solution de (2.2)-(2.4). Alors, on a

$$\frac{dU_i(t)}{dt} > 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T_{max}^h[.$$

Preuve. Considérons le vecteur $Z_h(t)$ tel que $Z_i(t) = \frac{d}{dt}U_i(t)$, $0 \leq i \leq I$. D'après (2.5)-(2.6) on a $Z_i(0) = 0$. Soit t_0 le premier $t > 0$ tel que $Z_i(t) > 0$ pour $t \in [0, t_0[$ mais $Z_{i_0}(t_0) = 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, I\}$. Sans perte de généralité, supposons que i_0 est le plus petit entier qui satisfait l'égalité ci dessus. On a

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) - f(Z_{i_0}(t_0)) < 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1.$$

Par conséquent, on a une contradiction à cause de (2.2)-(2.4) et on a le résultat désiré. □

Lemme 2.4. Soit U_h solution de (2.2)-(2.4), alors on a

$$U_i(t) > 0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq I - 1, \quad t \in [0, T_{max}^h[.$$

Preuve. Soit $\alpha = \min_{0 \leq i \leq I} \varphi_i$.

Introduisons le vecteur V_h défini par :

$$V_i(t) = \alpha e^{-\lambda_h t} \sin\left(\frac{\pi}{2} i h\right), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{max}^h], \quad \text{où } \lambda_h = \frac{2 - 2\cos(\frac{\pi}{2} h)}{h^2}.$$

2.1 Étude du problème I

On a

$$\begin{aligned}
 V_0(t) &= 0, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 V_I(t) &= 0, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 \frac{dV_i}{dt} &= -\lambda_h \alpha e^{-\lambda_h t} \sin\left(\frac{\pi}{2} i h\right), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 \delta^2 V_i &= \frac{V_{i+1}(t) - 2V_i(t) + V_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 &= \frac{\alpha e^{-\lambda_h t}}{h^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} i h\right) \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} h\right) - 2 \right) \right], \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 &= -\lambda_h \alpha e^{-\lambda_h t} \sin\left(\frac{\pi}{2} i h\right), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T_{max}[.
 \end{aligned}$$

On peut alors remarquer que

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_i}{dt} - \delta^2 U_i &\geq \frac{dV_i}{dt} - \delta^2 V_i = 0, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 U_0(t) &= V_0(t) = 0, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 U_I(t) &= V_I(t) = 0, \quad t \in [0, T_{max}[, \\
 U_i(0) &\geq V_i(0), \quad 0 \leq i \leq I.
 \end{aligned}$$

On déduit de la remarque 2.1 que $U_i(t) \geq V_i(t) = \alpha e^{-\lambda_h t} \cos\left(\frac{\pi}{2}(i h - 1)\right)$, pour $0 \leq i \leq I$ et $t \in [0, T_{max}[$, d'où $U_i(t) > 0$, $1 \leq i \leq I-1$, $t \in [0, T_{max}[$.

Et la preuve est complète. □

Le lemme suivant révèle que la solution $U_h(t)$ du problème semi-discret est symétrique et $\delta^+ U_i(t)$ est positive lorsque i est entre 0 et $k-1$.

Lemme 2.5. Soit U_h solution de (2.2)-(2.4). Alors on a pour $t \in [0, T_{max}^h[$

$$U_{I-i}(t) = U_i(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad \text{et} \quad \delta^+ U_i(t) > 0, \quad 0 \leq i \leq k-1. \quad (2.21)$$

Preuve. Introduisons le vecteur $V_h(t)$ défini par $V_i(t) = U_{I-i}(t)$ pour $0 \leq i \leq I$.

On peut voir que $V_h(t)$ est une solution de (2.2)-(2.4). Par le théorème 2.2 on a

2.1 Étude du problème I

$V_h(t) = U_h(t)$, ce qui implique que la solution U_h est symétrique.

Définissons le vecteur $Z_h(t)$ tel que $Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t)$, $0 \leq i \leq k-1$. De (2.5-2.6) on a $Z_i(0) \geq 0$. Soit t_0 le premier $t > 0$ tel que $Z_i(t) > 0$ pour $t \in [0, t_0)$ mais $Z_{i_0}(t_0) = 0$. Sans perte de généralité, supposons que i_0 est le plus petit entier dans $[0, k-1]$ qui garanti l'égalité $Z_{i_0}(t_0) = 0$.

- Si $i_0 = 0$ alors on a $Z_0(t_0) = 0$ ce qui implique que $U_1(t_0) = U_0(t_0) = 0$, ce qui est une contradiction à cause du lemme 2.4.

- Si $1 \leq i_0 \leq k-1$, on peut voir que

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{d}{dt} \left(U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) \right) - \delta^2 \left(U_{i_0+1}(t_0) - U_{i_0}(t_0) \right) \\ &= \frac{dU_{i_0+1}(t_0)}{dt} - \frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 U_{i_0+1}(t_0) + \delta^2 U_{i_0}(t_0) \\ &= \delta^2 U_{i_0+1}(t_0) + f(U_{i_0+1}(t_0)) - \delta^2 U_{i_0}(t_0) - f(U_{i_0}(t_0)) \\ &\quad - \delta^2 U_{i_0+1}(t_0) + \delta^2 U_{i_0}(t_0). \end{aligned}$$

Comme $Z_{i_0}(t_0) = 0$, on obtient

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) = 0. \quad (2.22)$$

D'autre part on observe que

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq k-2, \end{aligned}$$

et on sait que si $i_0 = k-1$, on a

$$\begin{aligned} \delta^2 Z_{k-1}(t_0) &= \delta^2 U_k(t_0) - \delta^2 U_{k-1}(t_0) \\ &= \frac{U_{k+1}(t_0) - 2U_k(t_0) + U_{k-1}(t_0) - U_k(t_0) + 2U_{k-1}(t_0) - U_{k-2}(t_0)}{h^2}. \end{aligned}$$

Puisque k est la partie entière du nombre $I/2$, en utilisant le fait que la solution

2.1 Étude du problème I

discrète est symétrique on a soit $U_{k+1}(t) = U_{k-1}(t)$ ou $U_{k+1}(t) = U_k(t)$. Dans les deux cas, on trouve que

$$\delta^2 Z_{k-1}(t_0) = \frac{U_{k-1}(t_0) - U_{k-2}(t_0)}{h^2} = \frac{Z_{k-2}(t_0)}{h^2} > 0.$$

Les inégalités ci dessus impliquent que $\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0$, pour $1 \leq i_0 \leq k-1$, ce qui est une contradiction à cause de (2.22). Et la preuve est complète. \square

Lemme 2.6. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction convexe de classe \mathcal{C}^2 et $U_h \in \mathbb{R}^{I+1}$ telle que $U_h \geq 0$. Alors on a

$$\delta^2 f(U_i) \geq f'(U_i) \delta^2 U_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq I.$$

Preuve. En appliquant un developpement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 on obtient :

$$\begin{aligned} f(U_1) &= f(U_0) + (U_1 - U_0)f'(U_0) + \frac{(U_1 - U_0)^2}{2} f''(\eta_0) \\ f(U_{i+1}) &= f(U_i) + (U_{i+1} - U_i)f'(U_i) + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2} f''(\theta_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq I-1 \\ f(U_{i-1}) &= f(U_i) + (U_{i-1} - U_i)f'(U_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2} f''(\eta_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq I-1 \\ f(U_{I-1}) &= f(U_I) + (U_{I-1} - U_I)f'(U_I) + \frac{(U_{I-1} - U_I)^2}{2} f''(\eta_I) \end{aligned}$$

où θ_i est une valeur intermédiaire entre U_i et U_{i+1} et η_i aussi valeur intermédiaire entre U_{i-1} et U_i . La première et la dernière équation implique que

$$\begin{aligned} \delta^2 f(U_0) &= f'(U_0) \delta^2 U_0 + \frac{(U_1 - U_0)^2}{h^2} f''(\eta_0) \\ \delta^2 f(U_I) &= f'(U_I) \delta^2 U_I + \frac{(U_{I-1} - U_I)^2}{h^2} f''(\eta_I). \end{aligned}$$

2.1 Étude du problème I

En combinant la seconde et la troisième égalité on obtient

$$\delta^2 f(U_i) = f'(U_i)\delta^2 U_i + \frac{(U_{i+1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\theta_i) + \frac{(U_{i-1} - U_i)^2}{2h^2} f''(\eta_i).$$

Utilisant la convexité de f , on aboutit au résultat souhaité et la preuve est complète. \square

Maintenant, nous pouvons donner le résultat principal de cette section.

Théorème 2.3. Soit $U_h(t) = (U_0(t), \dots, U_I(t))^T$ solution du problème semi-discret (2.2 – 2.4). Supposons qu'il existe un réel $a \in]0, 1[$ tel que

$$\delta^2 U_i(0) + f(U_i(0)) \geq a f(U_i(0)), \quad 0 \leq i \leq I. \quad (2.23)$$

Alors la solution U_h explose en temps fini T_b^h et on a l'estimation suivante

$$U_i(t) \leq \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{1}{\alpha a} \frac{1}{T_b^h - t} \right).$$

Preuve. Puisque $[0, T_{max}^h[$ est l'intervalle de temps maximal sur lequel $\|U_h(t)\|_\infty$ est fini, nous voulons montrer que T_{max}^h est fini.

Posons pour tout $t \in [0, T_{max}^h[$, $0 \leq i \leq I$.

$$J_i(t) = \frac{dU_i(t)}{dt} - a f(U_i(t)).$$

Nous montrerons que

$$J_i(t) \geq 0, \quad t \in [0, T_{max}^h[, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Soit $t \in [0, T_{max}^h[$, et $0 \leq i \leq I$. On observe que

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dU_i(t)}{dt} - a f(U_i(t)) \right) - \delta^2 \left(\frac{dU_i(t)}{dt} - a f(U_i(t)) \right),$$

2.1 Étude du problème I

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dU_i(t)}{dt} \right) - a \frac{d}{dt} \left(f(U_i(t)) \right) - \frac{d}{dt} \left(\delta^2 U_i(t) \right) + a \delta^2 \left(f(U_i(t)) \right),$$

en utilisant le lemme 2.6, on a

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) \geq \frac{d}{dt} \left(\frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) \right) - a f'(U_i(t)) \frac{dU_i(t)}{dt} + a f'(U_i(t)) \delta^2 U_i(t),$$

d'après 2.2, on a

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) \geq f'(U_i(t)) \frac{dU_i(t)}{dt} - a f'(U_i(t)) f(U_i(t)),$$

d'où

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} - \delta^2 J_i(t) - f'(U_i(t)) J_i(t) \geq 0.$$

On déduit alors du lemme 2.1 que $J_i(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T_{max}^h[$, $0 \leq i \leq I$.
Ce qui implique que $\frac{dU_i(t)}{dt} \geq a f(U_i(t))$, et donc :

$$\frac{dU_i(t)}{f(U_i(t))} \geq a dt.$$

En intégrant l'inégalité précédente sur $[t, T_{max}^h[$, on obtient pour $f(U_i(t)) = e^{\alpha U_i(t)}$

$$-\frac{1}{\alpha} \left[e^{-U_i(t)} \right]_t^{T_{max}^h} \geq a (T_{max}^h - t).$$

Comme $U_h(t)$ explose quand t tend vers T_{max}^h alors on a

$$\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha U_i(t)} \geq a (T_{max}^h - t),$$

ce qui implique que

$$U_i(t) \leq \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{1}{T_{max}^h - t} \right) + \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{1}{\alpha a} \right), \quad (2.24)$$

2.1 Étude du problème I

et

$$T_{max}^h - t \leq \frac{1}{\alpha a} e^{-\alpha U_i(t)}. \quad (2.25)$$

En faisant tendre t vers 0 on obtient

$$T_{max}^h \leq \frac{1}{\alpha a} e^{-\alpha \|U_h(0)\|_\infty}, \quad (2.26)$$

T_{max}^h est donc fini et on a : $T_{max}^h = T_b^h$,

$$\text{d'où } U_i(t) \leq \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{1}{\alpha a} \frac{1}{T_b^h - t} \right). \quad (2.27)$$

Et la preuve est complète. □

Remarque 2.2. L'inégalité (2.25) implique

$$T_b^h - t_0 \leq \frac{1}{\alpha a} e^{-\alpha \|U_h(t_0)\|_\infty}, \quad 0 < t_0 < T_b^h. \quad (2.28)$$

Soit u solution du problème (1.1)-(1.3). Notons $\|u\| = \sup_{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} |u(x, t)|$. Le théorème suivant établit que pour chaque intervalle de temps fixé $[0, T]$ où u est définie, la solution du problème semi-discret approxime u , quand $h \rightarrow 0$.

Théorème 2.4. Supposons que :

(i) Le terme de réaction $f \in C^1([0, \infty[)$, et le problème (1.1)-(1.3) a une solution $u \in C^{4,1}([-1, 1] \times [0, T])$.

(ii) La condition initiale φ_h au (2.4) satisfait :

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad h \rightarrow 0, \quad (2.29)$$

où $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$, $t \in [0, T]$. Alors, pour h suffisamment petit, le pro-

2.1 Étude du problème I

blème semi-discret (2.2)-(2.4) a une unique solution

$$U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$$

telle que

$$\max_{t \in [0, T]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.30)$$

Preuve. Puisque $u \in C^{4,1}$, il existe R, K et M des constantes positives telles que

$$\|u\| \leq R, \quad \frac{\|u_{xxxx}\|}{12} \leq K, \quad |f'(w)| \leq M, \quad w \in [0, R+1]. \quad (2.31)$$

Le problème semi-discret (2.2)-(2.4) a pour tout h , une unique solution

$$U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1}).$$

Soit $t(h)$ la plus grande valeur telle que $t(h) \leq T$ et, pour $0 \leq t \leq t(h)$ telle que

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1, \quad \text{pour } t \in [0, t(h)]. \quad (2.32)$$

De la relation (2.29) on a $t(h) > 0$, pour h suffisamment petit. Ensuite, posons $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$ et $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$, l'erreur de discrétisation.

Si $t \in [0, t^*(h)]$, alors par (1.1) et (2.2) et un développement de Taylor-Young à l'ordre 4,

$$\frac{de_i(t)}{dt} - \delta^2 e_i(t) \leq |f(U_i(t)) - f(u(x_i, t))| + \frac{h^2}{12} \|u_{xxxx}\|, \quad 1 \leq i \leq I-1,$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\frac{de_i(t)}{dt} - \delta^2 e_i(t) \leq M|e_i| + Kh^2, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, t^*(h)].$$

2.1 Étude du problème I

D'autre part, si on considère la fonction $Z(t)$ définie par

$$Z_i(t) = e^{(M+1)t}(\|e(0)\|_\infty + Kh^2), \quad 0 \leq i \leq I,$$

on a

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} - \delta^2 Z_i(t) > M|Z_i(t)| + Kh^2, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad t \in [0, t^*(h)].$$

Par ailleurs l'hypothèse du lemme 2.2 est satisfaite pour $f(w) = M|w| + Kh^2$ par conséquent

$$z(x_i, t) > e_i(t), \quad \text{pour } t \in [0, t^*(h)], \quad 0 \leq i \leq I. \quad (2.33)$$

Par le même procédé on prouve que

$$z(x_i, t) > -e_i(t), \quad \text{pour } t \in [0, t^*(h)], \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.34)$$

ce qui implique que

$$z(x_i, t) > |e_i(t)|, \quad \text{pour } t \in [0, t^*(h)], \quad 0 \leq i \leq I. \quad (2.35)$$

On déduit alors que

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq e^{(M+1)t}(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Kh^2), \quad t \in [0, t^*(h)]. \quad (2.36)$$

Montrons que $t^*(h) = T$. Supposons que $T > t(h)$, de (2.32) on obtient

$$1 = \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq e^{(M+1)T}(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + Kh^2). \quad (2.37)$$

Puisque le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand h tend

2.1 Étude du problème I

vers zéro, on en déduit que $1 \leq 0$, ce qui est impossible. En conséquence, $t^*(h) = T$, et on conclut la preuve. \square

Théorème 2.5. *Supposons que la solution u du problème continu (1.1)–(1.3) explose en un temps fini T_b telle que $u \in C^{4,1}([-1, 1] \times [0, T_b[, \mathbb{R})$ et la condition initiale à (2.4) satisfait*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Sous les hypothèses du théorème 2.3, le problème semi-discret en espace (2.2)–(2.4) admet une unique solution U_h qui explose en un temps fini T_b^h et on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_b^h = T_b. \quad (2.38)$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante positive N telle que

$$Ce^{-\alpha x} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \infty \quad \text{pour } x \in [N, +\infty[. \quad (2.39)$$

Puisque la solution u explose au temps T_b , alors il existe $T_1 \in (T_b - \frac{\varepsilon}{2}, T_b)$ tel que $\|u(x, t)\|_\infty \geq 2N$ pour $t \in [T_1, T_b]$.

Maintenant prenons $T_2 = \frac{T_1 + T_b}{2}$, alors on a

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \|u(x, t)\|_\infty < \infty.$$

Du théorème 2.4, on déduit que pour h suffisamment petit

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < N.$$

2.1 Étude du problème I

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(T_2)\|_\infty \geq \|u_h(T_2)\|_\infty - \|U_h(T_2) - u_h(T_2)\|_\infty,$$

il s'en suit que

$$\|U_h(T_2)\|_\infty \geq N.$$

Du Théorème 2.3, $U_h(t)$ explose en un temps fini T_b^h . On déduit de la Remarque 2.2 et (2.39) que

$$|T_b - T_b^h| \leq |T_b - T_2| + |T_2 - T_b^h| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (Ce^{-\alpha\|U_h(T_2)\|_\infty}) \leq \varepsilon.$$

Ce qui achève la preuve. □

2.1.3 Étude du problème discret

Dans cette section nous étudions le problème I totalement discrétisé. Pour cela en plus de la discrétisation en espace faite dans la section précédente, nous discrétisons le problème en temps. Ensuite après avoir donné quelques propriétés du schéma obtenu nous déterminons le temps d'explosion discret et terminons par des résultats numériques.

En reprenant les même éléments de la section précédente, on a

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_I = 1,$$

qui est une subdivision de l'intervalle $[-1, 1]$, où I est un entier naturel non nul $i = 0, \dots, I - 1$ et h le pas constant d'espace, tel que

$$h = h_i = x_{i+1} - x_i = \frac{2}{I}, \quad \text{pour } i = 0, \dots, I - 1.$$

2.1 Étude du problème I

Nous avons alors

$$x_{i+1} = x_i + h, \text{ pour } i = 0, \dots, I - 1.$$

Ce qui implique

$$x_i = ih - 1, \text{ pour } i = 0, \dots, I.$$

Maintenant considérons la subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$$

de l'intervalle $[0, T]$ où N est un entier naturel non nul. Nous choisissons comme pas de temps, le réel strictement positif Δt_n tel que

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n, \text{ pour } n = 0, \dots, N - 1.$$

Nous avons alors

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \text{ pour } n = 0, \dots, N - 1.$$

Dans la suite, $n = 0, \dots, N - 1$ seront remplacés par $n \geq 0$ car Δt_n étant positif et petit, en prenant T très grand, N devient aussi très grand.

En remplaçant x par x_i et t par t_n dans le problème continu (1.1-1.3), nous obtenons le schéma suivant :

2.1 Étude du problème I

pour $n \geq 0$ et $0 \leq i \leq I$,

$$\begin{cases} u_t(x_i, t_n) = u_{xx}(x_i, t_n) + f(x_i, t_n), \\ u(x_0, t_n) = 0, \quad u(x_I, t_n) = 0, \quad n \geq 0, \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i) > 0, \quad i = 0, \dots, I. \end{cases} \quad (2.40)$$

Construction du schéma discret

On suppose que $u \in C^{4,2}([-1, 1] \times [0, T])$. On a :

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n + \Delta t_n), \quad i = 0, \dots, I, \quad n \geq 0.$$

Un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en temps donne :

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + (\Delta t_n)u_t(x_i, t_n) + O((\Delta t_n)^2), \quad i = 0, \dots, I, \quad n \geq 0,$$

avec $|O((\Delta t_n)^2)| \leq c_3(\Delta t_n)^2$, où c_3 est une constante indépendante de Δt_n . De l'égalité précédente, on déduit :

$$u_t(x_i, t_n) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t_n} + O(\Delta t_n), \quad i = 0, \dots, I, \quad n \geq 0.$$

Ainsi, pour Δt_n suffisamment petit, on obtient :

$$u_t(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t_n}, \quad i = 0, \dots, I, \quad n \geq 0.$$

Soient

$$u(x_{i+1}, t_n) = u(x_i + h, t_n), \quad i = 0, \dots, I - 1, \quad n \geq 0,$$

$$u(x_{i-1}, t_n) = u(x_i - h, t_n), \quad i = 1, \dots, I, \quad n \geq 0.$$

2.1 Étude du problème I

Un développement de Taylor-Young à l'ordre 3 en espace donne :

$$u(x_{i+1}, t_n) = u(x_i, t_n) + hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t_n) + O(h^3), \quad i = 0, \dots, I-1, \quad n \geq 0,$$

$$u(x_{i-1}, t_n) = u(x_i, t_n) - hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t_n) + O(h^3), \quad i = 1, \dots, I, \quad n \geq 0,$$

avec $|O(h^3)| \leq c_4 h^3$, où c_4 est une constante indépendante de h . En faisant la soustraction entre les deux précédentes égalités, on a :

$$u_x(x_i, t_n) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad n \geq 0.$$

Ainsi, pour h suffisamment petit, on a :

$$u_x(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{2h}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad n \geq 0,$$

Un développement de Taylor-Young à l'ordre 4 en espace donne :

pour $i = 0, \dots, I-1$ et $n \geq 0$,

$$u(x_{i+1}, t_n) = u(x_i, t_n) + hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t_n) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t_n) + O(h^4),$$

pour $i = 1, \dots, I$ et $n \geq 0$,

$$u(x_{i-1}, t_n) = u(x_i, t_n) - hu_x(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i, t_n) + O(h^4),$$

avec $|O(h^4)| \leq c_2 h^4$, où c_2 est une constante indépendante de h . En additionnant les deux précédentes égalités, on obtient :

$$u_{xx}(x_i, t_n) = \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, I-1, \quad n \geq 0.$$

2.1 Étude du problème I

Par conséquent, pour h suffisamment petit, on a :

$$u_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad n \geq 0.$$

On cherche une approximation $U_i^{(n)}$ de $u(x_i, t_n)$, $i = 0, \dots, I$, $n \geq 0$. Un choix de schéma numérique pour (2.40) est alors le schéma suivant qui représente le problème totalement discrétisé associé au problème continu (1.1-1.3)

$$\begin{cases} \delta_t U_i^{(n)} = \delta^2 U_i^{(n)} + f(U_i^{(n)}), & 1 \leq i \leq I-1, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} U_0^{(n)} = 0 \quad U_I^{(n)} = 0, & n \geq 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} U_i^{(0)} = \varphi_i > 0, & 0 \leq i \leq I, \end{cases} \quad (2.43)$$

où

$$\delta^2 U_i^{(n)} = \frac{U_{i+1}^{(n)} - 2U_i^{(n)} + U_{i-1}^{(n)}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad n \geq 0$$

$$\delta_t U_i^{(n)} = \frac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{\Delta t_n}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq 0$$

$$U_h^{(n)} = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \dots, U_I^{(n)})^T.$$

$\Delta t_n = \tau$, (Δt_n est donné uniformément et donc $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \tau$, $n \geq 0$).

Soit $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ fixé et supposons que $0 < \gamma \leq \frac{1}{3}$ pour la stabilité.

Notons que l'hypothèse $\Delta t_n \leq \frac{h^2}{3}$ est nécessaire lorsque I est pair et dans le cas où I est impair $\Delta t_n \leq \frac{h^2}{2}$ est suffisant.

2.1.4 Quelques propriétés du problème discret

Dans cette section, nous prouvons l'existence et unicité de la solution du problème discret. Le lemme suivant est la forme discrète du principe du maximum.

2.1 Étude du problème I

Lemme 2.7. Soient $a_h^{(n)}$ et $V_h^{(n)}$ deux suites, avec $n \geq 0$, et $a_h^{(n)} \leq 0$ telles que

$$\delta_t V_i^{(n)} - \delta^2 V_i^{(n)} + a_i^{(n)} V_i^{(n)} \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.44)$$

$$V_i^{(0)} \geq 0. \quad (2.45)$$

Alors on a,

$$V_i^{(n)} \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq 0 \quad \text{quand} \quad \Delta t_n \leq \frac{h^2}{3}. \quad (2.46)$$

Preuve. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \delta_t V_i^{(n)} &= \frac{V_i^{(n+1)} - V_i^{(n)}}{\Delta t_n}, \quad 0 \leq i \leq I, \\ \delta^2 V_i^{(n)} &= \frac{V_{i+1}^{(n)} - 2V_i^{(n)} + V_{i-1}^{(n)}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq I-1$, l'inégalité (2.44) équivaut à

$$V_i^{(n+1)} \geq \frac{\Delta t_n}{h^2} V_{i+1}^{(n)} + (1 - 2\frac{\Delta t_n}{h^2} - a_i^{(n)} \Delta t_n) V_i^{(n)} + \frac{\Delta t_n}{h^2} V_{i-1}^{(n)}.$$

Si $V_h^{(n)} \geq 0$, en utilisant un raisonnement par récurrence, on obtient que $V_h^{(n+1)} \geq 0$, car $a_h^{(n)} \leq 0$ et $1 - \frac{2\Delta t_n}{h^2} - a_i^{(n)} \Delta t_n \geq 0$. Et on aboutit au résultat souhaité. \square

Lemme 2.8. Soient $a_h^{(n)}$ et $V_h^{(n)}$ deux suites, avec $n \geq 0$ et $a_h^{(n)} \leq 0$ telles que

$$\delta_t V_i^{(n)} - \delta^2 V_i^{(n)} + a_i^{(n)} V_i^{(n)} > 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.47)$$

$$V_i^{(0)} > 0. \quad (2.48)$$

Alors on a,

$$V_i^{(n)} > 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq \text{quand} \quad \Delta t_n \leq \frac{h^2}{3}. \quad (2.49)$$

2.1 Étude du problème I

Preuve. Analogue au Lemme 2.7. □

Le lemme suivant est le lemme de comparaison discret.

Lemme 2.9. Soient $a_h^{(n)}$, $V_h^{(n)}$ et $W_h^{(n)}$ trois suites, avec $n \geq 0$ et $a_h^{(n)} \leq 0$ telles que

$$\delta_t V_i^{(n)} - \delta^2 V_i^{(n)} + a_i^{(n)} V_i^{(n)} < \delta_t W_i^{(n)} - \delta^2 W_i^{(n)} + a_i^{(n)} W_i^{(n)}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.50)$$

$$V_i^{(0)} < W_i^{(0)}, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (2.51)$$

Alors on a,

$$V_i^{(n)} < W_i^{(n)}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq 0 \text{ quand } \Delta t_n \leq \frac{h^2}{3}. \quad (2.52)$$

Preuve. Définissons le vecteur $Z_h^{(n)} = W_h^{(n)} - V_h^{(n)}$. En utilisant (2.50) on obtient pour $0 \leq i \leq I$,

$$\delta_t Z_i^{(n)} - \delta^2 Z_i^{(n)} + a_i^{(n)} Z_i^{(n)} > 0.$$

Sachant que $Z_h^{(0)} > 0$, utilisant le Lemme 2.8, on obtient $Z_h^{(n)} > 0$, ce qui implique que $V_i^{(n)} < W_i^{(n)}$, $0 \leq i \leq I$. D'où le résultat souhaité. □

Théorème 2.6. Le problème discret (2.41)-(2.43) possède une unique solution $U_h^{(n)}$, $n \geq 0$.

Preuve. Le problème discret (2.41)-(2.43) peut s'écrire pour $n \geq 0$ sous la forme suivante (schéma explicite) :

$$U_i^{(n+1)} = U_i^{(n)} + \frac{\tau}{h^2} \left(U_{i+1}^{(n)} - 2U_i^{(n)} + U_{i-1}^{(n)} \right) + \tau f(U_i^{(n)}), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad (2.53)$$

$$U_0^{(n+1)} = 0, \quad U_I^{(n+1)} = 0, \quad (2.54)$$

$$U_i^{(0)} = \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (2.55)$$

où $U_h^{(n)} = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \dots, U_I^{(n)})^T$, $\tau = \Delta t_n$, avec $0 < \tau \leq \frac{h^2}{3}$.

2.1 Étude du problème I

D'après ce qui précède le problème discret (2.41)-(2.43) admet une unique solution. □

Le résultat suivant établit la positivité de la solution de (2.41)-(2.43).

Proposition 2.1. [1] Soit f une fonction non négative et supposons que la condition initiale φ donnée dans (2.43) est non négative. Considérons le pas de temps τ tel que $0 < \tau \leq h^2/3$, alors la solution $U_h^{(n)}$ de (2.41)-(2.43) est non négative.

Corollaire 2.1. Supposons que la fonction f est non négative et non décroissante. Soit $U_h^{(n)}$ solution non négative de (2.41)-(2.43) avec τ tel que $0 < \tau \leq h^2/3$. Si la condition initiale φ_i satisfait

$$\varphi_{I-i} = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I \quad (2.56)$$

$$\varphi_{i+1} > \varphi_i > \varphi_0 = 0, \quad 1 \leq i \leq \frac{I}{2} - 1, \quad (2.57)$$

alors on a

$$U_{I-i}^n = U_i^n, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I$$

$$U_{i+1}^n > U_i^n > U_0^n = 0, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq \frac{I}{2} - 1.$$

Preuve. En utilisant (2.56), on obtient aisément $U_{I-i}^n = U_i^n$, $n \geq 0$, $0 \leq i \leq I$.

Pour la seconde partie nous posons $E_i^n = U_{i+1}^n - U_i^n$.

Pour $i = 0, \dots, \frac{I}{2} - 1$ et $n \geq 0$, montrons que $E_i^n > 0$.

Pour $n = 0$ on a $E_i^0 > 0$ à cause des hypothèses de départ. Supposons maintenant que $E_i^n > 0$ et montrons que $E_i^{n+1} > 0$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} &= \frac{(U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}) - (U_{i+1}^n - U_i^n)}{\tau} \\ &= \frac{(U_{i+2}^n - U_{i+1}^n) - 2(U_{i+1}^n - U_i^n) + (U_i^n - U_{i-1}^n)}{h^2} + (f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n)). \end{aligned}$$

2.1 Étude du problème I

Si $0 \leq i < \frac{I}{2} - 1$, en tenant compte du fait que $E_i^n > 0$ et f est non décroissante, on obtient de l'inégalité précédente

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} = \frac{E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n}{h^2} + f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n) > -\frac{2}{h^2}E_i^n,$$

ce qui conduit à

$$E_i^{n+1} > E_i^n - \frac{2\tau}{h^2}E_i^n,$$

et comme $\tau \leq \frac{h^2}{3}$, alors $E_i^{n+1} > 0$.

Si $i = \frac{I}{2} - 1$, alors on considère deux cas :

Premier cas : I pair

On a alors $i = \frac{I}{2} - 1$, et $U_{\frac{I}{2}+1}^n - U_{\frac{I}{2}}^n = -(U_{\frac{I}{2}}^n - U_{\frac{I}{2}-1}^n)$ à cause de la symétrie de U_h^n , par conséquent

$$\frac{E_{\frac{I}{2}-1}^{n+1} - E_{\frac{I}{2}-1}^n}{\tau} = \frac{-3(U_{\frac{I}{2}}^n - U_{\frac{I}{2}-1}^n) + (U_{\frac{I}{2}-1}^n - U_{\frac{I}{2}-2}^n)}{h^2} + f(U_{\frac{I}{2}}^n) - f(U_{\frac{I}{2}-1}^n) > -\frac{3}{h^2}E_{\frac{I}{2}-1}^n.$$

Comme $\tau \leq \frac{h^2}{3}$, on obtient $E_{\frac{I}{2}-1}^{n+1} > 0$.

Deuxième cas : I impair

On a alors $i = \frac{I-1}{2} - 1$, et $U_{\frac{I-1}{2}+1}^n - U_{\frac{I-1}{2}}^n = 0$ à cause de la symétrie de U_h^n . Alors on a

$$\frac{E_{\frac{I-1}{2}-1}^{n+1} - E_{\frac{I-1}{2}-1}^n}{\tau} > -\frac{2}{h^2}E_{\frac{I-1}{2}-1}^n,$$

donc $E_{\frac{I-1}{2}-1}^{n+1} > 0$.

Ce qui termine la preuve. □

2.1 Étude du problème I

2.1.5 Explosion de la solution discrète

Définition 2.4. On dit que la solution $U_h^{(n)}$ de (2.41)-(2.43) avec $\{\Delta t_n\}_{n \geq 0}$ le pas de temps explose en temps fini si $\|U_h^n\|_\infty$ est fini pour $n \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_h^n\|_\infty = \infty$.

Théorème 2.7. Soit U_h^n la solution de (2.41)-(2.43). Soit λ défini par $\lambda = \tau/h^2$ et supposons que $0 < \lambda \leq 1/2$. Soit T_b le temps d'explosion de la solution u de (1.1-1.3) et soit T_0 un nombre arbitraire tel que $0 < T_0 < T_b$. Alors il existe deux constantes positives C et h_0 , dépendant seulement de T_0 et u_0 , telle que

$$\max_{1 \leq i \leq I-1} |U_i^n - u(x_i, t_n)| \leq Ch^2$$

pour $t_n \leq T_0$ et $h \leq h_0$.

Preuve. Voir ([27], page 140-141). □

Théorème 2.8. Supposons que la fonction initiale $u_0(x)$ est non négative et supposons aussi qu'il existe une constante positive $a \in]0, 1[$ telle que

$$\frac{U_{i+1}^0 - 2U_i^0 + U_{i-1}^0}{h^2} + f(U_i^0) \geq af(U_i^0).$$

Alors on a $U_i^n \geq 0$ et pour tout n, i

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + f(U_i^n) \geq af(U_i^n).$$

En particulier, on a

$$\frac{\|U_h^{n+1}\|_\infty - \|U_h^n\|_\infty}{\tau} \geq af(\|U_h^n\|_\infty).$$

Preuve. Par la proposition 2.1, on a $U_i^n \geq 0$.

Définissons les suites V^n et J^n par

2.1 Étude du problème I

$$V_i^n = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \delta^2 U_i^n + f(U_i^n), \quad J_i^n = V_i^n - af(U_i^n), \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq 0.$$

Notre but est de montrer que $J_i^n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, $0 \leq i \leq I$. Notons que pour $i = 0$ et $i = I$, le résultat est immédiat.

Pour $n = 0$, on a $J_i^0 \geq 0$. Supposons que $J_i^n \geq 0$ et montrons que $J_i^{n+1} \geq 0$.

Par définition de V_i^n et J_i^n , on a pour tout $n \geq 0$ et $1 \leq i \leq I - 1$

$$\frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{\tau} = \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} - a \frac{f(U_i^{n+1}) - f(U_i^n)}{\tau},$$

en utilisant un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{\tau} &= \delta^2 V_i^n + f'(U_i^n) V_i^n - af'(U_i^n) V_i^n + f''(\xi_i) \frac{(U_i^{n+1} - U_i^n)^2}{2\tau} \\ &\quad - af''(\xi_i) \frac{(U_i^{n+1} - U_i^n)^2}{2\tau} \\ \frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{\tau} &= \delta^2 V_i^n + f'(U_i^n) J_i^n + af(U_i^n) f'(U_i^n) - af'(U_i^n) J_i^n - a^2 f'(U_i^n) f(U_i^n) \\ &\quad + f''(\xi_i) \frac{(U_i^{n+1} - U_i^n)^2}{2\tau} (1 - a) \end{aligned}$$

où ξ_i est une valeur intermédiaire entre U_i^{n+1} et U_i^n avec $f''(\xi_i) \frac{(U_i^{n+1} - U_i^n)^2}{2\tau} \geq 0$ car f convexe et $a \in]0, 1[$.

En observant que

$$\delta^2 J_i^n = \delta^2 V_i^n - a\delta^2 f(U_i^n), \tag{2.58}$$

et utilisant un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on obtient

$$\delta^2 f(U_i^n) = f'(U_i^n) \delta^2 U_i^n + \frac{(U_{i+1}^n - U_i^n)^2}{2h^2} f''(\theta_i) + \frac{(U_{i-1}^n - U_i^n)^2}{2h^2} f''(\eta_i)$$

2.1 Étude du problème I

et comme la fonction f est convexe, on arrive par le lemme 2.6 à

$$\delta^2 f(U_i^n) \geq f'(U_i^n) \delta^2 U_i^n, \quad (2.59)$$

et en remarquant que

$$\delta^2 U_i^n = J_i^n + af(U_i^n) - f(U_i^n), \quad (2.60)$$

remplaçant (2.60) dans (2.59) on a

$$\delta^2 f(U_i^n) \geq f'(U_i^n) J_i^n + af'(U_i^n) f(U_i^n) - f'(U_i^n) f(U_i^n), \quad (2.61)$$

ensuite en remplaçant (2.61) dans (2.58) on obtient

$$\delta^2 J_i^n \leq \delta^2 V_i^n - af'(U_i^n) J_i^n - a^2 f'(U_i^n) f(U_i^n) + af'(U_i^n) f(U_i^n). \quad (2.62)$$

En prenant l'expression de $\delta^2 V_i^n$ et en la remplaçant dans (2.62), on obtient finalement

$$\frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{\tau} - \delta^2 J_i^n \geq f'(U_i^n) J_i^n.$$

L'hypothèse sur J_i^n et la convexité de f nous permettent d'avoir

$$\frac{J_i^{n+1} - J_i^n}{\tau} - \delta^2 J_i^n \geq 0.$$

On obtient alors que $J_i^{n+1} \geq 0$, pour $n \geq 0$, $1 \leq i \leq I - 1$. En utilisant le corollaire 2.1, on obtient finalement

$$\frac{\|U_h^{n+1}\|_\infty - \|U_h^n\|_\infty}{\tau} \geq af(\|U_h^n\|_\infty).$$

Et la preuve est complète. □

2.1 Étude du problème I

Dans ce qui suit nous estimons le temps d'explosion numérique de la solution du problème totalement discrétisé. Nous montrons également que ce temps converge vers le temps réel. Cette méthode est inspirée des travaux de Chien-Hong Cho [26].

2.1.6 Estimation du temps d'explosion numérique

Considérons le problème (2.41) – (2.43) où f satisfait

$$f(s) > 0, \text{ et } f''(s) > 0, \text{ pour tout } s > 0. \quad (2.63)$$

Soit H une fonction croissante satisfaisant les conditions suivantes :

- $H(s) > 0$ pour tout $s > 0$
- $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty$.

Par le théorème 2.8, on a $\|U_h^n\|_\infty \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, pour un $\tau > 0$ donné, il existe un entier positif $n_{\tau(\infty)}$ tel que

$$\tau H(\|U_h^{n_{\tau(\infty)}-1}\|_\infty) < 1 \quad \text{et} \quad \tau H(\|U_h^{n_{\tau(\infty)}}\|_\infty) \geq 1.$$

On définit notre temps d'explosion de la manière suivante.

Définition 2.5. Le temps d'explosion numérique du problème (2.41)-(2.43) sous les conditions (2.63) est défini par $T_\infty(\tau, h) = \tau n_{\tau(\infty)}$.

Le théorème suivant atteste que notre temps d'explosion numérique définit ci-dessus converge vers le temps d'explosion réel de la solution du problème continu.

Théorème 2.9. Soit T_b le temps d'explosion de la solution u de (1.1)-(1.3). Supposons que la fonction H satisfait

$$\tau \ln f\left(H^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \tau \rightarrow 0.$$

2.1 Étude du problème I

Alors on a $T_\infty(\tau, h) \rightarrow T_b$ quand $\tau \rightarrow 0$.

Preuve. Pour la preuve on pourra consulter [26]. □

Remarque 2.3. De tout ce qui précède, on peut voir qu'il existe un grand nombre de fonctions H qui peuvent assurer la convergence de ce temps d'explosion. Il arrive que pour différents choix de fonction H , on peut avoir différents temps d'explosion et dans ce cas si on suppose que $H_1(s) \leq H_2(s)$, ($\forall s > 0$) et que $T_\infty^-(\tau, h)$ et $T_\infty^*(\tau, h)$ sont respectivement leurs temps d'explosion numérique, alors on a $T_\infty^-(\tau, h) \geq T_\infty^*(\tau, h)$.

2.2 Étude du problème II

Dans cette section on considère le problème (1.1 – 1.3) dans le cas 1.5 c'est à dire :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + (u(x, t) + \lambda)^p, & -1 < x < 1, t \in]0, T[, & (2.64) \\ u(-1, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \in]0, T[, & (2.65) \\ u(x, 0) = u_0(x) = \phi(x), & -1 < x < 1. & (2.66) \end{cases}$$

A partir de la semi discrétisation, on détermine le temps d'explosion numérique et on montre que ce temps converge vers le temps réel du problème continu.

2.2.1 Étude du problème semi-discret en espace

Le système (2.2)-(2.4) nous permet d'obtenir pour le problème II le schéma semi-discret suivant :

$$\begin{cases} \frac{dU_i(t)}{dt} = \delta^2 U_i(t) + (U_i(t) + \lambda)^p, & 1 \leq i \leq I - 1, & (2.67) \\ U_0(t) = 0, \quad U_I(t) = 0, & & (2.68) \\ U_i(0) = \varphi_i \geq 0, & 0 \leq i \leq I. & (2.69) \end{cases}$$

Le théorème suivant prouve l'explosion de la solution semi-discrète ainsi que la convergence du temps d'explosion semi-discret vers celui du problème continu lorsque le pas d'espace tend vers zéro.

Théorème 2.10. Soient X un espace de fonctions et $u \in X$ solution du problème (1.1-1.3) et supposons que le problème (2.2)-(2.4) admet une unique solution sur l'espace de fonctions X_h pour chaque h . Par ailleurs on suppose aussi qu'il existe une fonctionnelle $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ et une famille de fonctionnelle $J_h : X_h \rightarrow \mathbb{R}$ (approximation de J) telles que les fonctions $J(t) = J[u](\cdot, t)$ et $J_h(t) = J_h[U_h](\cdot, t)$.

Si les conditions suivantes sont satisfaites

2.2 Étude du problème II

1. u explose en un temps fini T_b .
2. $J(t)$ est une fonction telle que $\lim_{t \rightarrow T_b} J[u](t) = +\infty$.
3. $J_h(t)$ est est une fonction de classe C^1 satisfaisant :
 $\frac{d}{dt} J_h(t) \geq G(J_h)$, pour tout G telle que $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} G(s) > 0 \text{ pour } s > R_0, \\ \int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty. \end{array} \right.$$

4. La famille U_h approxime u dans le sens suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0.$$

Alors la solution approchée U_h explose en temps fini T_b^h pour h suffisamment petit et T_b^h converge vers T_b quand h tend vers zéro.

Remarque 2.4. Ce théorème est un cas particulier discuté dans [87, 29]. La preuve s'y trouvant, nous ne la reprenons pas. Nous l'appliquons au problème (2.64)-(2.66) en vue d'en déduire l'explosion de la solution semi-discrète U_h de (2.67)-(2.69) ainsi que la convergence du temps d'explosion numérique T_b^h vers le temps réel T_b quand h tend vers 0.

Etape 1 (Explosion de u). D'après la section 1, la solution du problème (2.64)-(2.66) explose en un temps fini T_b au seul point 0.

Etape 2 (Explosion de U_h et convergence du temps d'explosion.)

Multiplions (2.64) par u_t , et intégrons par partie sur $[-1, 1]$ on obtient

$$\int_{-1}^1 u_t^2 dx = - \int_{-1}^1 u_x u_{tx} dx + \int_{-1}^1 u_t (u + \lambda)^p dx$$

2.2 Étude du problème II

En remarquant que $u_x u_{tx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_x^2$ et $u_t (u + \lambda)^p = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{p+1} (u + \lambda)^{p+1} \right]$ on a

$$\int_{-1}^1 u_t^2 dx = - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_x^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{p+1} (u + \lambda)^{p+1} \right] dx$$

et comme $(u(x, t) + \lambda)^p \in C^{2,1}([-1, 1] \times [0, T[))$ on aboutit à

$$\int_{-1}^1 u_t^2 dx = \frac{d}{dt} \left[- \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \right]. \quad (2.70)$$

De même en multipliant l'équation (2.64) par $(u + \lambda)$ et en intégrant par partie sur $[-1, 1]$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^2 dx = \lambda (u_x(1) - u_x(-1)) - \int_{-1}^1 u_x^2 dx + \int_{-1}^1 (u + \lambda) dx. \quad (2.71)$$

Définissons par

$$I[u] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx. \quad (2.72)$$

l'énergie du système. On peut remarquer que

$$\frac{d}{dt} I[u] = - \int_{-1}^1 u_t^2 dx \leq 0. \quad (2.73)$$

Par conséquent l'énergie $I[u]$ est une fonction décroissante en fonction de t .

Définissons la fonctionnelle J par

$$J[u](t) = \int_{-1}^1 (u(x, t) + \lambda)^2 dx. \quad (2.74)$$

Pour ce J , on a

$$\lim_{t \rightarrow T_b} J[u](t) = \infty, \quad \text{puisque} \quad \lim_{t \rightarrow T_b} \|u(\cdot, t)\|_2 = \infty, \quad (\text{voir [42]}). \quad (2.75)$$

2.2 Étude du problème II

et de plus

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}J &= 2 \int_{-1}^1 (u + \lambda)u_t dx \\
 &= 2 \left(\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) - \int_{-1}^1 u_x^2 dx + \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \right) \\
 &= 4 \left(\frac{\lambda}{2}(u_x(1) - u_x(-1)) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \right) \\
 &\quad + \frac{2(p-1)}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \\
 &= 2\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) - 4I[u] + \frac{2(p-1)}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \\
 &\geq 2\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) - 4I[u_0] + \frac{2(p-1)}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx.
 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\frac{d}{dt}J \geq \alpha - 4I[u_0] + c(J[u])^{\frac{p+1}{2}}, \quad \text{où } \alpha = 2\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) \text{ et } c > 0.$$

Par la méthode des rectangles, on a

$$I_h[U_h](t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \sum_{i=0}^{I-1} (U_{i+1}(t) - U_i(t))^2 \right) - \frac{1}{p+1} \left(h \sum_{i=0}^{I-1} (U_i(t) + \lambda)^{p+1} \right)$$

et

$$J_h[U_h](t) = h \sum_{i=0}^{I-1} (U_i(t) + \lambda)^2.$$

Par un calcul comme précédemment, on obtient

$$\frac{d}{dt}J_h[U_h] \geq \beta - 4I_h[U_h^0] + c_1(J_h[U_h])^{\frac{p+1}{2}}, \quad \text{avec } \beta = -2\lambda \frac{U_I + U_1}{h}, \quad c_1 > 0,$$

puisque

$$\frac{d}{dt}I_h[U_h](t) = -h \sum_{i=0}^{I-1} (U_i)_t^2(t) \leq 0.$$

2.2 Étude du problème II

En posant $G(J_h) = \gamma + c_1 J_h^{\frac{p+1}{2}}$, avec $\gamma = \beta - 4I_h[U_h^0]$, on obtient

$$\frac{d}{dt} J_h[U_h] \geq G(J_h).$$

Lemme 2.10. Soit $G : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle telle que

$G(s) = \gamma + cs^{\frac{p+1}{2}}$ avec $\gamma = -4I_h[U_h^0]$ et $c > 0$, alors G satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} G(s) > 0 \text{ pour } s > R_0, \text{ pour un certain } R_0 \\ \int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty. \end{array} \right.$$

Preuve. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, il existe un nombre R_0 tel que pour tout $s > R_0$, $G(s) > 0$ et on a

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = \int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{\gamma + cs^{\frac{p+1}{2}}} ds \quad (2.76)$$

Pour $p > 1$, (2.76) est une intégrale de Riemann donc converge.

Etape 3 (Convergence de J_h).

Montrons maintenant que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T_b - \epsilon]} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0.$$

On a pour tout $\epsilon > 0$, et $t \in [0, T_b - \epsilon]$

$$\left| J[u](t) - J_h[U_h](t) \right| = \left| \int_{-1}^1 (u(x, t) + \lambda)^2 dx - h \sum_{i=0}^{I-1} (U_i(t) + \lambda)^2 \right|,$$

introduisant $R_n = h \sum_{i=0}^{I-1} (u(x_i, t) + \lambda)^2$ la somme Riemann associée à $J(t)$ et en

2.2 Étude du problème II

appliquant l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned} \left| J[u](t) - J_h[U_h](t) \right| &\leq \left| \int_{-1}^1 (u(x,t) + \lambda)^2 dx - h \sum_{i=0}^{I-1} (u(x_i,t) + \lambda)^2 \right| \\ &+ \left| h \sum_{i=0}^{I-1} (u(x_i,t) + \lambda)^2 - h \sum_{i=0}^I (U_i(t) + \lambda)^2 \right|, \end{aligned}$$

en évaluant l'erreur on a

$$\left| J[u](t) - J_h[U_h](t) \right| \leq hM(t) + \left| h \sum_{i=0}^{I-1} \left[(u(x_i,t) + \lambda)^2 - (U_i(t) + \lambda)^2 \right] \right|$$

où $M(t) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} 2u_x(x,t)(u(x,t) + \lambda)$. On arrive à

$$\left| J[u](t) - J_h[U_h](t) \right| \leq hM(t) + h \left| \sum_{i=0}^{I-1} (u(x_i,t) - U_i(t)) (u(x_i,t) + U_i(t) + 2\lambda) \right|$$

D'après le théorème 2.4, il existe une constante strictement positive C telle que

$$\left| J[u](t) - J_h[U_h](t) \right| \leq hM(t) + 2hC\Gamma(t)(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2)$$

où $\Gamma(t) = N(t) + L(t)$ avec $N(t) = \max_{0 \leq i \leq I} |u(x_i,t)|$ et $L(t) = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$.

Alors pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\sup_{t \in [0, T-\epsilon]} \left| J[u](t) - J_h[U_h](t) \right| \leq hb_\epsilon + 2hC\chi_\epsilon(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2)$$

avec $b_\epsilon = \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |M(t)|$ et $\chi_\epsilon = \sup_{t \in [0, T-\epsilon]} |\Gamma(t)|$.

En faisant tendre h vers 0, le membre de droite tend vers 0 et on a le résultat souhaité.

2.2 Étude du problème II

2.2.2 Estimation du temps d'explosion numérique

Dans cette section nous déterminons le temps d'explosion de la solution semi-discrète par une méthode basée sur la technique de la transformation de la longueur d'arc de [S. Moriguti, C. Okuno, R. Suekan, M. Iri, K. Takeuchi], (voir [71]). Dans l'algorithme proposé par Chiaki Hirota et Kazufumi Ozawa [53], l'équation originale est transformée en une équation plus facile à manipuler, dans laquelle la variable indépendante est la longueur d'arc de l'équation originale et t est l'une des variables dépendantes. On intègre l'équation transformée et on extrait une suite linéairement convergente de valeurs de t . Cette suite est ensuite accélérée par la méthode *Aitken* Δ^2 , (voir [53]).

On peut écrire (2.67)-(2.69) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = g(U(t)), & 0 < t < T \\ U(0) = \varphi, \end{cases} \quad (2.77)$$

où $U = (U_1, \dots, U_{I-1})^T$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{I-1})^T$ et $g = (g_1, \dots, g_{I-1})^T$.

Soit $(t, U_i(t))$ un arc de longueur $s = \int_0^t \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{I-1} g_i^2} dt$, alors on a

$$\begin{aligned} ds^2 = dt^2 + dU_1^2 + \dots + dU_{I-1}^2 &\Leftrightarrow ds = dt \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dU_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dU_{I-1}}{dt}\right)^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dU_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dU_{I-1}}{dt}\right)^2}} \end{aligned}$$

En considérant les variables t et U_i comme fonction de la longueur d'arc, $t(s)$ et

2.2 Étude du problème II

$U_i(s)$ satisfont l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} t \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{I-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{I-1} g_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{I-1} \end{pmatrix}, \quad 0 < s < \infty, \quad (2.78)$$

$$t(0) = 0, \quad U_i(0) = \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I-1.$$

qui est appelée transformation de la longueur d'arc

où

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{I-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{I-2} \\ U_{I-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (U_1 + \lambda)^p \\ (U_2 + \lambda)^p \\ \vdots \\ (U_{I-2} + \lambda)^p \\ (U_{I-1} + \lambda)^p \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Posons $s_0 > 0$ et $\gamma > 1$ et définissons une suite géométrique $\{s_\ell\}$ par $s_\ell = s_0 \cdot \gamma^\ell$, $\ell = 0, 1, \dots, L$. En intégrant la première composante de (2.78) de 0 à s_ℓ et en posant $t_\ell = t(s_\ell)$ on obtient

$$t_\ell = t(s_\ell) = \int_0^{s_\ell} \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{I-1} g_i^2}} \quad (2.80)$$

Appliquons la méthode *Aitken* Δ^2 avec $t_\ell^0 = t_\ell$

$$t_{\ell+2}^{k+1} = t_{\ell+2}^k - \frac{(t_{\ell+2}^k - t_{\ell+1}^k)^2}{t_{\ell+2}^k - 2t_{\ell+1}^k + t_\ell^k}, \quad \ell \geq 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Il est prouvé dans [53] que $\{t_\ell^k\}$ converge vers le temps d'explosion T_b quand $\ell \rightarrow \infty$. Ici pour nos expériences, la suite géométrique utilisée est $s_\ell = 2^{15} \cdot 2^\ell$, ($\ell = 0, 1, \dots, 12$) et le solver choisi est *DOP54* dont on règle les paramètres de tolérance

2.2 Étude du problème II

comme suit : $ATOL = RTOL = 1.d - 15$ et $ITOL = 0$, (voir [52]).

2.3 Expériences numériques

Dans cette section on présente quelques résultats numériques de la section 2.1 et 2.2. La section 2.1, qui concerne le problème I, on prend pour l'expérience, comme condition initiale $\varphi(x) = \log(2e^{1-x^2} - 1)$ et Le temps d'explosion numérique $T_\infty(\tau, h)$ est obtenu lorsque $\tau H(\|U^n\|_\infty) > 1$ pour différentes valeurs de H et τ . Les résultats numériques de la section 2.2 sont obtenus en prenant $\varphi(x) = 20\cos(\frac{\pi}{2}x)$. Les tableaux présentés dans les deux cas suivants contiennent les pas de discrétisations h , les temps d'explosion numérique obtenus pour chaque pas, le nombre d'étapes n , l'ordre s de convergence de la méthode et le temps mis par la machine pour effectuer les opérations CPU_t (en seconde). Des graphes montrant l'évolution de la solution semi-discrète (discrète) en fonction du temps d'explosion sont également présentés. On termine la section par une analyse des résultats obtenus. L'ordre de la méthode est calculé de la façon suivante :

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h})/(T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

2.3 Expériences numériques

►► Tableaux

Premier cas : Résultats numériques pour le problème I

I	$T_\infty(\tau, h)$	n	CPU_t	s
32	0.02901367	2971	714	-
64	0.02898193	11871	722	-
128	0.02897277	47469	726	1.80
256	0.02897018	189859	733	1.81
512	0.02896945	759417	801	1.84

Tableau 2.1 – Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 2$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$

I	$T_\infty(\tau, h)$	n	CPU_t	s
32	0.00399414	409	982	-
64	0.00394287	1615	987	-
128	0.00393127	6441	992	2.14
256	0.00392761	25740	993	2.08
512	0.00392669	102936	998	2.00

Tableau 2.2 – Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$

I	$T_\infty(\tau, h)$	n	CPU_t	s
32	0.00393164	4026	110	-
64	0.00392773	16088	105	-
128	0.00392669	64335	199	1.91
256	0.00392643	257323	390	2.00
512	0.00392637	1029275	446	2.00

Tableau 2.3 – Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.001$

2.3 Expériences numériques

I	$T_\infty(\tau, h)$	n	CPU_t	s
32	0.00393164	4026	119	-
64	0.00392773	16088	125	-
128	0.00392669	64335	129	1.91
256	0.00392643	257323	133	2.00
512	0.00392637	1029275	141	2.00

Tableau 2.4 – Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{5/1000}$ et $\tau = 0.001$

Remarque 2.5. Les tableaux ci dessus présentent les résultats numériques obtenus pour le problème I. Ces résultats montrent que lorsque α augmente le temps d'explosion augmente. Lorsque τ diminue le nombre d'itérations et la durée d'exécution de l'ordinateur augmentent. On remarque également que lorsque la fonction H change le temps d'explosion numérique reste inchangé mais la durée d'exécution de l'ordinateur augmente considérablement. L'ordre de convergence de la méthode tend vers 2 ce qui garantit une bonne approximation du temps d'explosion et cela se voit aussi à travers les différentes valeurs de nos temps d'explosion.

Les tableaux suivants présentent les résultats numériques obtenus pour le problème II. On remarque que pour λ fixé lorsque p augmente le temps d'explosion numérique diminue. De même pour p fixé lorsque λ le temps d'explosion numérique diminue légèrement ainsi que le nombre d'itérations. On observe également la convergence de ce temps. En effet pour $\lambda = 0$ et $p = 3$ la convergence du temps est à 6 chiffres après la virgule ($T_b^h = 0.001257$). L'ordre de convergence qui tend vers 2 montre que le temps d'explosion numérique obtenu est une bonne approximation du temps d'explosion du problème continu.

2.3 Expériences numériques

Deuxième cas : Résultats numériques pour le problème II

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.05603824	2626	274	-
32	0.05615354	2819	293	-
64	0.05618421	3035	305	1.91
128	0.05619221	3295	438	1.93
256	0.05619427	3734	451	1.95
512	0.05619480	6728	499	1.96
1024	0.05619494	19817	856	1.97

Tableau 2.5 – Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 2$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.00125712	1420	866	-
32	0.00125750	1586	875	-
64	0.00125764	1736	885	1.50
128	0.00125769	1887	900	1.60
256	0.00125770	2036	922	1.70
512	0.00125771	2166	955	1.75
1024	0.00125771	2341	1013	1.80

Tableau 2.6 – Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.05280356	2576	441	-
32	0.05290339	2784	495	-
64	0.05293010	3006	567	1.90
128	0.05293712	3279	665	1.93
256	0.05293894	3702	802	1.95
512	0.05293941	6504	983	1.96
1024	0.05293953	18816	14850	1.97

Tableau 2.7 – Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$

2.3 Expériences numériques

►► Figures

Premier cas : Résultats numériques pour le problème I

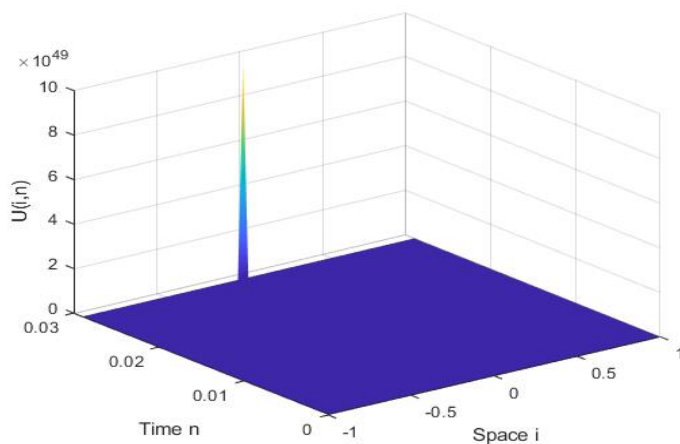


Figure 2.1 :Evolution de la solution discrète pour

$$I = 64, \alpha = 2, H(s) = s^{1/100}, \tau = 0.01$$

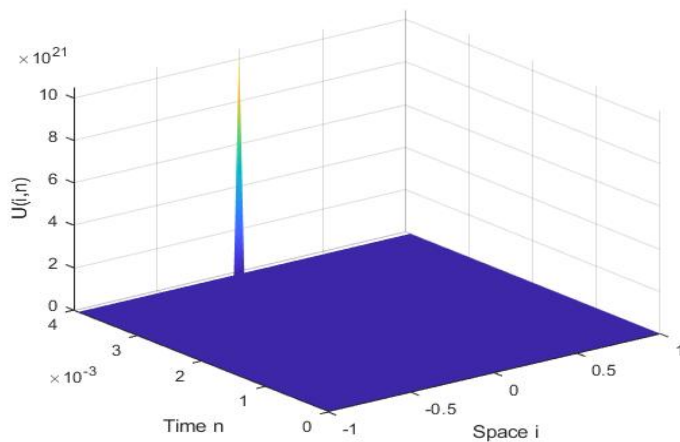


Figure 2.2 :Evolution de la solution discrète pour

$$I = 64, \alpha = 3, H(s) = s^{5/1000}, \tau = 0.001$$

2.3 Expériences numériques

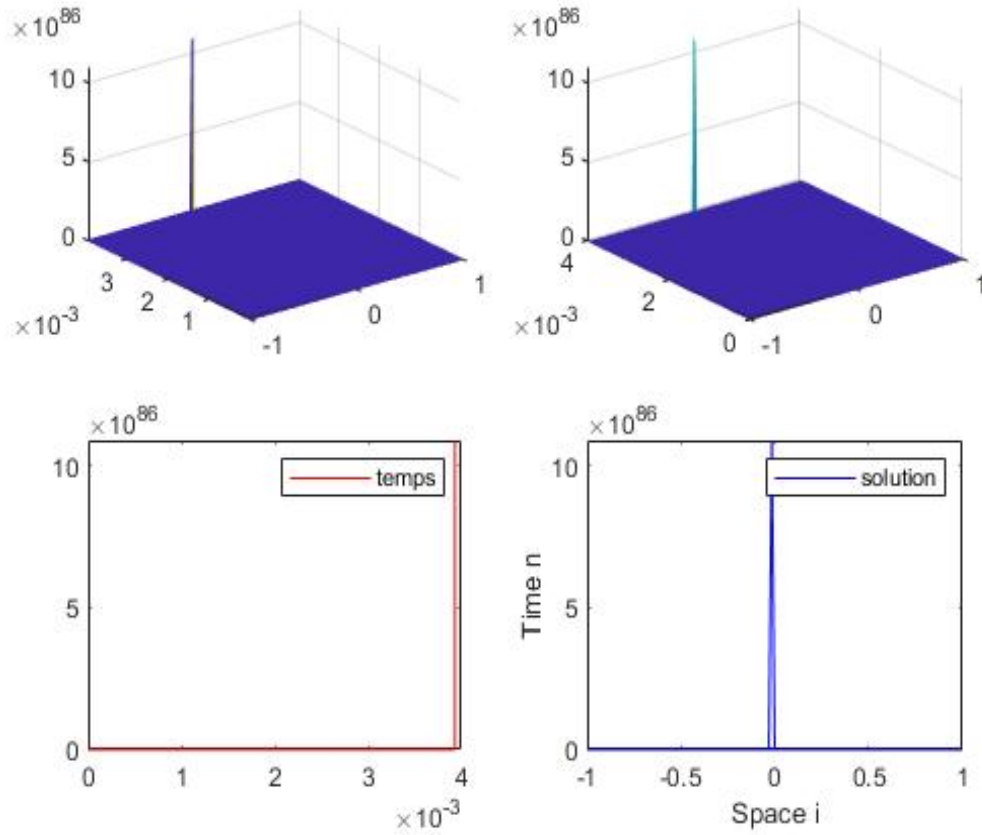


Figure 2.3 : Evolution de la solution discrète pour

$$I = 128, \alpha = 3, H(s) = s^{1/100}, \tau = 0.01$$

Remarque 2.6. les figures montrent l'évolution de la solution discrète en fonction du temps. On remarque que l'explosion de cette solution a lieu en un seul point. De la figure 2.3 on peut observer la valeur de la solution et du temps à l'explosion. Cette valeur est très grande au temps d'explosion, ce qui est en accord avec la définition de l'explosion.

2.3 Expériences numériques

Second cas : Résultats numériques pour le problème II

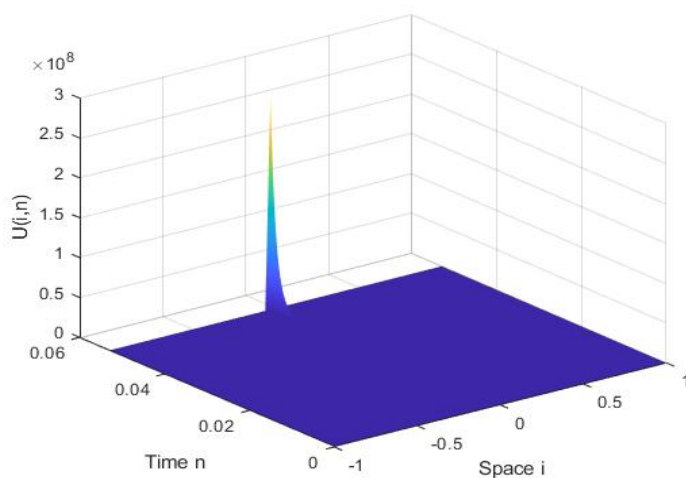


Figure 2.4 : Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 64$, $\lambda = 1$, $p = 2$

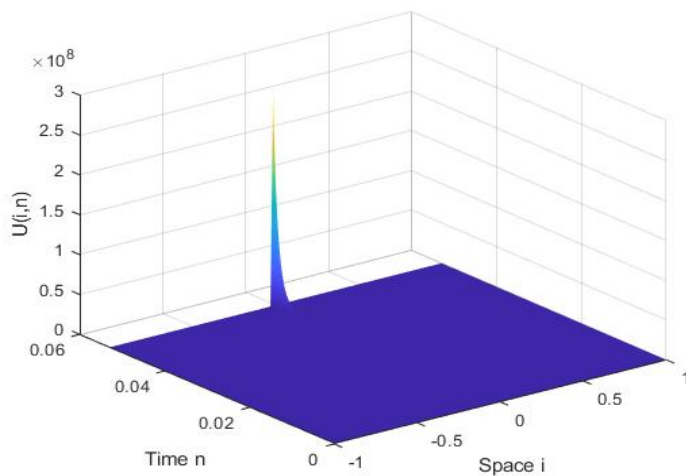


Figure 2.5 : Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 128$, $\lambda = 1$, $p = 2$

2.3 Expériences numériques

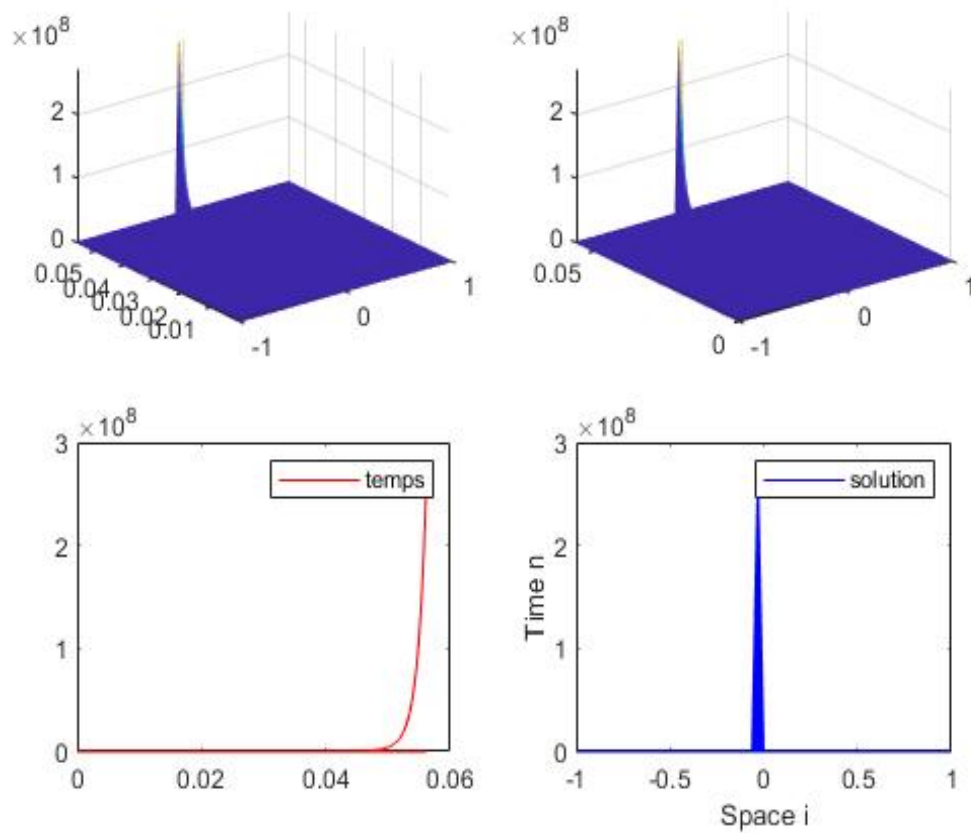


Figure 2.6 : Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$, $p = 2$

Remarque 2.7. *les figures montrent que l'explosion est locale. elle se produit au seul point 0.*

Chapitre 3

Du temps d'extinction numérique au temps d'explosion numérique

3.1 Préliminaires

Considérons le problème III suivant :

$$\begin{aligned}v_t - v_{xx} &= \frac{\varepsilon}{(1-v)^\beta} &&] -1, 1[\times [0, T[, \\v(\pm 1, t) &= 0 && t \in [0, T[, \\v(x, 0) &= v_0(x) && |x| \leq 1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

où $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq v_0 < 1$ et $v_0(\pm 1) = 0$.

On dit que la solution u s'éteint en un temps fini si elle atteint la valeur 1 en temps fini. Depuis les travaux des pionniers tels que H. Kawarada [56], A. Acker and W. Walter [4], le phénomène d'extinction a été investi par un grand nombre d'auteurs. Pour des conditions suffisantes, des auteurs (voir [51, 67, 32]) ont montré que la solution du problème 3.1 peut s'éteindre en temps fini. Il est prouvé dans [64], que pour tout $\beta > 0$, il existe un $\varepsilon(\beta) > 0$ telle que u s'éteint en un temps fini T .

le problème ci-dessus est étroitement lié à un modèle physique populaire ap-

3.1 Préliminaires

paru dans l'étude d'un phénomène de polarisation dans les conducteurs ioniques. Il représente également un modèle qui, par transformation, est lié à une certaine classe de problèmes physiques d'inflammation dans lesquels la réaction est entraîné par la température sur un seul site. Ce genre de phénomène est observé dans les systèmes biologiques et dans les processus de diffusion de réactions chimiques dans lesquels la réaction n'a lieu que sur certains sites locaux. On pourra consulter pour plus de motivation physique [32, 67, 82]. Les problèmes d'extinction et d'explosion sont intrinsèquement liés. En effet lors de l'extinction, la solution de l'équation reste bornée, alors que ses dérivés par rapport au temps explosent à un moment donné. Si on considère v comme solution de (3.1) alors $w = v_t$ satisfait l'équation différentielle

$$w_t - \Delta w = f'(v)w$$

dont le coefficient $f'(v)$ devient non borné quand $v \rightarrow 1$ d'où l'explosion. Les auteurs dans [55, 5, 51, 67] montrent que v s'éteint en temps fini T si et seulement si v_t explose au temps T et qu'un point a est un point d'extinction pour v si et seulement si a est un point d'explosion pour v_t .

Soit v solution de 3.1. Si on pose $u = \frac{1}{1-v}$, alors u est solution du problème ci dessous

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= h(u, \nabla u), \quad \text{dans } \Omega \times [0, T[, \\ u &= 1, \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \text{dans } \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec $\Omega = (-1, 1)$, $h(u, \nabla u) = -\frac{2(\nabla u)^2}{v} + \varepsilon u^{\beta+2}$ et $u_0 = \frac{1}{1-v_0}$. On a alors ce qui suit :

Théorème 3.1. [5] Supposons h et u_0 définies par $h(u, \nabla u) = -\frac{2(\nabla u)^2}{v} + \varepsilon u^{\beta+2}$ et $u_0 = \frac{1}{1-v_0}$. Alors la solution v de 3.1 s'éteint en temps fini si et seulement si la solution u de 3.2 explose en temps fini.

3.1 Préliminaires

Par ailleurs si $v_t \rightarrow \infty$ alors $u_t/u^2 \rightarrow \infty$ au temps d'explosion et au point d'explosion.

Cependant il existe très peu de travaux sur l'étude numérique des phénomènes d'extinction. La méthode numérique à notre connaissance pour approximer le temps d'extinction numérique de ces phénomènes est celle de T.Nakagawa, voir ([75], [16], [73],[76]). Or dans cette méthode le pas de temps est défini de manière adaptative en fonction du terme de réaction et le temps est calculé par une somme infinie ce qui nous oblige à déterminer quand arrêter le calcul. Pourtant il n'existe pas de stratégie simple permettant de déterminer quand arrêter, voir ([26],[76]). C'est pourquoi nous transformons dans ce qui suit le problème (3.1) en un problème d'explosion afin de déterminer le temps d'explosion numérique par la méthode de la transformation de la longueur d'arc qui correspondrait au temps d'extinction du problème (3.1). Pour cela, supposons que v_0 est régulière et satisfait

$$v_0'' + \frac{\varepsilon}{(1-v_0)^\beta} \geq 0.$$

i.e., $v_t \geq 0$ à $t = 0$, où v_0'' est la dérivée seconde de v_0 en fonction de x .

En faisant un changement de fonction inconnue $u = \frac{1}{(1-v)}$, le problème (3.1) devient

$$u_t - u_{xx} = -\frac{2u_x^2}{u} + \varepsilon u^{2+\beta}, \quad] - 1, 1[\times [0, T[, \quad (3.3)$$

$$u(\pm 1, t) = 1, \quad t \in [0, T[, \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |x| \leq 1, \quad (3.5)$$

où $u_0(x) = \frac{1}{1-v_0(x)} \geq 1$. Le problème (3.3-3.5) est un problème d'explosion avec terme de convection. Le terme de convection a un effet d'amortissement, empêchant l'explosion. $-\frac{2u_x^2}{u}$ décrit les morts au sein d'une population. Il peut aussi représenter l'action d'un prédateur qui détruit les individus durant leurs déplacements et le terme $\varepsilon u^{2+\beta}$ décrit les naissances dans cette population. L'explosion

3.2 Problème semi-discret

des problèmes avec terme en gradient a été beaucoup étudiés par de nombreux auteurs, (voir ([72, 24, 90, 82, 81, 72, 54, 30])).

Notre objectif dans ce chapitre est l'étude numérique du problème (3.3-3.5). D'abord dans la section suivante nous donnons des propriétés du schéma semi-discret. Ensuite dans la section 3.2, nous prouvons l'explosion de la solution semi-discrète sous certaines conditions et estimons son temps d'explosion semi-discret. Puis nous montrons dans la section 3.3 que ce temps converge vers le temps réel. Finalement nous donnons des résultats numériques pour illustrer notre analyse dans la section 3.4.

3.2 Problème semi-discret

Soit I un entier positif, posons $h = \frac{2}{I}$, le pas d'espace et définissons $x_i = ih - 1$, pour $i = 0, \dots, I$. Approximons la solution u du problème (3.3-3.5) par la solution $U_h(t) = (U_0(t), U_2(t), \dots, U_I(t))^T$ de l'équation semi-discrète :

$$\frac{d}{dt}U_i(t) - \delta^2 U_i(t) = -2 \frac{(\delta^0 U_i(t))^2}{U_i(t)} + \varepsilon U_i^{\beta+2}(t), \quad 1 \leq i \leq I-1, t \in [0, T[, \quad (3.6)$$

$$U_0(t) = U_I(t) = 1, \quad t \in [0, T[, \quad (3.7)$$

$$U_i^0 = \varphi_i \geq 1, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (3.8)$$

où

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1,$$

$$\delta^0 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h}, \quad 1 \leq i \leq I-1.$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_I = 1, \quad \varphi_i = \varphi_{I-i}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad \delta^+ \varphi_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h},$$

$\delta^+ \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq k-1, \quad k$ est la partie entière du nombre $I/2$.

3.2 Problème semi-discret

Le lemme suivant est une forme discrète du principe du maximum.

Lemme 3.1. Soient $a_h(t), b_h(t) \in C([0, T_{max}^h], \mathbb{R}^{I+1})$ et $V_h(t) \in C^1([0, T_{max}^h], \mathbb{R}^{I+1})$ avec $b_h(t)\delta^0 V_h(t) \leq 0$, telle que pour tout $0 \leq i \leq I$,

$$\frac{d}{dt} V_i(t) - \delta^2 V_i(t) + b_i(t)\delta^0 V_i(t) + a_i(t)V_i(t) \geq 0, \quad t \in]0, T_{max}^h[, \quad (3.9)$$

$$V_0(t) \geq 0, \quad V_I(t) \geq 0, \quad (3.10)$$

$$V_i(0) \geq 0. \quad (3.11)$$

Alors on a

$$V_i(t) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T_{max}^h[. \quad (3.12)$$

Preuve. Soit T_0 tel que $T_0 < T_{max}^h$ et définissons $Z_h(t) = e^{\gamma t} V_h(t)$ un vecteur tel que $(a_i(t) - \gamma) > 0$ pour $0 \leq i \leq I$, $t \in [0, T_0]$. Soit $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} Z_i(t)$. Puisque, pour $i \in \{0, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ est une fonction continue sur le compact $[0, T_0]$, il existe $t_0 \in [0, T_0]$ et $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ tel que $m = Z_{i_0}(t_0)$. On observe

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \quad (3.13)$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1. \quad (3.14)$$

De (3.9), on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + b_{i_0}(t_0)\delta^0 Z_{i_0}(t_0) + (a_{i_0}(t_0) - \gamma)Z_{i_0}(t_0) \geq 0. \quad (3.15)$$

Il suit de (3.13)-(3.14) que $(a_{i_0}(t_0) - \gamma)Z_{i_0}(t_0) \geq 0$, ce qui implique que $Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ vu que $(a_{i_0}(t_0) - \gamma) > 0$. On déduit que $V_h(t) \geq 0$ pour $t \in [0, T_0]$ et la preuve est complète. \square

3.3 Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'explosion

Remarque 3.1. Les propriétés de la section (2.1.2) sont toujours valables pour le problème (3.6 – 3.8).

Dans la section suivante nous montrons sous certaines hypothèses que la solution semi-discrète U_h du problème (3.6 – 3.8) explose en un temps fini. Ensuite nous estimons ce temps et prouvons que ce temps semi-discret converge vers le temps réel du problème continu quand le pas de discrétisation spatiale tend vers zéro.

3.3 Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'explosion

Théorème 3.2. Soit U_h la solution du problème semi-discret (3.6–3.8). Supposons qu'il existe un entier positif λ tel que

$$\delta^2 \varphi_i - \gamma_i \delta^0 \varphi_i + \varepsilon \varphi_i^{\beta+2} \geq \lambda \varphi_i^{\beta+2}, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (3.16)$$

Alors, la solution U_h du problème (3.6–3.8) explose en un temps fini T_b^h et on a l'estimation suivante :

$$T_b^h \leq \frac{1}{\lambda} \frac{\|U_h(0)\|_\infty^{-(\beta+1)}}{(\beta+1)}.$$

Preuve. Soit $[0, T_{max}^h[$ l'intervalle de temps maximal sur lequel $\|U_h(t)\|_\infty < \infty$.

Notre but est de montrer que T_{max}^h est fini.

Introduisons le vecteur $J_h(t)$ tel que

$$J_i(t) = \frac{d}{dt} U_i(t) - \lambda U_i^{\beta+2}(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{max}^h[. \quad (3.17)$$

3.3 Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'explosion

Alors on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}U_i - \lambda U_i^{\beta+2}\right) - \delta^2\left(\frac{d}{dt}U_i - \lambda U_i^{\beta+2}\right). \\ \frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &= \frac{d^2}{dt^2}U_i - \lambda(\beta+2)U_i^{\beta+1}\frac{d}{dt}U_i - \delta^2\left(\frac{d}{dt}U_i\right) + \lambda\delta^2 U_i^{\beta+2}.\end{aligned}$$

Du lemme 2.6, on a :

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i \geq \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i\right) - \lambda(\beta+2)U_i^{\beta+1}\left(\frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i\right),$$

en utilisant (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i &\geq \frac{d}{dt}\left(-2\frac{(\delta^0 U_i)^2}{U_i} + \varepsilon U_i^{\beta+2}\right) - \lambda(\beta+2)U_i^{\beta+1}\left(-2\frac{(\delta^0 U_i)^2}{U_i} + \varepsilon U_i^{\beta+2}\right). \\ &\geq 2\frac{(\delta^0 U_i)^2}{U_i}\frac{dU_i}{dt} - 4\frac{(\delta^0 U_i)^2}{U_i}\delta^0\left(\frac{dU_i}{dt}\right) + \varepsilon(\beta+2)U_i^{\beta+1}\frac{dU_i}{dt} + 2\lambda(\beta+2)U_i^\beta(\delta^0 U_i)^2 \\ &\quad - \varepsilon\lambda(\beta+2)U_i^{2\beta+3},\end{aligned}$$

en réarrangeant, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i + 4\frac{(\delta^0 U_i)}{U_i}\delta^0 J_i - \left(2\left(\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\right)^2 + \varepsilon\lambda(\beta+2)U_i^{\beta+1}\right)J_i &\geq -4\lambda\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\delta^0(U_i^{\beta+2}) \\ &\quad + 2\lambda\left(\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\right)^2 U_i^{\beta+2} + 2\lambda(\beta+2)U_i^\beta(\delta^0 U_i)^2.\end{aligned}$$

Un calcul direct permet d'avoir

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i + 4\frac{(\delta^0 U_i)}{U_i}\delta^0 J_i - \left(2\left(\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\right)^2 + \varepsilon\lambda(\beta+2)U_i^{\beta+1}\right)J_i \geq 2\lambda(\beta+1)U_i^\beta(\delta^0 U_i)^2 \geq 0.$$

En posant

$$\gamma_i = 4\frac{\delta^0 U_i}{U_i} \text{ et } b_i = -\left(2\left(\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\right)^2 + \lambda\varepsilon(\beta+2)U_i^{\beta+1}\right),$$

on obtient

3.3 Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'explosion

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i + \gamma_i \delta^0 J_i + b_i J_i \geq 2\lambda(\beta + 1)U_i^\beta (\delta^0 U_i)^2 \geq 0.$$

or

$$\begin{aligned} J_i(0) &= \frac{d}{dt}U_i(0) - \lambda U_i^{\beta+2}(0) \\ &= \delta^2 U_i(0) - \gamma_i(0)\delta^0 U_i(0) + \varepsilon U_i^{\beta+2}(0) - \lambda U_i^{\beta+2}(0). \end{aligned}$$

De (3.16), on observe que

$$J_i(0) = \delta^2 U_i(0) - \gamma_i(0)\delta^0 U_i(0) + \varepsilon U_i^{\beta+2}(0) - \lambda U_i^{\beta+2}(0) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

On déduit du lemme 3.1 que $J_h(t) \geq 0$ pour $t \in [0, T_{max}^h]$, ce qui implique que

$$\frac{dU_i(t)}{dt} \geq \lambda U_i^{\beta+2}(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T_{max}^h].$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus sur $[t, T_{max}^h)$, nous arrivons à

$$T_{max}^h - t \leq \frac{1}{\lambda} \frac{(U_i(t))^{-(\beta+1)}}{\beta + 1}, \quad (3.18)$$

ce qui implique que

$$T_{max}^h \leq \frac{1}{\lambda} \frac{\|U_h(0)\|_\infty^{-(\beta+1)}}{\beta + 1}.$$

D'où, on a $T_b^h = T_{max}^h$. □

Remarque 3.2. Par le théorème 2.4, on obtient la convergence de la solution U_h du problème (3.6)–(3.8) vers celle du problème continu (3.3)–(3.5). On déduit égale-

3.3 Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'explosion

ment de l'inégalité (3.18) le résultat suivant

$$T_b^h - t_0 \leq \frac{1}{\lambda} \frac{\|U_h(t_0)\|_\infty^{-(\beta+1)}}{\beta+1}. \quad (3.19)$$

On prouve à présent la convergence du temps d'explosion semi-discret T_b^h vers le temps d'explosion réel T_b du problème continu (3.3)–(3.5).

Théorème 3.3. *Supposons que la solution du problème continu (3.3)–(3.5) est telle que $u \in C^{4,1}([-1, 1] \times [0, T_b[, \mathbb{R})$ et la condition initiale en (3.8) satisfait*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

Supposons qu'il existe une constante positive λ telle que

$$\delta^2 \varphi_i - \gamma_i \delta^0 \varphi_i + \varepsilon \varphi_i^{\beta+2} \geq \lambda \varphi_i^{\beta+2}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Alors le problème (3.6)–(3.8) admet une unique solution U_h qui explose en un temps fini T_b^h et on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_b^h = T_b. \quad (3.20)$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante positive N telle que

$$\frac{1}{\lambda} \frac{x^{-(\beta+1)}}{\beta+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \infty \quad \text{pour } x \in [N, +\infty[. \quad (3.21)$$

Puisque la solution u explose au temps T_b , alors il existe $T_1 \in (T_b - \frac{\varepsilon}{2}, T_b)$ tel que $\|u(x, t)\|_\infty \geq 2N$ pour $t \in [T_1, T_b]$.

3.3 Explosion de la solution semi-discrète et convergence du temps d'explosion

Maintenant prenons $T_2 = \frac{T_1 + T_b}{2}$, alors on a

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \|u(x, t)\|_\infty < \infty.$$

Du théorème 2.4, on déduit que pour h suffisamment petit

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < N.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\|U_h(T_2)\|_\infty \geq \|u_h(T_2)\|_\infty - \|U_h(T_2) - u_h(T_2)\|_\infty,$$

il s'en suit que

$$\|U_h(T_2)\|_\infty \geq N.$$

D'après le théorème 3.2, $U_h(t)$ explose en un temps fini T_b^h . On déduit de la remarque 3.2 et de (3.21) que

$$|T_b - T_b^h| \leq |T_b - T_2| + |T_2 - T_b^h| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\|U_h(T_2)\|_\infty^{-(\beta+1)}}{\beta+1} \leq \varepsilon.$$

Ce qui termine la preuve. □

3.4 Expériences numériques

Dans cette section nous présentons quelques résultats numériques obtenus à partir des expériences numériques réalisés pour le problème (3.3)-(3.5) avec $\varphi(x) = \frac{1}{1-u(x)}$ comme condition initiale, où $u(x) = 0.001 * (1 - e^{x^2-1} + 0.5 * \cos(\frac{\pi}{2}x))$. On utilise la méthode de la technique de la transformation d'arc. Pour montrer que T_b^h converge réellement vers T_b , on fait varier I et les coefficients β et ε . L'ordre s de la méthode est calculé par

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

Les tableaux ci-dessous contiennent le pas de discrétisation h , le temps d'explosion numérique T_b^h et CPU_t (en seconde) obtenus pour différents pas ainsi que le nombre d'étapes et l'ordre de convergence s de la méthode. Pour d'autres d'illustrations, on présente également des figures sur lesquelles on peut observer l'évolution de la solution semi-discrète U_h en fonction du temps et aussi le lieu d'explosion de cette solution.

Tableaux présentant le temps d'explosion numérique, le nombre d'itérations, et les ordres d'approximation

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0537156	3031	3638	-
32	0.0536971	3316	3729	-
64	0.0536926	3755	3777	2.00
128	0.0536914	4486	3901	2.00
256	0.0536912	5776	4572	2.00
512	0.0536911	8267	5516	2.00
1024	0.0536911	19483	7375	2.00

Tableau 3.1 – Résultats numériques obtenus pour $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 10$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0597190	3154	5699	-
32	0.0596925	3382	5711	-
64	0.0596858	3814	5726	1.98
128	0.0596842	4564	5754	1.99
256	0.0596838	5909	5810	2.00
512	0.0596836	8561	5937	2.00
1024	0.0596836	21327	6550	2.00

Tableau 3.2 – Résultats numériques obtenus pour $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 9$

3.4 Expériences numériques

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.02835434	4288	6210	-
32	0.02834752	4708	6300	-
64	0.02834600	5392	7290	2.16
128	0.02834566	5567	8680	2.08
256	0.02834558	7598	12600	2.04
512	0.02834557	24267	14407	2.01
1024	0.0283453	29483	16999	2.00

Tableau 3.3 – Résultats numériques obtenus pour $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 2$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0465233	657	334	-
32	0.0427350	661	1286	-
64	0.0418053	723	4008	2.02
128	0.0415739	791	4918	2.00
256	0.0415161	879	8734	2.00
512	0.0415160	982	17116	2.00
1024	0.0415160	21327	36550	2.00

Tableau 3.4 – Résultats numériques obtenus pour $\beta = 3$ et $\varepsilon = 6$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0832921	1483	1550	-
32	0.0832807	1738	1558	-
64	0.0832701	2036	1626	2.10
128	0.0832676	2541	12650	2.08
256	0.0832670	3461	14400	2.05
512	0.0832670	7996	22340	2.03
1024	0.0832670	10085	24356	2.01

Tableau 3.5 – Résultats numériques obtenus pour $\beta = 3$ et $\varepsilon = 3$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.2713427	1490	1700	-
32	0.2712305	1765	1900	-
64	0.2712049	2053	3000	2.13
128	0.2711990	2678	8190	2.11
256	0.2711976	6575	16830	2.06
512	0.2711973	22610	30090	2.03
1024	0.2711972	87039	50859	2.01

Tableau 3.6 – Résultats numériques obtenus pour $\beta = 3$ et $\varepsilon = 1$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.1118178	1663	2000	-
32	0.1117536	1931	2047	-
64	0.1117378	2289	3020	2.02
128	0.1117339	2897	13089	2.01
256	0.1117330	4070	15820	2.00
512	0.1117327	10357	21349	2.00
1024	0.1118178	19483	28436	2.00

Tableau 3.7 – Résultats numériques obtenus pour $\varepsilon = 3$ et $\beta = 2$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.3467681	1805	2020	-
32	0.3467000	2342	3856	-
64	0.3466849	3211	7565	2.17
128	0.3466815	4721	13970	2.15
256	0.3466807	8333	21397	2.08
512	0.3466806	28750	43987	2.03
1024	0.3466804	109035	56908	2.01

Tableau 3.8 – Résultats numériques obtenus pour $\varepsilon = 1$ et $\beta = 2$

3.4 Expériences numériques

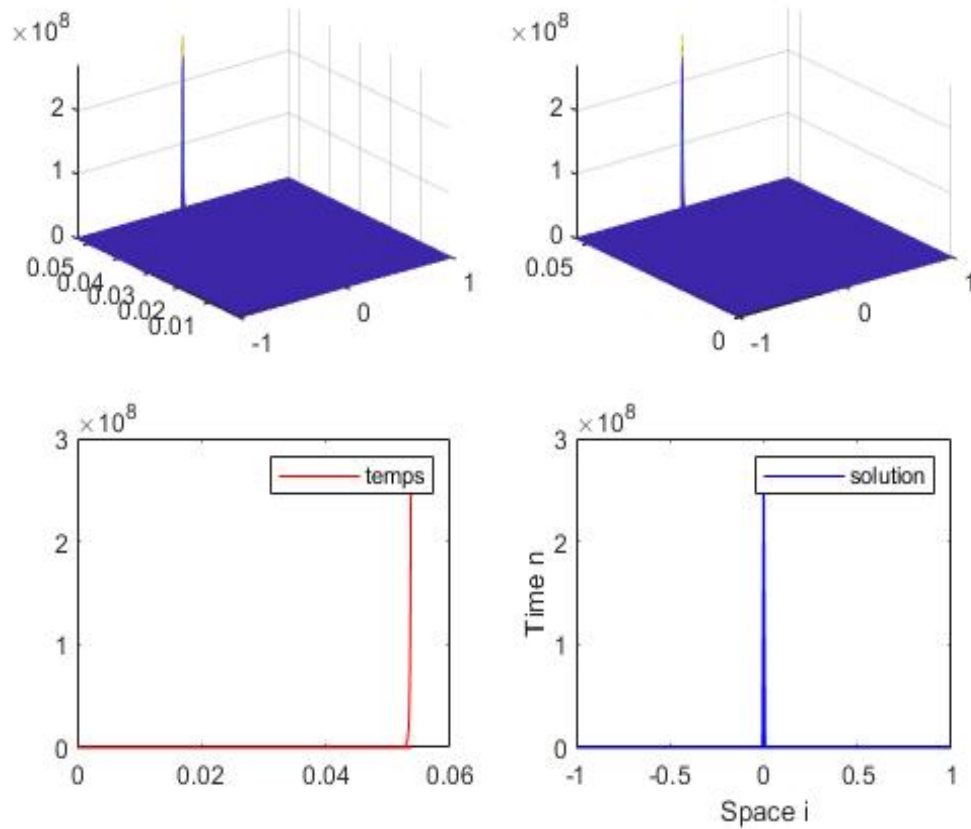


Figure 3.3 : Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 256$, $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 10$

Remarque 3.3. Les tableaux ci dessus montrent que pour β fixé lorsque ε diminue le temps d'explosion augmente ainsi que les étapes et la durée d'exécution de l'ordinateur. On a le même constat lorsque ε est fixé et que β diminue. on observe également une forte convergence du temps d'explosion (6 chiffres après la virgule), cela se justifie aussi par l'ordre de convergence qui est environ 2.

On peut observer, des graphes l'évolution de la solution semi-discrète en fonction du temps. Ces graphes montrent également que l'explosion de cette solution a lieu en un seul point.

3.4 Expériences numériques

Figures présentant l'évolution de la solution semi-discrète en fonction du temps.

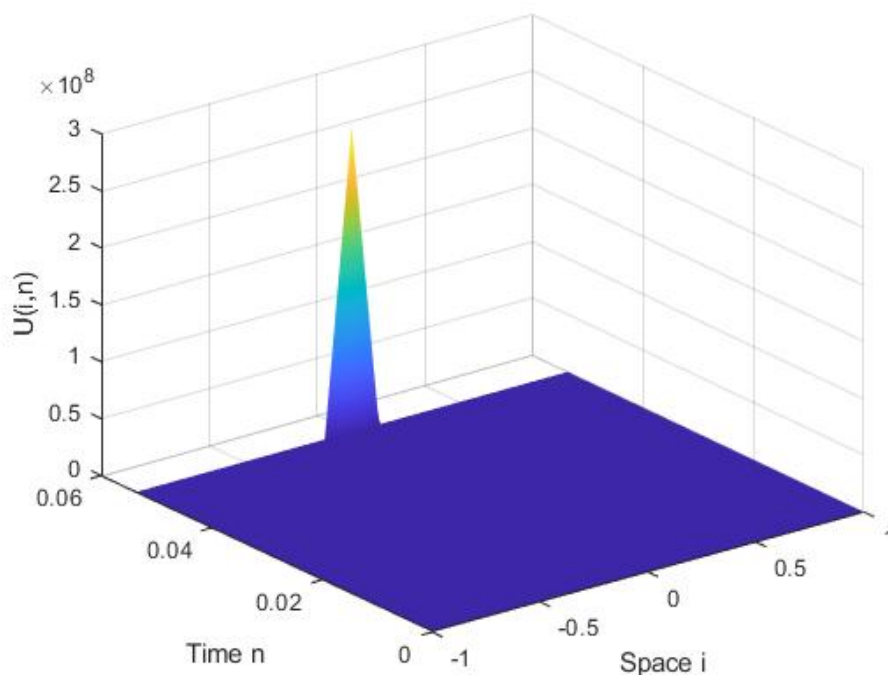


Figure 3.1 : Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 16$, $\beta = 0.86$ et $\varepsilon = 10$

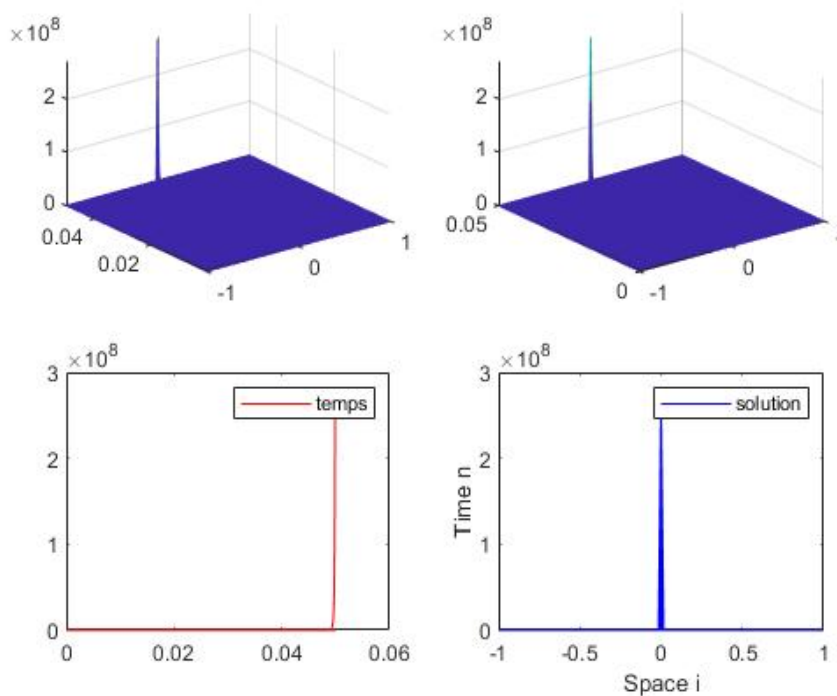


Figure 3.2 : Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 128$, $\beta = 1$ et $\varepsilon = 10$

Chapitre 4

Comparaison de méthodes numériques

Dans ce chapitre nous faisons une étude comparative des méthodes utilisées. Nous comparons qualitativement et quantitativement les méthodes numériques utilisées pour approximer le temps d'explosion numérique des solutions des équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires. On commence d'abord par une étude comparative basée sur la mise en place de ces méthodes et ensuite la comparaison se fera au niveau des résultats numériques obtenus à partir de ces différentes méthodes et on termine le chapitre par des résultats numériques.

4.1 Etude qualitative

Le tableau ci-dessous présente quelques avantages et inconvénients des différentes méthodes numériques.

4.1 Etude qualitative

Méthodes \ Qualités	Avantages	Inconvénients
Méthode de Nakagawa	<ul style="list-style-type: none"> - applicable à tout type d'edp parabolique - convergence rapide de la méthode - bonne approximation 	<ul style="list-style-type: none"> - nombre d'itérations trop important - élaboration difficile : discrétisation totale, condition CFL à déterminer - problème d'arrêt
Méthode de Cho	<ul style="list-style-type: none"> - codage facile - arrêt du programme dès l'explosion de la solution - bonne approximation 	<ul style="list-style-type: none"> - non applicable à tout type d'EDP parabolique - élaboration difficile : discrétisation totale, condition CFL à déterminer - nombre d'itérations trop important
Méthode de la technique de la transformation de la longueur d'arc	<ul style="list-style-type: none"> - applicable à tout type d'EDP parabolique - élaboration facile : semi discrétisation, pas de condition CFL - bonne approximation 	<ul style="list-style-type: none"> - codage difficile - temps machine (cpu time) très élevé

Tableau 4.1 – Table de comparaison de méthodes numériques

Remarque 4.1. Du tableau ci dessus, on remarque que la méthode de Cho facile à implémenter et sans souci d'arrêt s'applique spécialement aux équations aux dérivées partielles paraboliques avec terme de réaction strictement positive et convexe. La méthode de la technique de la transformation de la longueur d'arc bien que difficile à coder avec un temps d'exécution un peu plus élevé que les autres méthodes est applicable à tout type d'edp parabolique, sans problème d'arrêt est moins difficile à élaborer. Toutes ces méthodes sont convergentes et donnent de bonnes valeurs approximations du temps d'explosion. Ces trois méthodes sont également applicables et efficaces pour les équations aux dérivées ordinaires (edo).

4.2 Etude quantitative

A présent nous présentons des résultats numériques obtenus à partir des expériences numériques réalisées avec ces différentes méthodes ci-dessus avec un ordinateur dont les caractéristiques sont : *dual core i7*, *1To* de disque dur et une ram de *8Go*. Les tableau ci dessous contiennent le temps d'explosion, le nombre d'itérations ainsi que le temps d'exécution. On présente également des graphes pour illustrer l'évolution de la solution (semi) discrète en fonction du temps.

4.2.1 Expériences numériques

Dans cette partie, nous présentons des approximations numériques du temps d'explosion obtenus avec les différentes méthodes pour le problème I et II.

4.2.1.1 Tableaux

A : Méthode de Nakagawa

I	T_b^h	n	CPU_t	- s
16	0.009586	50	31	-
32	0.005605	104	531	-
64	0.004411	2705	846	2.01
128	0.004061	9853	1047	2.01
256	0.003963	13588	1563	2.00
512	0.003936	40144	7859	2.00

Tableau 4.2 – *Probleme I* : Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$

4.2 Etude quantitative

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.056833	1 943	687	-
32	0.0563499	7 390	1421	-
64	0.0562331	28 154	2625	2.04
128	0.0562044	107 087	5578	2.02
256	0.0561973	406 235	7140	2.00
512	0.0561955	1 536 275	9470	2.00

Tableau 4.3 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 2$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.001286	862	125	-
32	0.001264	3 250	875	-
64	0.001259	12 272	3046	2.01
128	0.001258	46 246	7421	2.01
256	0.001257	173 673	13218	2.00
512	0.001257	649 496	14731	2.00

Tableau 4.4 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.053570	1 934	500	-
32	0.053092	7 354	1468	-
64	0.052977	28 008	2078	2.04
128	0.052948	106 495	6375	2.01
256	0.052941	403 854	16953	2.00
512	0.052940	1 526 702	15409	2.00

Tableau 4.5 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

B : Méthode de Cho

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.003949	1011	277	-
32	0.003931	4026	110	-
64	0.003927	16088	105	-
128	0.003926	64335	199	1.93
256	0.003926	257323	390	1.90
512	0.003926	1029275	460	1.89

Tableau 4.6 – *Probleme I* : Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.001$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.056796	1 454	125	-
32	0.056347	5 770	468	-
64	0.056237	23 035	1486	-
128	0.056207	92 091	7889	1.87
256	0.056198	368 305	8062	1.73
512	0.056196	1 473 152	10542	1.73

Tableau 4.7 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$, $p = 2$ avec $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$

4.2 Etude quantitative

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.001304	334	187	-
32	0.001269	1300	250	-
64	0.001260	5165	736	-
128	0.001258	20621	3607	1.86
256	0.001257	82441	12808	1.84
512	0.001257	329 718	15158	1.83

Tableau 4.8 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$ avec $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.001$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.052945	13 554	718	-
32	0.052937	54 208	2798	-
64	0.052939	216 842	2956	-
128	0.052940	867 376	7749	2.13
256	0.052940	3 469 487	8295	2.10
512	0.052940	3 940 654	9720	2.06

Tableau 4.9 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$ avec $H(s) = s^{5/1000}$ et $\tau = 0.001$

C : Méthode de la transformation de la longueur d'arc

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.003901	300	650	-
32	0.003923	715	2687	-
64	0.003925	874	3069	-
128	0.003926	1009	5734	1.94
256	0.003926	1138	10859	1.95
512	0.003926	1235	16693	1.96

Tableau 4.10 – *Probleme I* : Résultats numériques obtenus pour $\alpha = 3$

4.2 Etude quantitative

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0560382	2 626	2609	-
32	0.0561535	2 819	2780	-
64	0.0561842	3 035	4458	1.91
128	0.0561922	3 295	7674	1.93
256	0.0561942	3 734	12409	1.95
512	0.0561948	6 728	38834	1.96

Tableau 4.11 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 2$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0012571	1 420	398	-
32	0.0012575	1 586	1025	-
64	0.0012576	1 736	3667	1.50
128	0.0012576	1 887	5287	1.60
256	0.0012577	2 036	11272	1.70
512	0.0012577	2 166	27780	1.75

Tableau 4.12 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 0$ et $p = 3$

I	T_b^h	n	CPU_t	s
16	0.0528035	2 576	583	-
32	0.0529033	2 784	2055	-
64	0.0529301	3 006	3910	1.90
128	0.0529371	3 279	7159	1.93
256	0.0529389	3 702	11410	1.95
512	0.0529394	6 504	34985	1.96

Tableau 4.13 – *Probleme II* : Résultats numériques obtenus pour $\lambda = 1$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

Remarque 4.2. Les différents tableaux ci-dessus présentent les résultats numériques obtenus à partir des trois méthodes numériques de résolution pour les problèmes I et II. Ces tableaux contiennent les temps d'explosions numériques T_b^h , le nombre d'étapes ou d'itérations ainsi que la durée mis par l'ordinateur (C_{pu_t}) en secondes. De ces résultats on peut observer que les temps d'explosion numérique obtenus à partir des trois différentes méthodes sont identiques à quelques chiffres près pour les deux problèmes. On peut également voir que : La méthode de Nakagawa nous donne une bonne approximation du temps d'explosion, un nombre d'itérations et un temps machine moyens.

Par la méthode de Cho, on obtient une bonne approximation du temps d'explosion mais avec un nombre d'itérations très élevé.

Quant à la méthode de la transformation de la longueur d'arc, elle donne une bonne approximation du temps d'explosion avec l'ordre qui tend vers 2 et une bonne convergence du temps. On remarque qu'elle converge plus rapidement par rapport aux deux autres méthodes mais cette méthode est très couteuse en temps machine. Par exemple avec le problème II, on a pour $I = 256$, $\lambda = 0$ et $p = 2$ on a :

- méthode de la transformation de la longueur d'arc : nombre d'étapes 3 734, C_{pu_t} 12 409s
- méthode de Cho : nombre d'étapes 368 305, C_{pu_t} 8 062s
- méthode de Nakagawa : nombre d'étapes 406 235, C_{pu_t} 7 140s

4.2 Etude quantitative

4.2.1.2 Figures

A :Méthode de Nakagawa

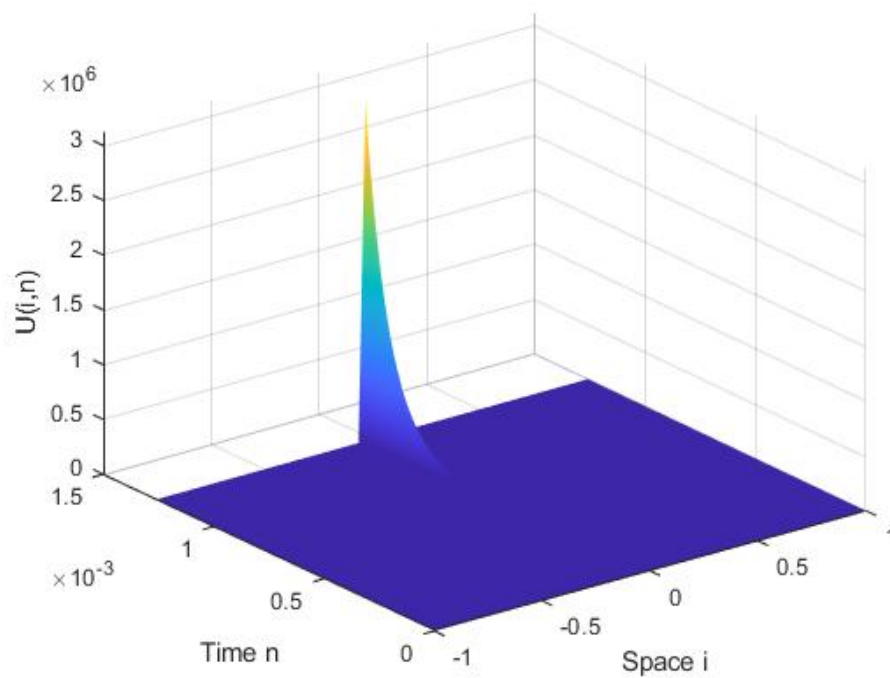


Figure 4.1 – Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

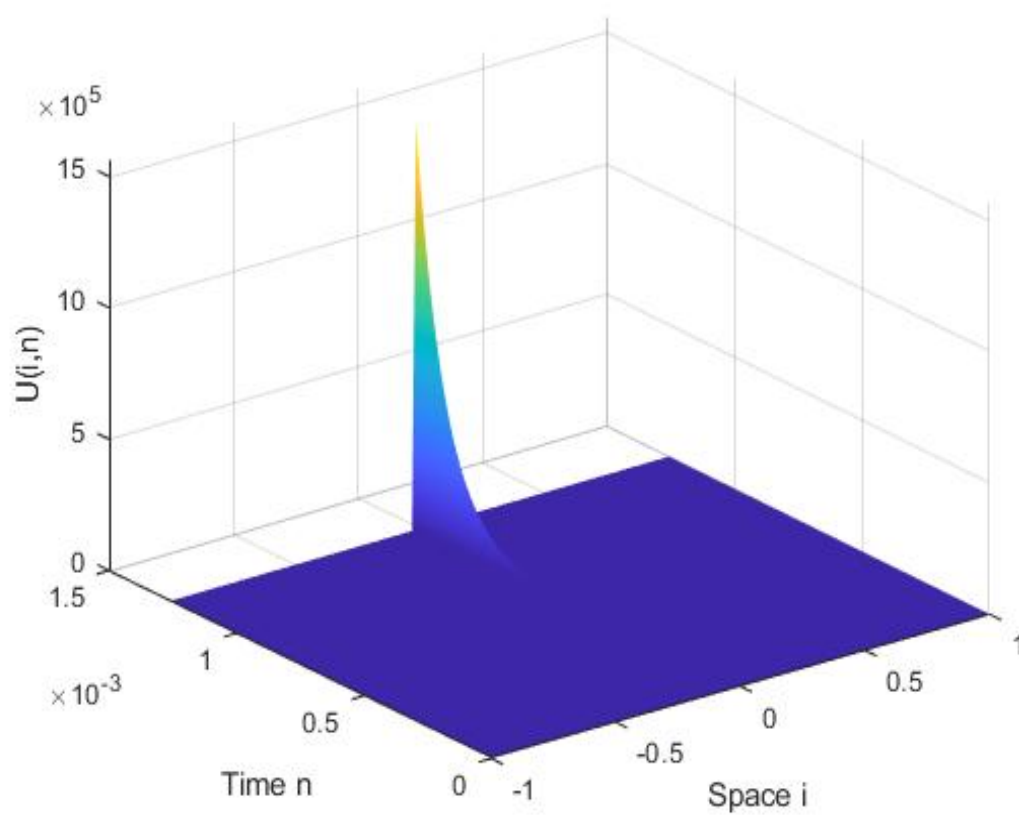


Figure 4.2 – Evolution de la solution discrète pour $I = 128$, $\lambda = 0$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

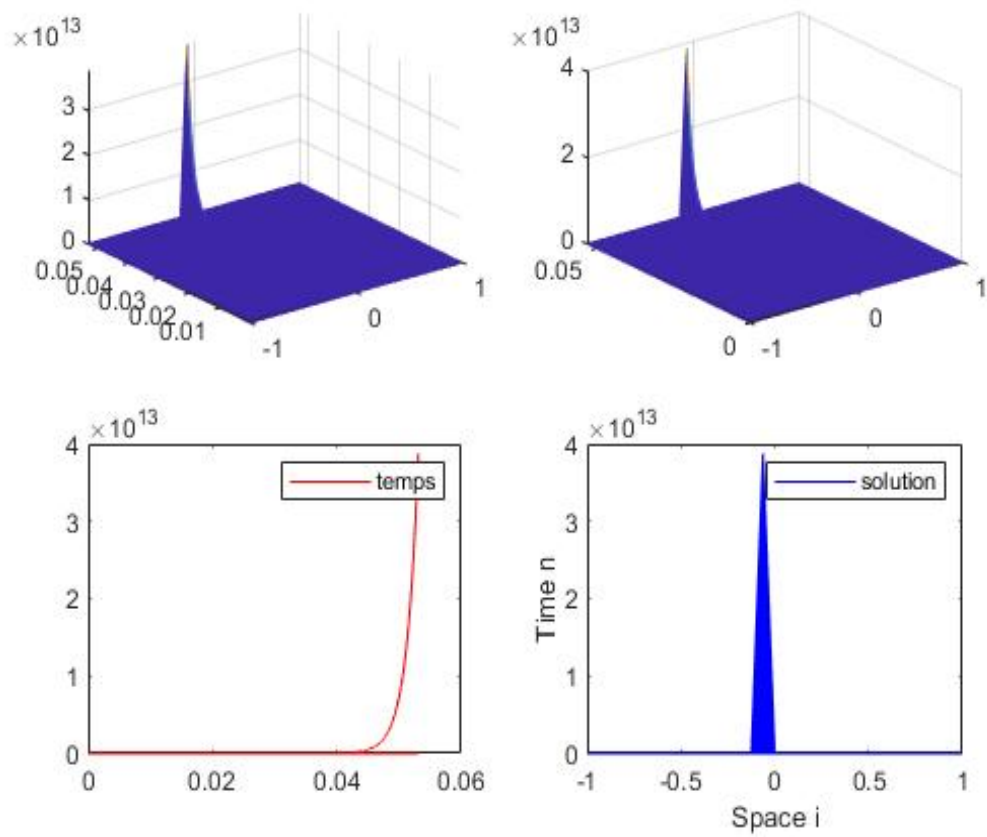


Figure 4.3 – Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

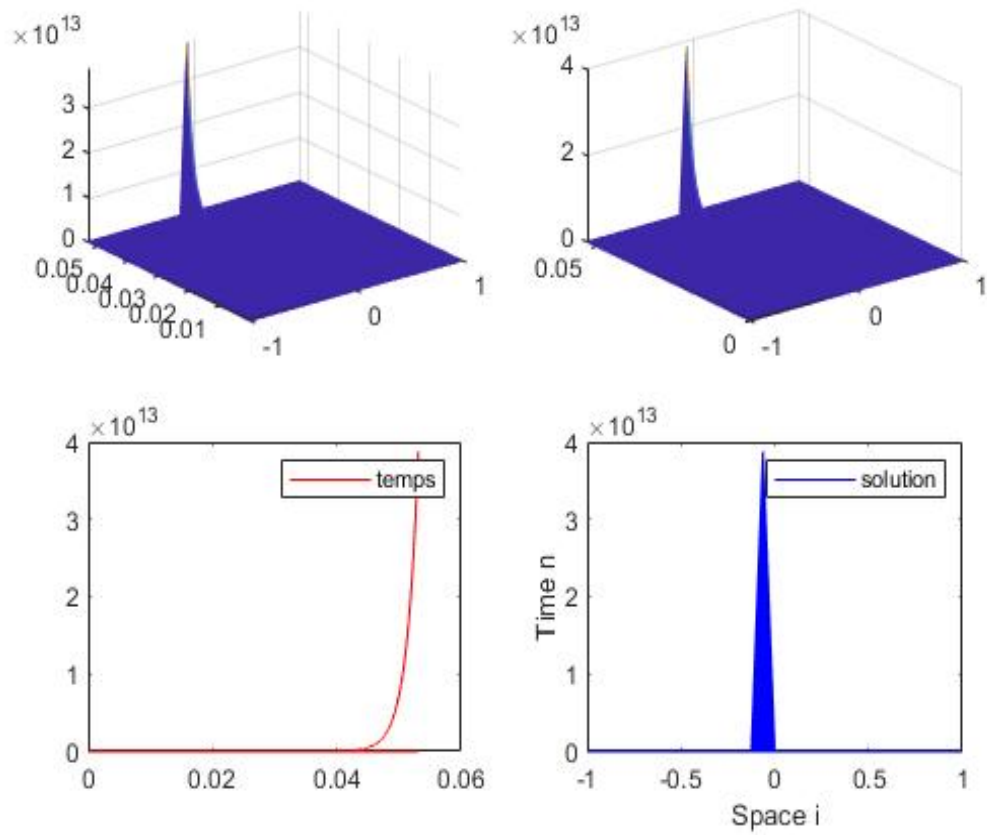


Figure 4.4 – Evolution de la solution discrète pour $I = 32$, $\lambda = 1$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

B :Méthode de Cho

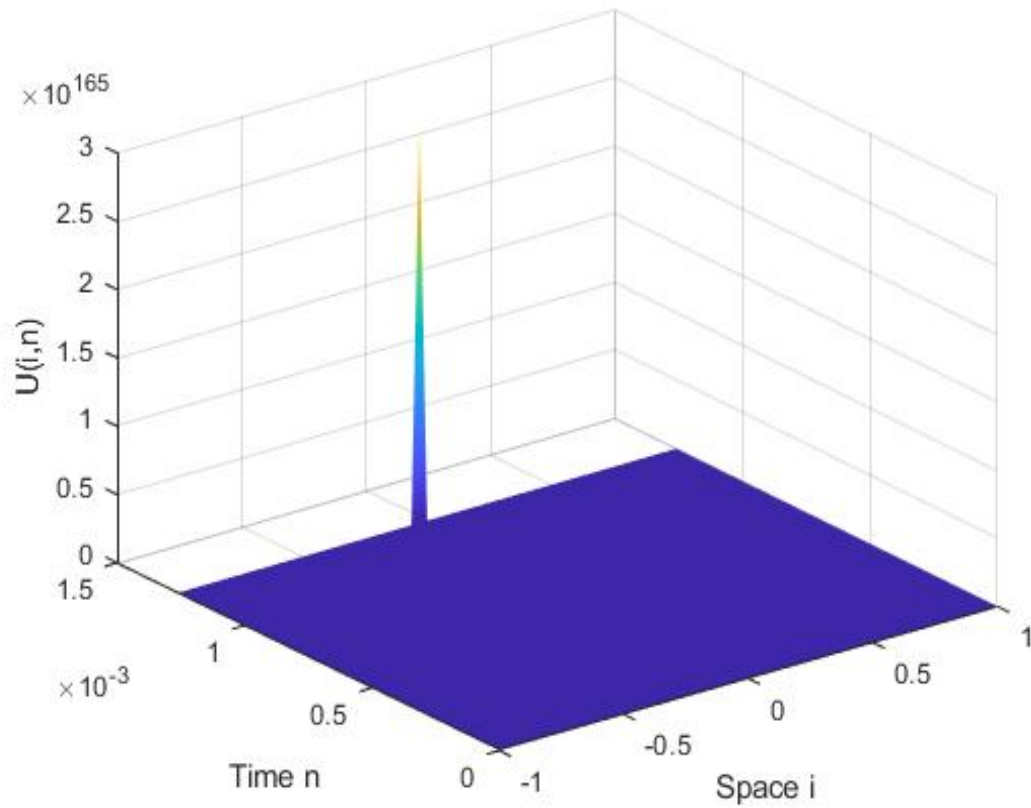


Figure 4.5 – Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$, $p = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$

4.2 Etude quantitative

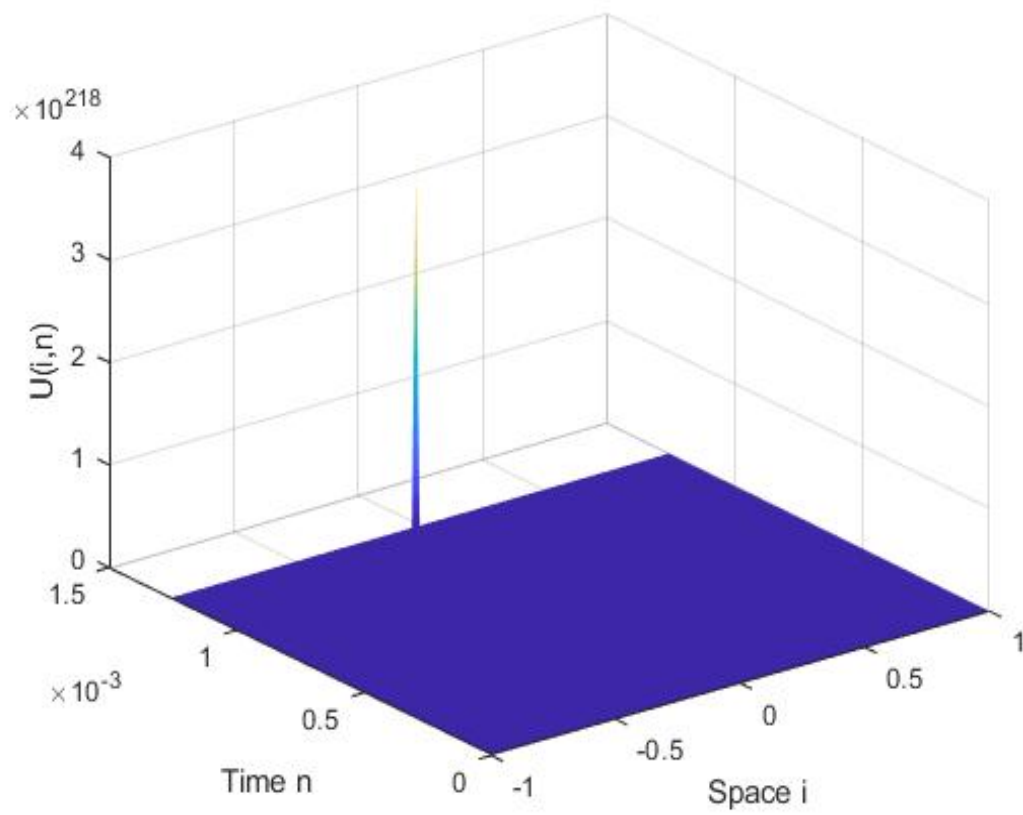


Figure 4.6 – Evolution de la solution discrète pour $I = 128$, $\lambda = 0$, $p = 3$, $H(s) = s^{1/100}$ et $\tau = 0.01$

4.2 Etude quantitative

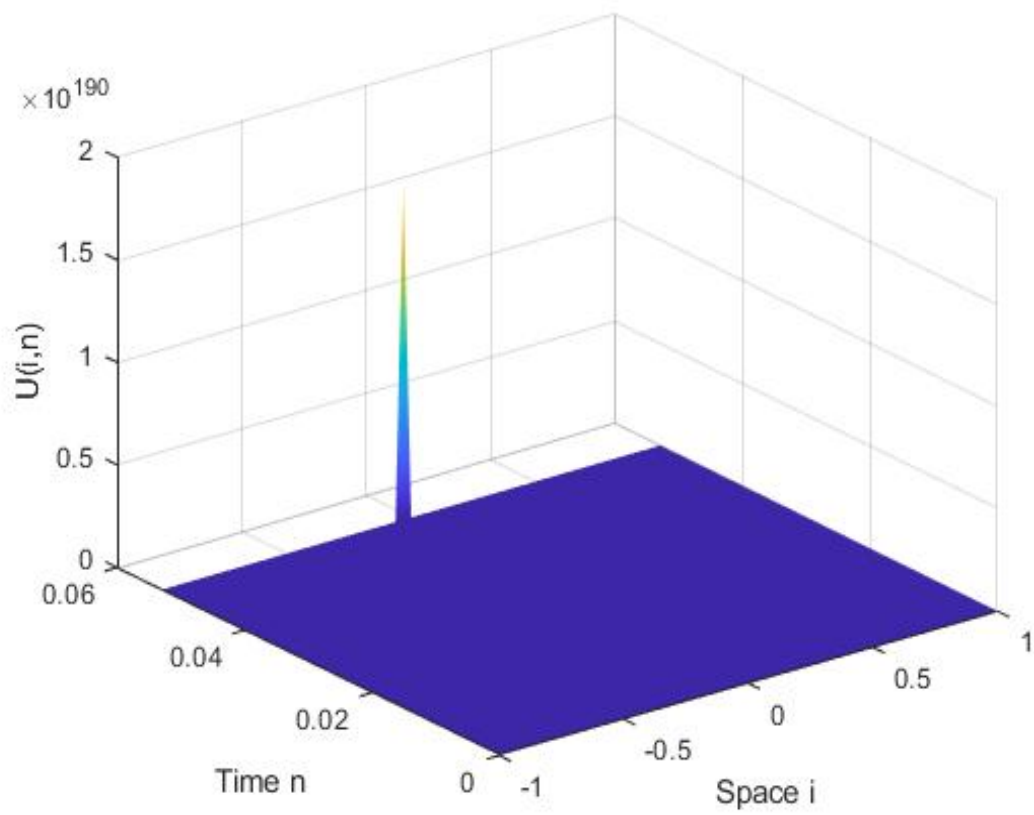


Figure 4.7 – Evolution de la solution discrète pour $I = 64$, $\lambda = 1$, $p = 2$, $H(s) = s^{5/1000}$ et $\tau = 0.001$

4.2 Etude quantitative

C : Méthode de la transformation de la longueur d'arc

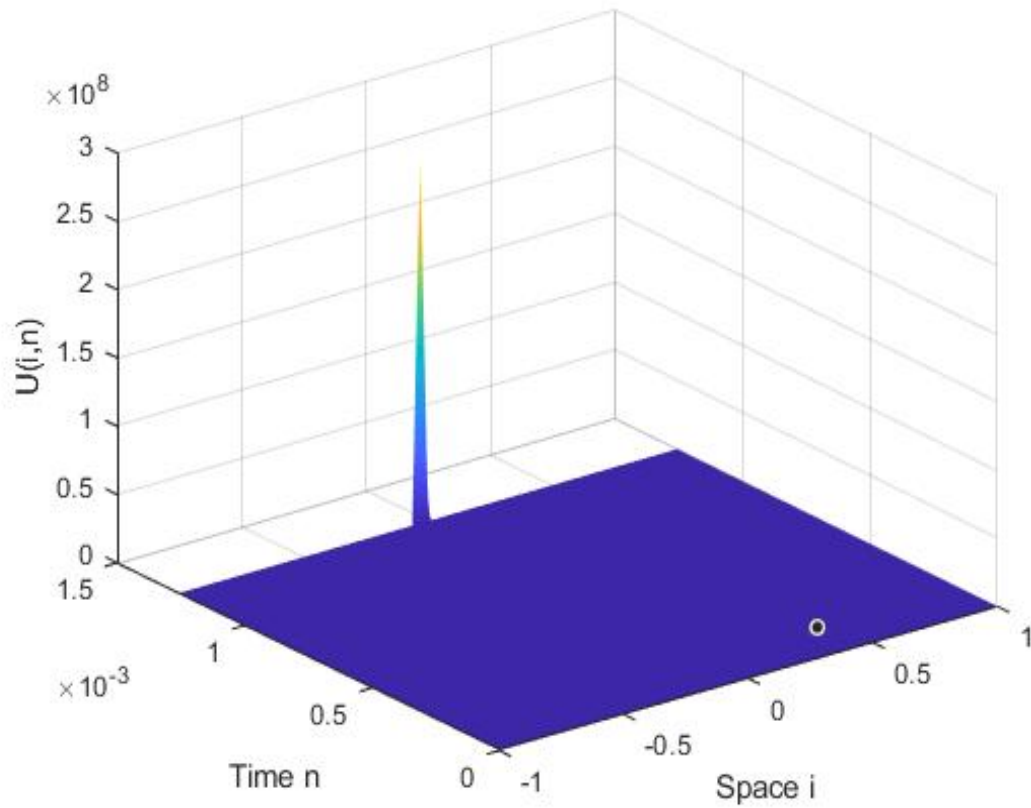


Figure 4.8 – Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 3$

4.2 Etude quantitative

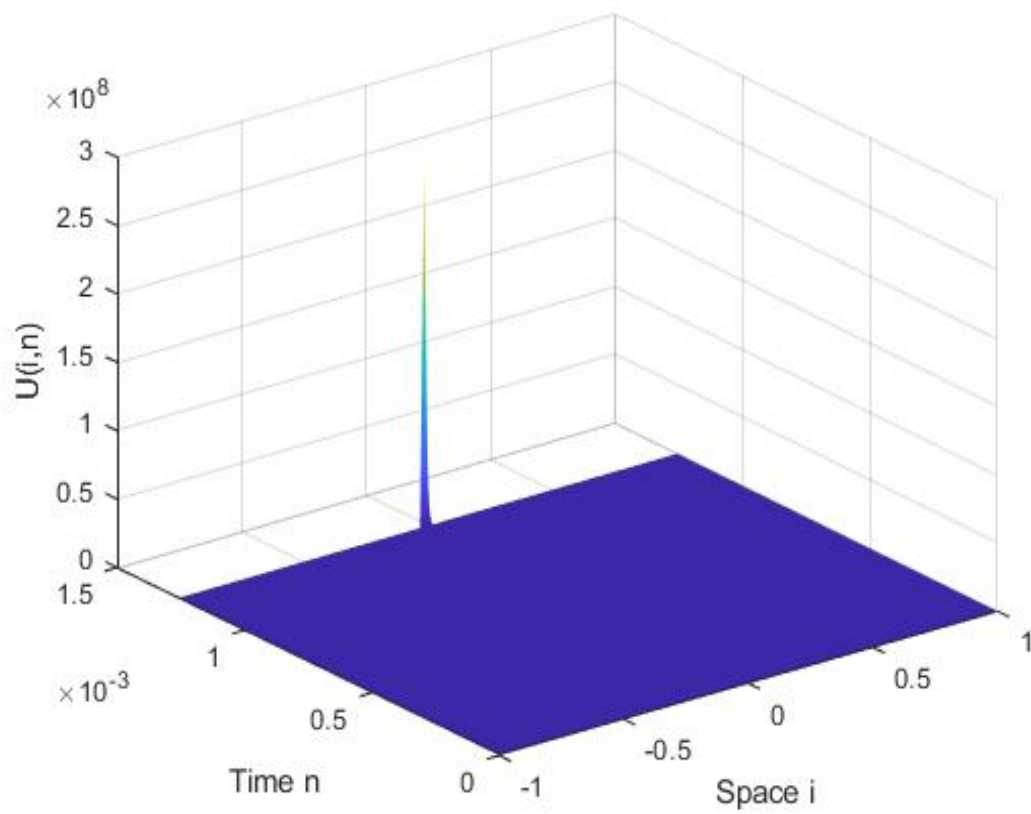


Figure 4.9 – Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 128$, $\lambda = 0$ et $p = 3$

4.2 Etude quantitative

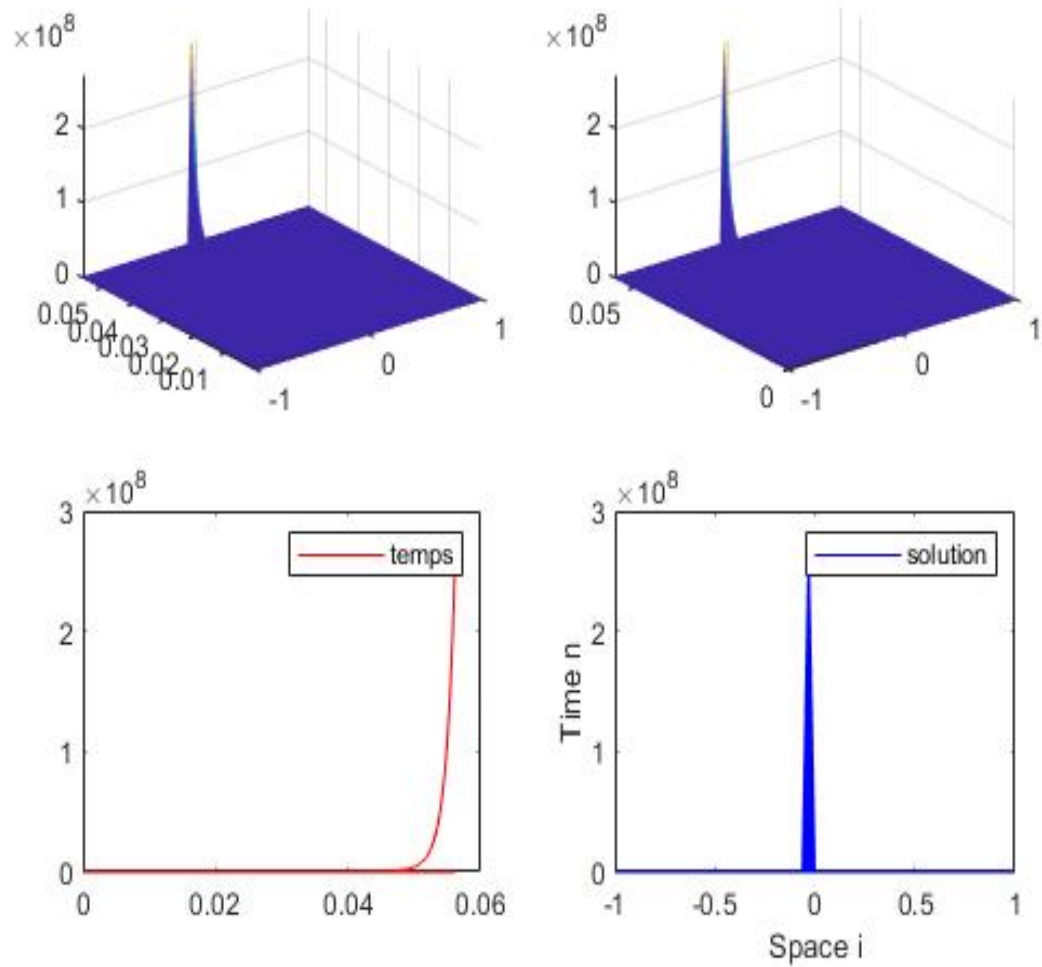


Figure 4.10 – Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 64$, $\lambda = 0$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

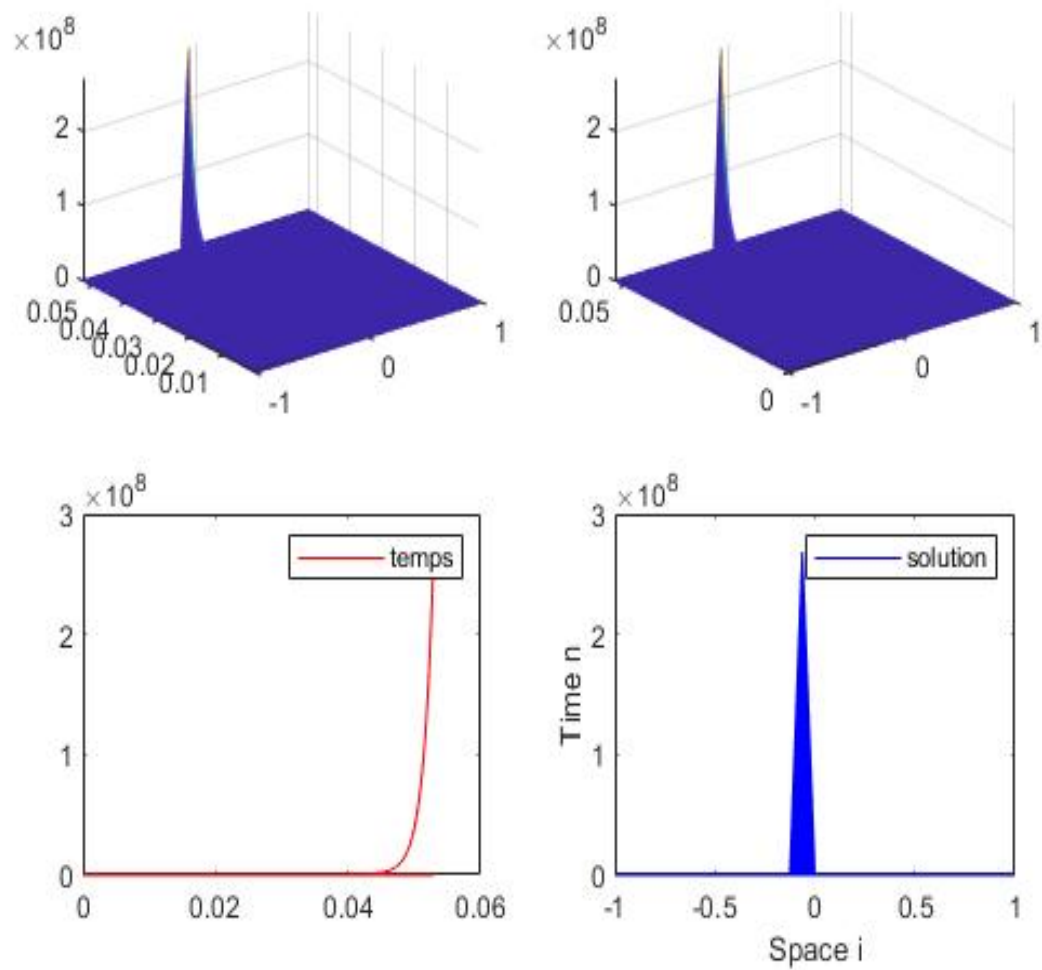


Figure 4.11 – Evolution de la solution semi-discrète pour $I = 32$, $\lambda = 1$ et $p = 2$

4.2 Etude quantitative

Remarque 4.3. *Les figures ci dessus montrent l'évolution de la solution (semi) discrète en fonction du temps. A travers tous les graphes issus des trois différentes méthodes, on remarque que l'explosion a lieu en un seul point, ce qui est en accord avec les travaux effectués par [42, 51]. Lorsque h tend vers zéro (i.e I prend des valeurs plus grandes), le lieu d'explosion devient plus précis.*

Conclusion et Perspectives

Dans la présente thèse, nous avons prouvé, l'explosion théorique et numérique et estimer le temps d'explosion numérique des solutions positives de quelques équations aux dérivées partielles de type parabolique soumis aux conditions aux bords de Dirichlet par différentes méthodes numériques. Pour la résolution numérique de nos problèmes, nous avons utilisé pour le problème I où le terme de réaction est une fonction exponentielle, la méthode de Cho qui contrairement à la méthode de Nakagawa n'a aucun problème d'arrêt. Ensuite pour le problème II, la méthode utilisée est basée sur la technique de la transformation de la longueur d'arc. Par cette méthode nous avons pu approcher numériquement le temps d'explosion en effectuant une semi discrétisation du problème continu. Quant au problème III qui est un problème d'extinction, nous l'avons transformé en un problème d'explosion et appliqué la méthode utilisée pour le problème II pour approximer son temps d'explosion tout en montrant que ce temps converge vers le temps réel d'explosion. Finalement nous avons fait une étude comparative des méthodes numériques utilisées. Nous avons observé numériquement que les résultats obtenus par la méthode basée sur la technique de la transformation d'arc étaient plus convergents avec moins d'itérations que les deux autres méthodes. Les méthodes numériques développées dans cette thèse, permettront aux ingénieurs et aux chercheurs d'effectuer des prévisions et des planifications relatives aux dispositifs utilisés.

En définitive, nous sommes parvenus à prouver l'explosion théorique et numérique

4.2 Etude quantitative

des solutions des problèmes I, II, et du problème III transformé, puis à déterminer de bonnes valeurs approximatives de leurs temps d'explosion par différentes méthodes numériques et enfin à comparer ces méthodes numériques. Néanmoins les questions suivantes :

- que se passe-t-il après l'explosion ?
- peut-on utiliser la technique de la transformation d'arc pour des problèmes d'extinction sans transformation préalable ?

demeurent sans réponses. Toutefois, des études sont menées à notre niveau en vue d'apporter des éléments de réponses à ces préoccupations.

En perspective, on pourra appliquer les méthodes numériques développées dans cette thèse à d'autres problèmes en dimension supérieure ou à des problèmes sous des conditions aux bords dynamiques.

On pourra également faire une étude de sensibilité pour :

- quantifier la sensibilité du temps d'explosion aux variations des différents paramètres ;
- séparer l'action de chaque paramètre individuellement de manière à classer ces paramètres entre eux ;
- décider sur quels paramètres jouer en priorité pour modifier le comportement du système étudié.

Annexe A

Dans cette annexe, nous présentons quelques notations et définitions utilisés dans cette thèse. En outre, nous passons en revue les espaces de fonctions et les principes du maximum et de comparaison pour des équations paraboliques.

A.1 Notations et définitions

Définition A.1. On désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables sur Ω et telles que $|u|^p$ est intégrable ($1 \leq p < \infty$) muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.1})$$

Définition A.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, où $m, p \in \mathbb{N}^*$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ multi - indice, } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p\} \quad (\text{A.2})$$

où $D^\alpha u$ est la dérivée d'exposant α au sens des distributions de u muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}. \quad (\text{A.3})$$

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , X un espace de Banach.

Définition A.3. Soit $f : I \rightarrow X$ une fonction. f est dite hölderienne d'ordre α , ($0 < \alpha < 1$) sur I , s'il existe une constante A telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha \quad \text{pour } x, y \in I. \quad (\text{A.4})$$

Le plus petit A satisfaisant (A.4) est appelé coefficient de hölder.

Si $\alpha = 1$ dans (A.4) on dit que f est lipschitzienne.

La famille de toutes les fonctions hölderiennes d'ordre α sur I est notée $C^\alpha(I, X)$.

Définition A.4. Pour $\alpha \in (0, 1]$, on dit que la fonction f définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est

A.1 Notations et définitions

Hölder continue en x_0 avec exposant α si

$$[f]_{\alpha, x_0} = \sup_{x \in \Omega \setminus x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty.$$

Si $[f]_{\alpha, \Omega} = \sup_{x_0 \in \Omega} [f]_{\alpha, x_0} < \infty$ alors on dit que f est uniformément Hölder continue sur Ω et si f est uniformément Hölder continue sur tout compact Ω' de Ω on dit que f est localement Hölder continue sur Ω .

Définition A.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit C^α et $C^{m+\alpha}$ par

$$\begin{aligned} C^\alpha(\Omega) &= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée telle que } |u(x) - u(y)| \leq A|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \Omega \right\} \\ C^{m+\alpha}(\Omega) &= \left\{ u \in C^\alpha(\Omega) \text{ telle que } D^\beta u \in C^\alpha(\Omega), |\beta| \leq m \right\}. \end{aligned}$$

Les espaces $C^\alpha(\Omega)$ et $C^{m+\alpha}(\Omega)$ munis des normes respectives

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^\alpha(\Omega)} &= \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\{(x,y) \in (\Omega^2) | x \neq y\}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ \|u\|_{C^{m+\alpha}(\Omega)} &= \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta u\|_{C^\alpha(\Omega)} \end{aligned}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque A.1. Les espaces $C^{m+\alpha}(\Omega)$ sont appelés espaces de Hölder. En particulier l'espace de Hölder $C^{2+\alpha}(\Omega)$ est défini par

$$C^{2+\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C^\alpha(\Omega) \text{ telle que } D_x^2 u, D_x u, D_t u \in C^\alpha(\Omega) \right\}.$$

Théorème A.1. (Théorème de sortie de tout compact)

Soient J un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω ouvert d'un espace de Banach E et $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du problème de Cauchy. Si $T_+ < \sup J$ alors la trajectoire $\{x(t)\}$ sort de tout compact au voisinage de T_+ , c'est à dire : quelque soit $K \subset \Omega$ compact, il existe $T_K \in]T_-, T_+[$ tel que, pour tout $t \in [T_K, T_+[$, $x(t) \in \Omega \setminus K$.

A.2 Existence et unicité des solutions de problèmes paraboliques

Corollaire A.1. *On suppose $\Omega = E$ et E de dimension finie. Soit $(]T_-, T_+[, x)$ la solution maximale du problème de Cauchy. Si $T_+ < \sup J$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow T_+} |x(t)|_E = +\infty.$$

Théorème A.2. *(Inégalité de Jensen) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $a < b$, $f \in C([0, 1],]a, b[)$ et $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe alors*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x)dx.$$

A.2 Existence et unicité des solutions de problèmes paraboliques

Les résultats suivants sont issus de [43] et concernent des problèmes paraboliques sous des conditions au bord de Dirichlet dans des domaines bornés.

Posons $D = \Omega \times (0, T)$ un cylindre borné de \mathbb{R}^{n+1} de frontière

$$\partial D = \partial\Omega \times [0, T] \cup (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\bar{\Omega} \times \{T\}) \text{ et } B = D \cap \{t = 0\}.$$

Considérons l'opérateur linéaire L défini par :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

Si la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive sur $\Omega \times (0, T)$; c'est à dire pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\xi \neq 0$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t) \xi_i \xi_j > 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T), \quad (\text{A.6})$$

alors on dit que l'équation (A.5) est de type parabolique sur $\Omega \times (0, T)$. Par ailleurs,

A.2 Existence et unicité des solutions de problèmes paraboliques

s'il existe des constantes positives Λ et λ tels que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad \xi_i \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.7})$$

alors on dit que (A.5) est uniformément parabolique sur $\Omega \times (0,T)$.

Considérons maintenant le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t) & \text{dans } D + B_T \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{sur } \bar{B} \\ u(x,t) = g(x,t) & \text{sur } S \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où f , g , φ sont des fonctions et L un opérateur parabolique.

On peut combiner les deux dernières équations de (A.8) en une seule condition

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{sur } \bar{B}.$$

Le problème (A.8) devient alors

$$\begin{cases} Lu(x,t) = f(x,t) & \text{dans } D + B_T & (2.12) \\ u = \psi & \text{sur } \bar{B} + S. & (2.20) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Énonçons les hypothèses suivantes :

(A) : Les coefficients de L sont localement Hölder continus (exposant α) dans D

et

$$|a_{ij}|_\alpha \leq k_1 \quad |db_i|_\alpha \leq k_1 \quad |d^2c|_\alpha \leq k_1$$

(\bar{A}) : Les coefficients de L sont uniformément Hölder continus (exposant α) dans

D et

$$|a_{ij}^-|_\alpha \leq \bar{k}_1 \quad |db_i^-|_\alpha \leq \bar{k}_1 \quad |d^2c^-|_\alpha \leq \bar{k}_1$$

A.3 Principe du maximum et de comparaison pour des équations paraboliques

(B) : Pour tout $(x, t) \in D$ et pour tout vecteur réel

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq k_2 |\xi|^2 \quad (k_2 > 0)$$

(\bar{C}) : f est uniformément Hölder continu (exposant α) dans D (i.e $|f|_\alpha < \infty$).

(\bar{E}) : On dit que D a les propriétés de \bar{E} si pour tout point Q de \bar{S} il existe un voisinage V tel que $V \cap \bar{S}$ peut être représenté pour tout i , ($1 \leq i \leq n$) de la forme

$$x_i = h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, t)$$

et h , $D_x h$, $D_x^2 h$, $D_t h$ sont Hölder continu (exposant α).

Théorème A.3. Si L satisfait les conditions (A) et (B) alors il existe au plus une solution du problème (A.8).

Théorème A.4. Soient les conditions (\bar{A}), (B) et (\bar{C}) satisfaites. Supposons que D a les propriétés de (\bar{E}), que $\psi \in \bar{C}^{2+\alpha}$ et que $L\psi = f$ sur ∂B , Alors il existe une unique solution u du problème (A.9) et par ailleurs $u \in \bar{C}^{2+\alpha}$.

A.3 Principe du maximum et de comparaison pour des équations paraboliques

Proposition A.1. Soit $u \in C^{2,1}(D) \cap C^{2,1}(\bar{D})$ telle que

$$\begin{cases} Lu \leq 0, & \text{dans } D & \text{(A.10)} \\ u \geq 0, & \text{sur } \partial D & \text{(A.11)} \\ u(x, 0) \geq 0, & \text{dans } B, & \text{(A.12)} \end{cases}$$

avec c une fonction continue sur D pour tout $t < T$. Alors on a

$$u \geq 0, \quad \text{dans } \bar{D}$$

A.3 Principe du maximum et de comparaison pour des équations paraboliques

par ailleurs $u > 0$, dans D .

Proposition A.2. Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^2 et $u, v \in C^{2,1}(D) \cap C^{2,1}(\bar{D})$ pour $T > 0$. Supposons que

$$Lv \leq Lu, \quad \text{dans } \bar{D} \tag{A.13}$$

$$u \geq v, \quad \text{sur } \partial D \tag{A.14}$$

$$u(x, 0) \geq v(x, 0), \quad \text{dans } B, \tag{A.15}$$

alors on a $u \geq v$, dans D .

Bibliographie

- [1] L. M. Abia, J. C. López-Marcos and J. martínez, *The Euler method in the numerical integration of reaction-diffusion problems with blow-up*, Appl. Numer. Math. 38, 287-313, (2001).
- [2] L. M. Abia, J. C. López-Marcos and J. martínez, *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. math., **26** (1998), 399-414.
- [3] L. Abia, J. C. López-Marcos and J. martínez, *Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Appl. Numer. math., **20** (1996), 145-156.
- [4] A. ACKER AND W. WALTER, *The quenching problem for nonlinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., vol.564, Springer-Verlag, New York, (1976).
- [5] A. Acker and B. Kawohl, *Remarks on quenching*, Nonlinear Analysis, theory, Methods and Applications, Vol. 13. No.1. PP. 53-61. 1989
- [6] G. Acosta, J. Fernandez Bonder, P. Groisman and J. D. Rossi, *Simultaneous vs. non-simultaneous blow-up in numerical approximations of a parabolic system with non-linear boundary conditions*, M2AN, vol. 36, no. 1, pp. 55-68, 2002.
- [7] G. Acosta, J. Fernandez Bonder, P. Groisman and J. D. Rossi, *Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition in several space dimensions*, Disc. Cont. Dyn. Syst., **2** (2002), 279-294.
- [8] G. Acosta, R. Duran and J. D. Rossi, *An adaptative time step procedure for a parabolic problem with blow-up*, Computing, **68** (2002), 343-373.

BIBLIOGRAPHIE

- [9] K. A. Adou, K. A. Touré and A. Coulibaly, *Numerical study of estimating the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations*, Far East Journal of Applied Mathematics (FJAM), 100, 4, 291-308, (2018).
- [10] K. A. Adou, K. A. Touré and A. Coulibaly, *On the computation of the numerical blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation*, International Journal of Numerical Methods and Applications, 18, 1 :7-18, (2019).
- [11] K. A. Adou, K. A. Touré and A. Coulibaly, *On the numerical quenching time at blow-up*, Advances in Mathematics : Scientifis Journal (AMSJ), 8, 2, 71-85, (2019).
- [12] H. AMANN, *Existence and regularity for semilinear parabolic evolution equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 11 (4), 593-696, (1984).
- [13] L. A. Assalé, T. K. Boni and D. Nabongo, *Numerical blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Hindawi Publishing Corporation, vol. 2008.
- [14] J. Bebernes and D. Eberly, *Characterization of blow-up for a semilinear heat equation with a convection term*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 42, 447-456, (1989).
- [15] M. Berger and R. V. Kohn, *A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing up solutions*, Comm. Pure Appl. Math., 41 (1998), 841-863.
- [16] T. K. Boni, *Extinction for discretizations of some semilinear parabolic equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., 333 (2001), 75-80.
- [17] T. K. Boni, *Sur l'explosion et le comportement asymptotique de la solution d'une équation parabolique semi-linéaire du second ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., 326 (1998), 317-414.

BIBLIOGRAPHIE

- [18] T. K. Boni, *On blow-up and asymptotic behavior of solutions to a nonlinear parabolic equation of second order with nonlinear boundary conditions*, Comment. Math. Univ. Comenian., **40** (1999), 457-475.
- [19] C. Brandle and H. Brunner, *Blow-up in diffusion equations : a survey*, J. Comput. Appl. Math., **97** (1998), 3-32.
- [20] C. Brandle, P. Groisman and J. D. Rossi, *Fully discrete adaptive methods for a blow-up problem*, Math. Models Methods Appl. Sci., **14** (2004), 1425-1450.
- [21] C. Brandle, F. Quiros and J. D. Rossi, *An adaptive numerical method to handle blow-up in a parabolic system*, Numerische Mathematik, **102** (2005), 39-59.
- [22] C. J. Budd, W. Huang and R. Russel, *Moving mesh methods for problems with blow-up*, SIAM J. Sci. Comput., **17** (1996), 305-327.
- [23] Y. G. Chen, *Asymptotic behaviours of blowing up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, Math., **33** (1986), 541-574.
- [24] M. Chipot and F.B. Weissler, *Some blow-up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term*, SIAM J. MATH. ANAL., **20**, **4**, 886-907, (1989).
- [25] M. Chipot, M. Fila and P. Quittner, *Stationary solutions, blow-up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, Acta Math. Univ. Comenianae., **1** (1991), 35-103.
- [26] C. H. Cho, *On the computation of the numerical blow-up time*. Japan. J. Indust. Appl. Math. **30**, 331-349 (2013).
- [27] C. H. Cho, S. Hamada, and H. Okamoto, *On the finite difference approximation for a parabolic blow-up problem.*, Japan J. Ind. Appl. Math. **24**(2), 131-160, (2007).
- [28] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod (1998).

BIBLIOGRAPHIE

- [29] A. De Pablo, *An introduction to the problem of blow-up for semilinear and quasilinear parabolic equations*, MAT-Serie A : Conferencias seminarios y trabajos de matematica, 12, (2006), DOI : 10.26422/MAT.A.2006.12.dep
- [30] A. De Pablo, *Critical coefficients in blow-up problems*, Dynamic Systems and Applications, 18, 81-102, (2009).
- [31] A. De Pablo, M. LLanos and R. Ferreira, *Numerical blow-up for p -Laplacian equation with a nonlinear source*, Proceedings of Equat. diff., **11** (2005), 363-367.
- [32] K. Deng, *Dynamical behavior of solutions of a semilinear heat equation with nonlocal singularity* SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 26, No. 1, pp. 98-111, January 1995.
- [33] K. Deng and H. A. Levine, *On the blow-up of u_t at quenching*, proceedings of the american mathematical society, 106, 4, (1989).
- [34] R. G. Duran, J. I. Etcheverry and J. D. Rossi, *Numerical approximations of a parabolic problem with nonlinear boundary conditions*, Discrete contin. Dynam. Systems, 4 (1998), 497-506.
- [35] K. B. Edja, K. A. Touré and B. J-C. Koua, *Numerical Blow-up for A Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions*, Journal of Mathematics Research, **10**, (2018).
- [36] C. M. Elliot and A. M. Stuart, *Global dynamics of discrete semilinear parabolic equations*, SIAM. J. Numer. Anal., **30** (1993), 1622-1663.
- [37] J. Fernandez Bonder and J. D. Rossi, *Blow-up vs. spurious steady solutions*, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2001), 139-144.
- [38] J. Fernandez Bonder, P. Groisman and J. D. Rossi, *On numerical blow-up sets*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 2049-2055.
- [39] R. Ferreira, P. Groisman and J. D. Rossi, *Numerical blow-up for the porous medium equation with a source*, Numer. Methods PDE, **20** (2004), 552-575.

BIBLIOGRAPHIE

- [40] R. Ferreira, P. Groisman, F. Quiros and J. D. Rossi, *Adaptive numerical schemes for a parabolic problem with blow-up*, IMA. J. Numer. Anal., **23** (2003), 439-463.
- [41] A. Friedman, and Y. Giga, *A single point blow-up for solutions of semilinear parabolic systems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo ; Sec IA, Math., 34, 65-79, (1987).
- [42] A. Friedman, and B. Mcleod, *Blow-up of Positive Solutions of Semilinear Heat Equations*, Indiana Univ. Math. J., 34, 425-447, (1985).
- [43] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1964).
- [44] H. Fujita, *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math., **16**, 105-113, (1966).
- [45] V. Galaktionov and J. L. Vasquez, *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equation*, current developments in PDE, (Temuco, 1999), Discrete Contin. Dyn. Syst., **8** (2002), 399-433.
- [46] P. Groisman, *Totally discrete explicit and semi-implicit Euler methods for a blow-up problem in several space dimension*, Computing, **76** (2006), 325-352.
- [47] P. Groisman and J. D. Rossi, *Dependance of the blow-up time with respect to parameters and numerical approximations for a parabolic problem*, Asympt. Anal., **37** (2004), 79-91.
- [48] P. Groisman and J. D. Rossi, *Asymptotic behaviour of a numerical approximation for a parabolic problem with blowing-up solutions*, J. Comput. Appl. Math., **135** (2001), 135-155.
- [49] P. Groisman, H. Zaag and J. D. Rossi, *On the dependence of the blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem*, Comm. PDE., **28** (2003), 737-744.

BIBLIOGRAPHIE

- [50] P. Groisman, F. Quiros and J. D. Rossi, *Non-simultaneous blow-up in a numerical approximation of a parabolic system*, *Comput. Appl. Math.*, **21** (2002), 813-831.
- [51] J. S. Guo, *On the Quenching Behavior of the Solution of a Semilinear Parabolic Equation*, *Journal of mathematical analysis and applications*, **151**, 58-79, (1990).
- [52] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems.*, 2nd edition, Springer series in computational mathematics, Springer-verlag, (1993).
- [53] C. Hirota, and K. Ozawa, *Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations-An application to the blow-up problems of partial differential equations*,
- [54] B. Hu, *Blow-up theories for semilinear parabolic equations*, *Lecture Notes in Mathematics 2018*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, DOI10.1007/978 – 3 – 642 – 18460 – 4 – 1
- [55] B. Kawohl and L. Peletier, *Observations on blow-up and dead cores for nonlinear parabolic equations*, *Math. Zeitschr.* **202**, 207-217, (1989).
- [56] H. Kawarada, *On solutions of initial-boundary problem for $u_t = u_{xx} + l/(1-u)$* , *Publins RIMS Kyoto Univ.*, **10**, 729-736, (1975).
- [57] H. B. Keller and D. S. Cohen, *Some positive problems suggested by nonlinear heat generation*, *J. Math. Mech*, **16**, 1361-1376, (1967).
- [58] A. A. Lacey, *Mathematical analysis of thermal runaway for spatially inhomogeneous reactions*, *Siam J. Appl. Math.*, **43**,(6) 1350-1366, (1983).
- [59] G.M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, Singapore, (1996).

BIBLIOGRAPHIE

- [60] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* American Mathematical Society, Providence, RI, (1968)
- [61] M. N. Le Roux, *Semidiscretization in time of nonlinear parabolic equations with blow-up solution*, SIAM. J. Numer. Anal., **31** (1994), 170-195.
- [62] M. N. Le Roux, *Semidiscretization in time of a fast diffusion equations with blow-up solution*, J. Math. Anal. Appl., **137** (1989), 354-370.
- [63] H. A. Levine, *a phenomenon of quenching : a survey*, in Trends in the Theory and Practice of Non-linear Analysis (Edited by V. LAKSHMIKANTHAM),pp. 275-286. Elsevier S.-North Holland, Amsterdam (1985).
- [64] H. A. Levine , *Quenching, nonquenching and beyond quenching for solution of some semilinear parabolic equations*,Annali Math. Pura Appl., **155**, 243-260, (1990).
- [65] H.A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = \Delta u + F(u)$* , Arch. Rational Mech. Anal. 51, 371-386, (1973).
- [66] H.A. Levine, P. Sacks *Some existence and nonexistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations*, J. Diferential Equations 52, 135-161, (1984).
- [67] H. A. Levine and J.T.Montgomery, *The quenching of solutions of some nonlinear parabolic equations*, Siam I. Math. Anal., 11(5), 842-847, (1980).
- [68] A. R. Maan, *On Blow-up Solutions of Parabolic Problems*, PhD thesis, University of Sussex Brighton England UK, November 2012.
- [69] S. Kaplan *The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math.,**16**, (1963), 305-330.
- [70] S. Masahiko . *The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations*, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 48-2, 339-361, (2008).

BIBLIOGRAPHIE

- [71] S. Moriguti, C. Okuno, R. Suekane, M. Iri, K. Takeuchi, *Ikiteiru Suugaku, Suuri Kougaku no Hatten (in Japanese)*, Baifukan, Tokyo, 1979.
- [72] D. Nabongo, K. N'Guessan and K. A. Touré, *Blow-up for discretizations of some Reaction-Diffusion Equations with a Nonlinear Convection Term*, international Journal of Applied Mathematics (IJAM), **29(5)**, 537-568, (2016).
- [73] D. Nabongo and T.K Boni, *Numerical quenching solutions of localized semilinear parabolic equation*, Appl. Math. Sci., **2** (2008), 1145-1160.
- [74] D. Nabongo and T. K. Boni, *Numerical blow-up and asymptotic behavior for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Albanian J. Math., **2** (2008), 111-124.
- [75] D. Nabongo and T. K. Boni, *Numerical blow-up of localized semilinear parabolic equation*, Appl. Math. Sci., **2** (2008), 1145-1160.
- [76] T. Nakagawa, *Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$* , Appl. Math. Optim., **2**, 337-350, (1976).
- [77] K. C. N'Dri, K. A. Touré and G. Yoro, *Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, International Journal of Numerical Methods and Applications, **17**, **3-4** 141-160, (2018).
- [78] K. N'Guessan, *Étude théorique et numérique de l'explosion des solutions de quelques équations aux dérivées partielles de type paraboliques*, thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique H-B de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire, (2017).
- [79] F. K. N'gohissé and T. K. Boni, *Numerical blow-up solution for some semilinear heat equation*, Elect. Trans. of Numer. Anal., **30** (2008), 247-257.
- [80] F. Quiros, P. Groisman and J. D. Rossi, *Non-simultaneous blow-up in a numerical approximation of a parabolic system*, Comput. Appl. Math., **21** (2002), 813-831.

BIBLIOGRAPHIE

- [81] P. Quittner and P. Souplet, *Superlinear parabolic problems blow-up, Global existence and steady states series : Birkhäuser Advanced texts*, Basler Lehrbuch, (2007), 813-831.
- [82] T. Salin, *On quenching with logarithmic singularity*, *Nonlinear Analysis TMA*, **52**, 261-289, (2003).
- [83] A. A. Samarski, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikailov, *Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations*, Nauka, Moscow, (1987) (in Russian). English trans. Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
- [84] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, 2nd ed. Springer-Verlag New York, (1983).
- [85] R. Siperly, *Maximum Principles and Their Applications*, Academic Press, New York, 1981.
- [86] M. M. Taha, K. A. Touré and E. P. Mensah, *Numerical approximation of the Blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, *Far East Journal of Mathematical Sciences(FJMS)*, **60**, 125-167, (2012).
- [87] T. K. Ushijima, *On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations*, *Publ. RIMS Inst. Math. Sci.*, **36**, 613-640, (2000).
- [88] J. Von BELOW and C. De COSTER, *A Qualitative Theory for Parabolic Problems under Dynamical Boundary Conditions*, *Journal of Inequalities and Applications*, **5**, 467-486, (2000)
- [89] F. B. Weissler, *Single point blow-up for a semilinear initial value problem*, *Journal of differential equations*, **55**, 204-224, (1984).
- [90] Yan Li, Ruofei Yao, Xin Tong, and Zhengce Zhang, *Gradient blowup rate for a heat equation with general gradient nonlinearity*, *Applicable Analysis*, DOI :10.1080/00036811.2015.1068296, (2015).



NUMERICAL STUDY OF ESTIMATING THE BLOW-UP TIME OF POSITIVE SOLUTIONS OF SEMILINEAR HEAT EQUATIONS

K. Achille Adou¹, K. Augustin Touré¹ and A. Coulibaly²

¹Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny
Yamoussoukro, BP 2444, Côte d'Ivoire

²Université Félix Houphouët-Boigny
BP 582, Abidjan 22, Côte d'Ivoire

Abstract

In this paper, we obtain under some conditions, convergence of the blow-up time T for semidiscretization of semilinear heat equation $u_t - u_{xx} = (u + \lambda)^p$ in $(-1, 1) \times (0, T)$, with boundary conditions $u(-1, t) = u(1, t) = 0$, $t > 0$, and initial condition $u(x, 0) = \phi(x)$, $-1 < x < 1$. Then we estimate the numerical blow-up time by applying an efficient numerical algorithm to the semidiscrete problem. Finally, some results are presented to illustrate our analysis.

1. Introduction

The blow-up phenomena arise in various fields of science, for example, combustion in chemistry, curvature flow in geometry and chemotaxis in biology and have deserved a great deal of attention in recent years, see, for

Received: August 4, 2018; Accepted: October 22, 2018

2010 Mathematics Subject Classification: 35B44, 35K05, 35K20, 35K58.

Keywords and phrases: blow-up time, Aitken Δ^2 method, semidiscretization, finite differences, arc length transformation.

example, [1-9]. There are many mathematical researches on the blow-up phenomena, including the condition for the solution to blow-up, the blow-up set and the blow-up rate. It is well known that for sufficiently large initial data, a solution of the problem below does blow-up in finite time, see, for instance, [9-12]. The convergence of the blow-up times of the semidiscretized equations to those of the parabolic equations is also established by [1, 2] and [13]. In this paper, we consider the initial-boundary value problem

$$u_t - u_{xx} = f(u) \text{ in } (-1, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(\pm 1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad -1 < x < 1, \quad (3)$$

where $f(u) = (u + \lambda)^p$ ($p > 1, \lambda \geq 0$). We assume throughout this paper that

$$\begin{aligned} \phi &\in C^1([-1, 1]), \quad \phi(-1) = \phi(1) = 0, \\ \phi(x) &\geq 0, \quad \phi'' + f(\phi) \geq 0 \text{ if } -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

The solution of (1)-(3) may only exist for a finite period of time, see [10]. The time T is the maximal existence time for the solution, which may be finite or infinite. If $T < \infty$, then u becomes unbounded in finite time and we say that it *blows up*. If $T = \infty$, then we say that the solution is *global*. The time T is called the *blow-up time* of the solution u . The problem (1)-(3) can be viewed as a heat conduction problem where u stands for the temperature, and the heat sources are prescribed on the boundaries. The theoretical study of blow-up of solutions for semilinear parabolic equations $u_t - u_{xx} = (u + \lambda)^p$ in the case where $\lambda = 0$ has been the subject of investigations of many authors, see [5, 9, 11, 14] and the references cited therein. As for numerical approach, some excellent schemes were invented, see [15-17]. Some authors have studied numerical blow-up time and its convergence. Nakagawa [5] studied a finite difference scheme for

$u_t = u_{xx} + u^2$ and proved the convergence of blow-up time. Nakagawa and Ushijima [17] studied a finite element full-discrete scheme for the semilinear heat equation of blow-up type based on a blow-up criterion due to Kaplan and Fujita. Chen [14] also studied a finite difference scheme for $u_t = u_{xx} + u^p$, $p > 1$ and proved the convergence of blow-up time. In the general case, where $\lambda \geq 0$, Friedman and McLeod [10] have proved that, under some assumptions, the blow-up occurs in finite time T and the blow-up set consists of the single point $x = 0$. Compared with the theoretical study, numerical analysis of the blow-up problem $u_t - u_{xx} = (u + \lambda)^p$, $\lambda \geq 0$ does not seem to be explored enough.

In the present work, we consider semidiscrete problem based on uniform discretization as in [2], but we are mainly concerned with estimating its blow-up time. The paper is organized as follows: in the next section, we give some properties concerning our semidiscrete scheme. Section 3 is consecrated to the study of the convergence of the semidiscrete blow-up time. In Section 4, we use an efficient algorithm to estimate the blow-up time and give some numerical results to illustrate our study.

2. Semidiscrete Problem

Let I be a positive integer. Then we set $h = \frac{2}{I + 1}$ and define the grid $x_i = ih - 1$ for $i = 0, \dots, I + 1$. Let δ^2 denote the standard second order difference operator. We approximate the solution u of the problem (1)-(3) by the solution $U_h(t) = (U_0(t), U_1(t), \dots, U_{I+1}(t))^T$ of the semidiscrete equations:

$$\frac{d}{dt} U_i(t) - \delta^2 U_i(t) = (U_i(t) + \lambda)^p \text{ on } [0, T], \quad 1 \leq i \leq I, \tag{5}$$

$$U_{I+1}(t) = U_0(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

$$U_i(0) = \phi_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I + 1, \tag{7}$$

where

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, I.$$

Definition 1. A function $V_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+2})$ is a *lower solution* of (5)-(7) if

$$\frac{d}{dt} V_i(t) - \delta^2 V_i(t) \leq f(V_i(t)), \quad 1 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T],$$

$$V_0(t) \leq 0, \quad t \in [0, T],$$

$$V_{I+1}(t) \leq 0, \quad t \in [0, T],$$

$$V_i(0) \leq \phi_i, \quad 0 \leq i \leq I + 1.$$

On the other hand, we say that $V_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+2})$ is an *upper solution* of (5)-(7) if these inequalities are reversed.

Lemma 2. Let $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ if $V_h, W_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+2})$ are such that

$$\frac{d}{dt} V_i - \delta^2 V_i - f(V_i) < \frac{d}{dt} W_i - \delta^2 W_i - f(W_i), \quad 1 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

$$V_0(t) < W_0(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

$$V_{I+1}(t) < W_{I+1}(t), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$V_i(0) < W_i(0), \quad 0 \leq i \leq I + 1. \quad (11)$$

Then

$$V_i(t) < W_i(t), \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

Proof. Let us define the vector $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$. Let t_0 be the first $t \in [0, T]$ such that $Z_i(t) > 0$ for $t \in (0, t_0)$, $0 \leq i \leq I + 1$, but $Z_{i_0}(t_0) = 0$ for a certain $i_0 \in \{0, \dots, I + 1\}$. It is obvious to see that if $i_0 = 0$, then $Z_0(t_0) = 0$; it is a contradiction because of (9).

If $i_0 = I + 1$, then $Z_{I+1}(t_0) = 0$; it is a contradiction because of (10).

If $i_0 \in \{1, \dots, I\}$, then we obtain

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - k)}{k} \leq 0,$$

$$\delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0$$

which implies that

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + f(W_{i_0}(t_0)) - f(V_{i_0}(t_0)) \leq 0.$$

But this inequality contradicts (8), and the proof is completed. \square

Remark 3. Similarly, it shows that if $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, and if $V_h, W_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+2})$ are such that

$$\frac{d}{dt} V_i - \delta^2 V_i - f(V_i) \leq \frac{d}{dt} W_i - \delta^2 W_i - f(W_i), \quad 1 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T],$$

$$V_0(t) \leq W_0(t), \quad t \in [0, T],$$

$$V_{I+1}(t) \leq W_{I+1}(t), \quad t \in [0, T],$$

$$V_i(0) \leq W_i(0), \quad 0 \leq i \leq I + 1,$$

then

$$V_i(t) \leq W_i(t), \quad t \in [0, T].$$

Lemma 4. Let U_h be the solution of (5)-(7). Then we have $U_i(t) > 0$, $1 \leq i \leq I$.

Proof. Let $\alpha = \min_{1 \leq i \leq I} \phi_i$ and introduce the vector V_h defined by

$$V_i = \alpha e^{-\lambda_h t} \sin\left(\frac{\pi}{2} i h\right), \quad 0 \leq i \leq I + 1, \quad \text{where } \lambda_h = \frac{2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} h\right)}{h^2}.$$

It is not hard to see that

$$\frac{dU_i}{dt} - \delta^2 U_i \geq \frac{dV_i}{dt} - \delta^2 V_i = 0, \quad 1 \leq i \leq I, \quad t \in [0, T],$$

$$U_0(t) = V_0(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$U_{I+1}(t) = V_{I+1}(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$U_i(0) \geq V_i(0), \quad 0 \leq i \leq I + 1.$$

We deduce from Remark 3 that $U_i(t) \geq \alpha e^{-\lambda ht} \cos\left(\frac{\pi}{2}(ih - 1)\right)$, $0 \leq i \leq I + 1$. This implies that $U_i(t) > 0$, $1 \leq i \leq I$. And the proof is completed. \square

The next theorem establishes that, for each fixed time interval $[0, T]$ where u is defined, the solution of semidiscrete problem approximates u , as $h \rightarrow 0$.

Theorem 5. *Assume:*

(i) *The reaction function $f \in C^1([0, \infty))$, and the problem (1)-(3) has a solution $u \in C^{4,1}([-1, 1] \times [0, T])$.*

(ii) *The initial condition ϕ_h at (7) satisfies:*

$$\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad h \rightarrow 0, \tag{13}$$

where $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_{I+1}))^T$, $t \in [0, T]$. Then, for h sufficiently small, problem (5)-(7) has a unique solution

$$U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+2})$$

such that

$$\max_{t \in [0, T]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2), \quad h \rightarrow 0. \tag{14}$$

Proof. Let $\alpha > 0$ be such that

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \alpha \text{ for } t \in [0, T]. \tag{15}$$

Then the problem (5)-(7) has for each h a unique solution $U_h \in C^1([0, T^h], \mathbb{R}^{I+2})$. Let $t(h) \leq \min\{T, T^h\}$ be the greatest value of $t > 0$ such that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty < 1 \text{ for } t \in (0, t(h)). \tag{16}$$

From (13), we have $t(h) > 0$, for h sufficiently small. By the triangle inequality, we obtain

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \text{ for } t \in (0, t(h))$$

which implies that

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq 1 + \alpha \text{ for } t \in (0, t(h)). \tag{17}$$

Let $e_h(t) = U_h(t) - u_h(t)$ be the discretization error. Using Taylor's expansion, we have for $t \in (0, t(h))$,

$$\begin{aligned} \frac{de_i(t)}{dt} &= \delta^2 e_i(t) + (\lambda + U_i(t))^p - (\lambda + u(x_i, t))^p \\ &\quad - \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta_i, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \right), \quad 1 < i \leq I, \end{aligned}$$

where γ_i and η_i are in $[-1, 1]$. We obtain, by using the mean value theorem,

$$\frac{d}{dt} e_i(t) - \delta^2 e_i(t) = ((\lambda + \theta_i(t))^p)' e_i(t) + o(h^2), \quad 1 \leq i \leq I, \tag{18}$$

where $\theta_i(t)$ is an intermediate value between $U_i(t)$ and $u(x_i, t)$. There exist two constants K and L such that

$$\frac{d}{dt} e_i(t) - \delta^2 e_i(t) \leq L |e_i(t)| + Kh^2, \quad 1 \leq i \leq I. \tag{19}$$

On the other hand, we consider the function $z_i(t)$ defined by $z(x, t) = e^{(M+1)t+Cx^2} (\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty + Qh^2)$, $0 \leq i \leq I + 1$, where M, C, Q are constants. By simple computation, we obtain

$$\begin{aligned} z_t(x, t) - z_{xx}(x, t) &= (M + 1 - 2C - 4C^2x^2)z(x, t), \\ z(-1, t) = z(1, t) &= e^{(M+1)t+C} (\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty + Qh^2), \\ z(x, 0) &= e^{Cx^2} (\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty + Qh^2). \end{aligned}$$

By a semidiscretization of the above problem, we may choose M, C, Q large enough so that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(x_i, t) - \delta^2 z(x_i, t) &> L|z(x_i, t)| + Kh^2, \quad 1 \leq i \leq I, \\ z(x_0, t) &> \frac{L}{h}|z(x_0, t)| + Kh^2, \\ z(x_{I+1}, t) &> \frac{L}{h}|z(x_{I+1}, t)| + Kh^2, \\ z(x_i, 0) &> e_i(0), \quad 0 \leq i \leq I + 1. \end{aligned}$$

It follows from Lemma 2 that

$$z(x_i, t) > e_i(t) \text{ for } t \in (0, t(h)), \quad 0 \leq i \leq I + 1. \tag{20}$$

By the same way, we also prove that

$$z(x_i, t) > -e_i(t) \text{ for } t \in (0, t(h)), \quad 0 \leq i \leq I + 1 \tag{21}$$

which implies that

$$z(x_i, t) > |e_i(t)| \text{ for } t \in (0, t(h)), \quad 0 \leq i \leq I + 1. \tag{22}$$

We deduce that

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq e^{(M+1)t+C} (\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty + Qh^2), \quad t \in (0, t(h)). \tag{23}$$

Now, we shall show that $t(h) = T$. Assume that $T > t(h)$. From (16), we obtain

$$1 = \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq e^{(M+1)t+C} (\|\phi_h - u_h(0)\|_\infty + Qh^2). \tag{24}$$

Since the term on the right hand side of the above inequality goes to zero as h tends to zero, we deduce that $1 \leq 0$, which is impossible. Consequently, $t(h) = T$, and the proof is completed. \square

3. Convergence of the Semidiscrete Blow-up Time

In this section, we prove the convergence of the semidiscrete blow-up time to one of the original problems when the mesh size goes to zero by using the proposed method in Theorem 1.1 of [13]. This proof follows in three steps:

Step 1 (Blow-up of u). For sufficiently large initial data, a solution of the problem (1)-(3) does blow-up in finite time, see, for instance, [10] which satisfies condition \mathbf{A}_0 of [13].

Step 2 (Blow-up of U_h and convergence of blow-up time). Let us define the energy I as follows:

$$I[u](t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx. \tag{25}$$

We can easily check that

$$\frac{d}{dt} I[u] = - \int_{-1}^1 u_t^2 dx \leq 0. \tag{26}$$

Therefore, I is monotone non-increasing function of t .

We define a functional J by

$$J[u](t) = \int_{-1}^1 (u(x, t) + \lambda)^2 dx. \tag{27}$$

For this J , we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= 2 \int_{-1}^1 (u + \lambda) u_t dx \\ &= 2 \left(\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) - \int_{-1}^1 u_x^2 dx + \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \right) \\ &= 2\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) - 4I[u] + \frac{2(p-1)}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx \\ &\geq 2\lambda(u_x(1) - u_x(-1)) - 4I[u_0] + \frac{2(p-1)}{p+1} \int_{-1}^1 (u + \lambda)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

By Jensen's inequality, we obtain $\frac{d}{dt} J \geq \alpha - 4I[u_0] + c(J[u])^{\frac{p+1}{2}}$, where $\alpha = 2\lambda(u_x(1) - u_x(-1))$ and $c > 0$.

It is clear that

$$\lim_{t \rightarrow T} J[u](t) = \infty,$$

since

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_2 = \infty \text{ (see Friedman and McLeod [10]).}$$

Now, we define functionals I_h and J_h as follows:

$$I_h[U_h](t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \sum_{i=0}^I (U_{i+1}(t) - U_i(t))^2 \right) - \frac{1}{p+1} \left(h \sum_{i=0}^I (U_i(t) + \lambda)^{p+1} \right)$$

and

$$J_h[U_h](t) = h \sum_{i=0}^I (U_i(t) + \lambda)^2.$$

It is not hard to see that

$$\frac{d}{dt} J_h[U_h] \geq \beta - 4I_h[U_h^0] + c_1(J_h[U_h])^{\frac{p+1}{2}},$$

where

$$\beta = -2\lambda \frac{U_I + U_1}{h}, \quad c_1 > 0,$$

since

$$\frac{d}{dt} I_h[U_h](t) = -h \sum_{i=0}^I (U_i)_t^2(t) \leq 0.$$

Setting $G(J_h) = \gamma + c_1 J_h^{\frac{p+1}{2}}$ with $\gamma = \beta - 4I_h[U_h^0]$, we obtain

$$\frac{d}{dt} J_h[U_h] \geq G(J_h).$$

Lemma 6. *Let $G : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be a functional such that $G(s) = \gamma + cs^{\frac{p+1}{2}}$ with $\gamma = -4I_h[U_h^0]$ and $c > 0$. Then G satisfies*

$$\begin{cases} G(s) > 0 \text{ for } s > R_0, \\ \int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty. \end{cases}$$

Proof. For any $\gamma \in \mathbb{R}$, there exists a number R_0 such that for any $s > R_0$, $G(s) > 0$.

Using the criteria for improper integrals, we obtain

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} < \infty \text{ for } p > 1$$

which satisfies the condition **A₁** of Theorem 1.1 of [13]. □

Step 3 (Convergence of J_h). From Theorem 5 and continuity of J and J_h , we deduce that for any $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in |0, T-\varepsilon|} |J[u](t) - J_h[U_h](t)| = 0$$

which completes the three conditions of Theorem 1.1 of Ushijima [13]. Hence, we conclude that the approximate solution U_h of (5)-(7) blows up in finite time T_h for sufficiently small h and T_h converges to T as h tends to zero.

4. Numerical Experiments

In this section, we estimate the numerical blow-up time and present some numerical results to the blow-up time of (1)-(3) with initial condition $\phi(x) = 20 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ by the proposed method in [16]. Indeed, Hirota and Ozawa [16] gave an efficient numerical algorithm for estimating the blow-up time of the solution of partial differential equation, when the solution blows up in a finite time. The main idea of this method is to transform the ODE into a tractable form by the arc length transformation technique and to generate a linearly convergent sequence to the blow-up time. The sequence is then accelerated by the Aitken Δ^2 method. The present method is applied to the blow-up problems of partial differential equations (PDEs) by discretizing the equations in space and integrating the resulting ODEs by an ODE solver, that is, the method of lines approach. Using the standard central difference approximation to (1)-(3), we have the system of ODEs:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (U_1 + \lambda)^p \\ (U_2 + \lambda)^p \\ \vdots \\ (U_{n-1} + \lambda)^p \\ (U_n + \lambda)^p \end{pmatrix}.$$

The original equation is transformed into a numerically tractable one, in which the independent variable is the arc length of the original equation and t is one of the dependent variables. We integrate the transformed equation and extract the linearly convergent sequence from the values of t . The sequence is accelerated by the Aitken Δ^2 method. By the Aitken Δ^2

method, we estimate the numerical blow-up time T^n . T^n is the last value of the Aitken table, that is, the value in the last column and the last row in the table, when the mesh size is $h = \frac{2}{I+1}$. The parameters in the DOP54 (see [18]) are the same as those of Hirota and Ozawa [16]. To show that T^n converges actually to T , we varied I and λ . In Tables 1 to 4, in rows, we present the numerical blow-up times, values of I , the steps and the orders of the approximations corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512 and 1024. The order(s) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

Table 1. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations obtained for $p = 3$ and $\lambda = 0$

I	T^n	Steps	Order(s)
16	0.001267711674	1341	-
32	0.001260246033	1508	-
64	0.001258334883	1660	1.96
128	0.001257862868	1801	2.01
256	0.001257748493	1932	2.04
512	0.001257721049	2055	2.05
1024	0.001257714497	2246	2.06

Table 2. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations obtained for $p = 3$ and $\lambda = 1$

I	T^n	Steps	Order(s)
16	0.001148535158	1353	-
32	0.001142047661	1519	-
64	0.001140377521	1671	1.95
128	0.001139962440	1816	2.00
256	0.001139861195	1977	2.03
512	0.001139836737	2125	2.04
1024	0.001139830857	2386	2.05

Table 3. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations obtained for $p = 4$ and $\lambda = 0$

I	T^n	Steps	Order(s)
16	0.422159016560d-04	974	-
32	0.418207891506d-04	1125	-
64	0.417157996275d-04	1262	1.91
128	0.416887059791d-04	1388	1.95
256	0.416818277619d-04	1506	1.97
512	0.416800966535d-04	1615	1.99
1024	0.416796629020d-04	1718	1.99

Table 4. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations obtained for $p = 4$ and $\lambda = 1$

I	T^n	Steps	Order(s)
16	0.364436532555d-04	987	-
32	0.361186624263d-04	1138	-
64	0.360322470379d-04	1274	1.91
128	0.360099364229d-04	1400	1.95
256	0.360042701363d-04	1518	1.97
512	0.360028434712d-04	1627	1.98
1024	0.360024858580d-04	1732	1.99

Remark 7. The various tables (Tables 1 to 4) of our numerical results show that for p fixed, when λ increases, the blow-up time decays which means that when λ increases the blow-up of solution occurs quickly and is more accurate. On the other hand, one can observe the impact of the variation of p on the numerical blow-up time. (For $p = 3$, $T^n \simeq 0,0010$ and for $p = 4$, $T^n \simeq 0,00003$). In the following, we also give some plots to illustrate our analysis. In the figures following, we can see that the semidiscrete solution blows up in a finite time at a single point 0, which is in agreement with the results of Friedman and McLeod [10].

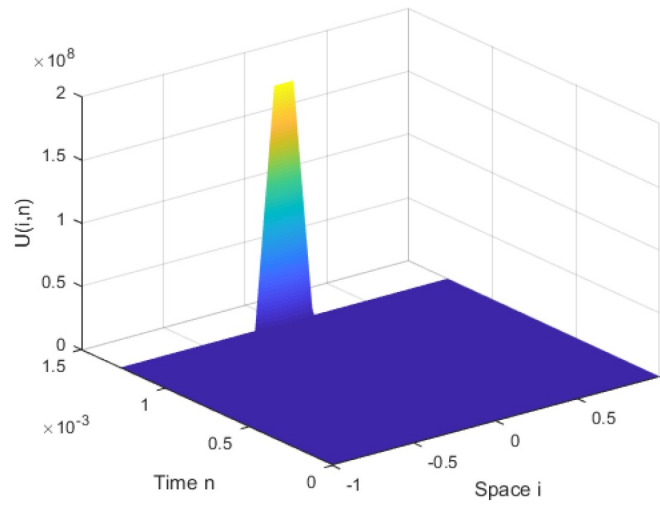


Figure 1. Evolution of the semidiscrete solution for $I = 16$, $p = 3$ and $\lambda = 0$.

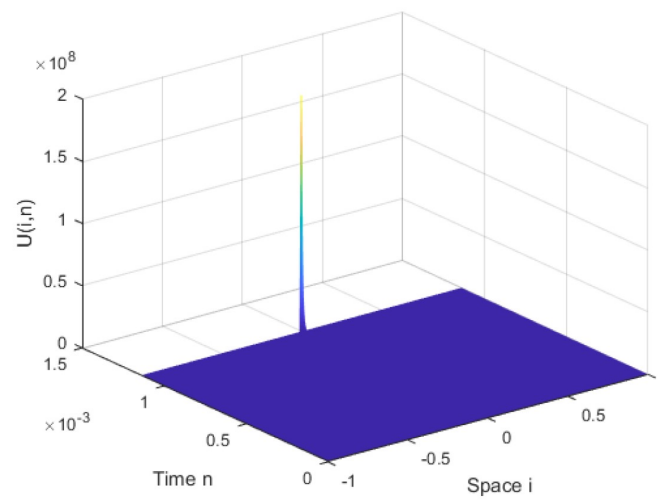


Figure 2. Evolution of the semidiscrete solution for $I = 256$, $p = 3$ and $\lambda = 1$.

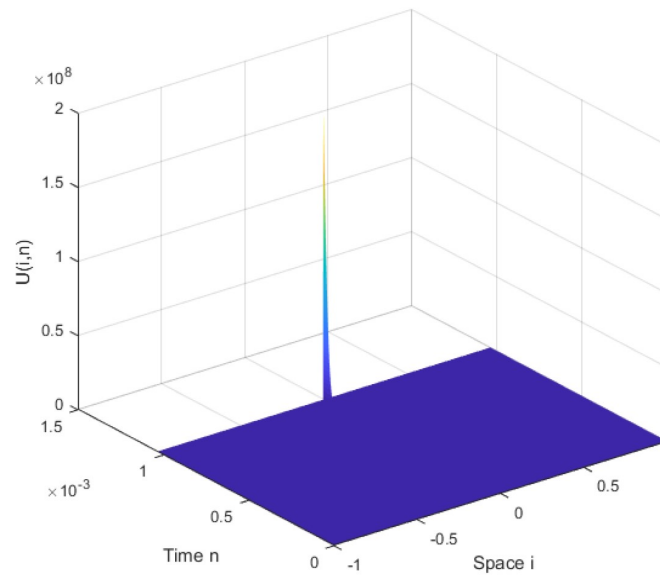


Figure 3. Evolution of the semidiscrete solution for $I = 1024$, $p = 3$ and $\lambda = 2$.

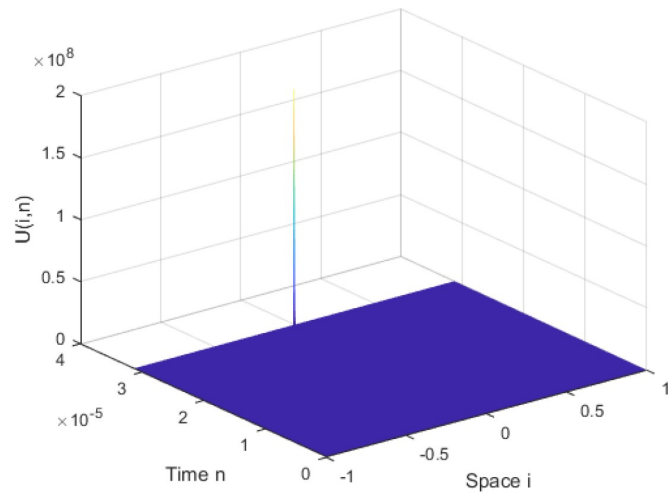


Figure 4. Evolution of the semidiscrete solution for $I = 512$, $p = 4$ and $\lambda = 2$.

References

- [1] L. M. Abia, J. C. López-Marcos and J. Martinez, On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations, *Appl. Numer. Math.* 26 (1998), 399-414.
- [2] L. M. Abia, J. C. López-Marcos and J. Martinez, Blow-up for semi-discretisations of reaction-diffusion equations, *Appl. Numer. Math.* 20 (1996), 145-156.
- [3] C. Bandle and H. Brunner, Blowup in diffusion equations: a survey, *J. Comput. Appl. Math.* 97 (1998), 3-22.
- [4] J. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [5] T. Nakagawa, Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$, *Appl. Math. Optim.* 2 (1976), 337-350.
- [6] K. Deng and H. Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel, *J. Math. Anal. Appl.* 243 (2000), 85-126.
- [7] K. N'Guessan, D. Nabongo and K. A. Touré, Blow-up for discretizations of some semilinear parabolic equations with a convection term, *Glob. J. Pure Appl. Math.* 12(4) (2016), 3367-3394.
- [8] A. A. Samarskii, V. Galaktionov, S. Kurdyumov and A. Mikhailov, Blow-up in quasilinear parabolic equations, *de Gruyter Expositions in Mathematics*, 19, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
- [9] J. J. L. Velazquez, Blow up for semilinear parabolic equations, *Recent Advances in Partial Differential Equations*, M. A. Herrero and E. Zuazua, eds., Masson, Paris, 1994, pp. 131-145.
- [10] A. Friedman and B. McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, *Indiana Univ. Math. J.* 34(2) (1985), 425-447.
- [11] F. B. Weissler, Single point blow-up for a semilinear initial value problem, *J. Differential Equations* 55 (1984), 204-224.
- [12] Taha M. Mathurin, Touré K. Augustin and Mensah E. Patrice, Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions, *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 60(2) (2012), 125-167.

- [13] T. K. Ushijima, On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations, *Publ. RIMS Inst. Math. Sci.* 36 (2000), 613-640.
- [14] Y. G. Chen, Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math.* 33 (1986), 541-574.
- [15] M. Berger and R. V. Kohn, A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions, *Commun. Pure Appl. Math.* 41 (1988), 841-863.
- [16] C. Hirota and K. Ozawa, Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations - an application to the blow-up problems of partial differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 193 (2006), 614-637.
- [17] T. Nakagawa and T. Ushijima, Finite element analysis of the semilinear heat equation of blow-up type, *Topics Numer. Anal.* 3 (1977), 275-291.
- [18] E. Hairer, S. Nørsett and G. Wanner, Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

K. Achille Adou: achilleadou@gmail.com



ON THE COMPUTATION OF THE NUMERICAL BLOW-UP TIME FOR SOLUTIONS OF SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION

Adou Koffi Achille¹, Touré Kidjégbo Augustin¹ and Coulibaly Adama²

¹Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny

BP 2444, Yamoussoukro, Côte D'Ivoire

e-mail: achilleadou@gmail.com

²Université Félix Houphouët-Boigny

BP 582, Abidjan 22, Côte D'Ivoire

Abstract

In this paper, we obtain an approximate blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation $u_t - u_{xx} = e^{\lambda u}$, ($\lambda > 0$) by using a fully discretized scheme in finite difference with uniform temporal grid size. We also show that the numerical blow-up time converges to the real one. Finally, we give some numerical experiments to illustrate our analysis.

1. Introduction

The evolution problems of parabolic type for which the phenomenon blows up in finite time have been thoroughly studied in these last years. Here we are in particular interested in computing the blow-up time T , ($T < \infty$). By blow-up in a finite time T , we mean that the solution $u = u(x, t)$ is regular

Received: February 1, 2019; Accepted: March 3, 2019

2010 Mathematics Subject Classification: 35B44, 35K58, 65N06.

Keywords and phrases: blow-up time, finite difference scheme, computation of numerical blow-up time, discrete solution, semilinear parabolic equation.

and bounded for $0 < t < T$, but becomes unbounded at $t = T$. A necessary and sufficient conditions to have blow-up has been studied in [2-5, 8-10, 12, 14, 15]. Some algorithms have been developed to compute the blow-up time numerically and then the authors showed that the numerical blow-up time is finite and converges to the real blow-up time, see for example [2, 6, 7, 11, 13]. The blow-up time can be computed explicitly for certain problems, but in many cases we can only know the existence of the time T . In this paper, we are concerned with a problem to compute an approximate blow-up time for the blow-up problem

$$u_t - u_{xx} = f(u) \text{ in } (-1, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(\pm 1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -1 < x < 1, \quad (3)$$

where $f(u) = e^{\lambda u}$, ($\lambda > 0$), $u_0(x) = \phi(x)$ and

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi(x) = \phi(-x), \quad \phi(1) = 0,$$

$$\phi(0) > 0, \quad \phi'(x) \leq 0 \text{ if } 0 < x < 1.$$

This equation appears, for example, as a model for combustion, in which the term $f(u)$ represents heating due to an exothermic reaction. The study of blow-up of solutions for semilinear parabolic equations has been the subject of investigations of many authors (see [9, 10, 13] and the references cited therein). In [9], the authors have proved that under some assumptions, the solution of problem (1)-(3) blows up in a finite and that the blow-up occurs in a single point. In the method proposed by Nakagawa [13] to compute the numerical blow-up time of these types of equations, the time mesh is defined adaptively. However this method may not work well when computing an approximate blow-up time since the numerical blow-up time is defined by an infinite sum, which requires us to determine when to stop the computation. However, there is not any simple strategy by which one can determine when to stop. In the present work, we are going to use another simple but effective method to compute an approximate blow-up time for our blow-up problem. Although the existing results suggest that adaptively-defined time meshes are

necessary for the approximation of blow-up problems, one reconsiders a scheme whose time mesh is given uniformly ($\Delta t_n = \tau$). For this given $\tau > 0$, we stop our computation at some step n_τ when the numerical solution attains certain largeness, and define $T(\tau) = \tau n_\tau$ to be the numerical blow-up time, see [6]. Then we show that our numerical blow-up time $T(\tau)$ actually converges to the real blow-up time T .

This paper is organized as follows: in the next section, we give some properties concerning our discrete problem. In Section 3, under some conditions, we prove that the solution of the discrete problem blows up in a finite time. In Section 4, we study the convergence of discrete blow-up time. Finally, in the last section, we give some numerical experiments.

2. Properties of the Discrete Problem

Let I be a positive integer, we set $h = \frac{2}{I}$ and define the grid $x_i = ih - 1$, for $i = 0, \dots, I$. Let δ^2 denote the standard second order difference operator. Also, we introduce the time steps $\Delta t_n = \tau$, (Δt_n is given uniformly) and the discrete time levels $t_0 = 0, t_{n+1} = t_n + \tau, n \geq 0$.

We refer to the grid point x_i by a subscript i and to the time level t_n by a superscript n . We denote by U_i^n the approximation to $u(x_i, t_n)$ obtained by means of the explicit Euler method

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \delta^2 U_i^n = e^{\lambda U_i^n}, \quad 1 \leq i \leq I - 1, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

$$U_0^n = U_I^n = 0, \quad n \geq 0, \quad (5)$$

$$U_i^0 = \phi_i, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (6)$$

where

$$\delta^2 U_i^n = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I - 1, \quad n \geq 0.$$

We set

$$U^n = [U_0^n, \dots, U_I^n]^T, \quad n \geq 0,$$

$$u^n = [u(x_0, t_n), \dots, u(x_I, t_n)]^T, \quad n \geq 0,$$

and for $V = [V_0, \dots, V_I]^T \in \mathbb{R}^{I+1}$, we define

$$\|V\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq I} |V_i|.$$

Let $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ be fixed and assume that $0 < \gamma \leq \frac{1}{3}$ for stability.

Definition 1. We say that the solution $\{U^n\}_{n \geq 0}$ of (4)-(6) with time steps $\{\Delta t_n\}_{n \geq 0}$ achieves blow-up in a finite time if

$$\|U^n\|_\infty < \infty \text{ for } n \geq 0,$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n\|_\infty = \infty$,
- $T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j < \infty$.

The value T_∞ is the numerical blow-up time of the solution U^n .

The next result is well-known by the specialists and establishes non-negativity for solutions of (4)-(6).

Proposition 2 [1]. *Let f be a nonnegative function and assume that the numerical initial condition ϕ given in (6) is nonnegative. If we consider time steps τ such that $0 < \tau \leq h^2/3$, then the solution $\{U^n\}_{n \geq 0}$ of (4)-(6) is nonnegative.*

Lemma 3. *Assume that the function f is nonnegative and non-decreasing and let $\{U^n\}_{n \geq 0}$ be the nonnegative solution of (4)-(6) with time steps τ such that $0 < \tau \leq h^2/3$. If the initial condition ϕ_i satisfies*

$$\phi_{I-i} = \phi_i, \quad 0 \leq i \leq I,$$

$$\phi_{i+1} > \phi_i > \phi_0 = 0, \quad 1 \leq i \leq \frac{I}{2} - 1,$$

then

$$U_{I-i}^n = U_i^n, \quad 0 \leq i \leq I,$$

$$U_{i+1}^n > U_i^n > U_0^n = 0, \quad 1 \leq i \leq \frac{I}{2} - 1.$$

Proof. See [1, pp. 298-299]. \square

The following result is a discrete form of the maximum principle.

Lemma 4. Let a^n and V^n be two sequences with $n \geq 0$, $a_i^n \geq 0$ such that

$$\delta_t V_i^n - \delta^2 V_i^n + a_i^n V_i^n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq 0, \quad (7)$$

$$V_i^0 \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (8)$$

Then, we have

$$V_i^n \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad n \geq 0, \quad \text{when } \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{3}. \quad (9)$$

Proof. A straightforward computation yields

$$V_i^{n+1} \geq \frac{\tau}{h^2} (V_{i+1}^n + V_{i-1}^n) + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) V_i^n + \tau a_i^n V_i^n. \quad (10)$$

If $V^n \geq 0$, then using an argument of recursion, we easily see that $V^{n+1} \geq 0$, because $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{3}$ which implies $1 - \frac{2\tau}{h^2} \geq 0$. This ends the proof. \square

The following result establishes that the discrete solution preserves the shape.

3. Blow-up of Discrete Solution

Before studying the blow-up of U_i^n , we prove first that all the solutions of (4)-(6) converge to the corresponding solution of (1)-(3) as far as the smoothness of u is guaranteed.

Theorem 5. Let U_i^n be the solution of (4)-(6). Let T denote the blow-up time of the solution u of (1)-(3) and $T_0 < T$ be given. Then there exist constants C and h_0 , depending only on T_0 and u_0 , such that

$$\max_{1 \leq i \leq I-1} |U_i^n - u(x_i, t_n)| \leq Ch^2$$

holds as long as $t_n \leq T_0$ and $h \leq h_0$.

Proof. For a proof we refer the reader to [7, 13]. \square

Theorem 6. Assume that the initial function $u_0(x)$ is nonnegative and assume also that there exists a positive constant a such that

$$\frac{U_{i+1}^0 - 2U_i^0 + U_{i-1}^0}{h^2} + f(U_i^0) \geq af(U_i^0).$$

Then $U_i^n \geq 0$ and for all n, i ,

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + f(U_i^n) \geq af(U_i^n).$$

In particular, one has

$$\frac{\|U^{n+1}\|_\infty - \|U^n\|_\infty}{\tau} \geq af(\|U^n\|_\infty).$$

Proof. This proof is an adaption of standard strategies in [1]. By Proposition 2, we have $U_i^n \geq 0$.

Now we define the functions V^n and J^n by

$$V_i^n = \frac{d}{dt} U_i^n, \quad J_i^n = V_i^n - af(U_i^n), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad n \geq 0.$$

Our aim is to show that

$$\frac{d}{dt} J_i^n - \delta^2 J_i^n - f'(U_i^n) J_i^n \geq 0, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad n \geq 0, \quad (11)$$

$$J_i^0 \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (12)$$

then, by Lemma 4 we have $J^n \geq 0$, since by the hypothesis we have $J_i^0 \geq 0$, $0 \leq i \leq I$, (note that for $i = 0$ and $i = I$ the result is immediate). By means of the definition of V^n and J^n , and by (4), we have that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_i^n &= \delta^2 V_i^n + f'(U_i^n) J_i^n + af'(U_i^n) f(U_i^n) - af'(U_i^n) J_i^n \\ &\quad - a^2 f'(U_i^n) f(U_i^n), \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Observe that

$$\delta^2 J_i^n = \delta^2 V_i^n - a \delta^2 f(U_i^n), \quad (14)$$

and using Taylor expansions, and the convexity of function f ($f'' \geq 0$), we arrive at

$$\delta^2 f(U_i^n) \geq f'(U_i^n) \delta^2 U_i^n, \quad (15)$$

and by observing that

$$\delta^2 U_i^n = J_i^n + af(U_i^n) - f(U_i^n), \quad (16)$$

and by replacing (16) in (15), we have

$$\delta^2 f(U_i^n) \geq f'(U_i^n) J_i^n + af'(U_i^n) f(U_i^n) - f'(U_i^n) f(U_i^n), \quad (17)$$

then by replacing (17) in (14), we obtain

$$\delta^2 J_i^n \leq \delta^2 V_i^n - af'(U_i^n) J_i^n - a^2 f'(U_i^n) f(U_i^n) + af'(U_i^n) f(U_i^n). \quad (18)$$

Taking the expression of $\delta^2 V_i^n$ and by replacing it in (18), finally we obtain

$$\frac{d}{dt} J_i^n - \delta^2 J_i^n - f'(U_i^n) J_i^n \geq 0,$$

which implies by applying Lemma 4 that $J^n \geq 0$. Then

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + f(U_i) \geq af(U_i^n).$$

Therefore from above and Lemma 3, it is not difficult to see that

$$\frac{\|U^{n+1}\|_\infty - \|U^n\|_\infty}{\tau} \geq af(\|U^n\|_\infty).$$

The proof is complete. \square

Now given a monotone increasing function H satisfying that $H(s) > 0$ for all $s > 0$ and that $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty$. By Theorem 6, one has $\|U^n\|_\infty \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, for a given $\tau > 0$, there exists a positive integer $n_{\tau(\infty)}$ such that

$$\tau H(\|U_{\tau(\infty)-1}^n\|_\infty) < 1 \text{ and } \tau H(\|U_{\tau(\infty)}^n\|_\infty) \geq 1.$$

4. Convergence of the Blow-up Time

In this section we define the numerical blow-up time and we establish the convergence of this time of the approximate discrete solution to the blow-up time of the theoretical solution.

Definition 7. We define the numerical blow-up time by

$$T_\infty(\tau, h) = \tau n_{\tau(\infty)}.$$

Theorem 8. Let T denote the blow-up time of the solution u of (1)-(3). Assume that the function H satisfies

$$\tau \ln f\left(H^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right) \rightarrow 0 \text{ as } \tau \rightarrow 0.$$

Then $T_\infty(\tau, h) \rightarrow T$ as $\tau \rightarrow 0$.

Proof. We refer the reader to [6]. \square

Remark 9. By Theorem 8, one can see that our numerical blow-up time $T_\infty(\tau, h)$ converges to the real one for many functions $H(s)$, for example $H(s) = s^m$, ($m > 0$), ($s > 0$). It has been shown that different choices of the function H can give different numerical blow-up times. In this case,

assuming that $H_1(s) \leq H_2(s)$, ($s > 0$) and letting $T_\infty^-(\tau, h)$ and $T_\infty^*(\tau, h)$ be the corresponding numerical blow-up times, then we have $T_\infty^-(\tau, h) \geq T_\infty^*(\tau, h)$. We also obtain that if H satisfies some additional assumptions then $T_\infty(\tau, h) \leq T$ or $T_\infty(\tau, h) > T$, (see [6]).

5. Numerical Experiments

In this section, we estimate the numerical blow-up time $T_\infty(\tau, h)$. The main idea is to reconsider a scheme whose time mesh is given uniformly $\Delta t_n = \tau$. For this given $\tau > 0$, we stop our computation at some step n_τ when the numerical solution attains certain largeness, then the numerical blow-up time is obtained by $T_\infty(\tau, h) = \tau n_{\tau(\infty)}$. Now we consider the explicit scheme of our problem (1)-(3),

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} - \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} = e^{\lambda U_i^n}, \quad 1 \leq i \leq I - 1, \quad n \geq 0,$$

$$U_0^n = 0, \quad n \geq 0,$$

$$U_I^n = 0, \quad n \geq 0,$$

$$U_i^0 = \phi_i, \quad 0 \leq i \leq I,$$

with $\lambda > 0$, $\phi(x) = \log(2e^{1-x^2} - 1)$ and different values of τ , We stop the computation when $\tau H(\|U^n\|_\infty) > 1$.

In what follows, in the tables in rows, we present the numerical blow-up times, values of I and the steps corresponding to meshes of 64, 128, 256 and 512 as well as the orders. Finally, we give some plots (Figures 1 and 2) to illustrate our analysis.

The order (s) of the method is computed from

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h})/(T_{2h} - T_h))}{\log(2)}.$$

Table 1. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations for $H(s) = s^{1/100}$, $\tau = 0.01/I^2$ and $\lambda = 2$

I	$T_\infty(\tau, h)$	$Steps$	$Order (s)$
32	0.029013	2971	-
64	0.028981	11871	-
128	0.028972	47469	1.79
256	0.028970	189859	1.81
512	0.028969	759417	1.83

Table 2. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations for $H(s) = s^{1/100}$, $\tau = 0.001/I^2$ and $\lambda = 3$

I	$T_\infty(\tau, h)$	$Steps$	$Order (s)$
32	0.0039316	4026	-
64	0.0039277	16088	-
128	0.0039266	64335	1.91
256	0.0039264	257323	1.99
512	0.0039263	1029275	2.00

Table 3. Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations for $H(s) = s^{5/1000}$, $\tau = 0.001/I^2$ and $\lambda = 3$

I	$T_\infty(\tau, h)$	$Steps$	$Order (s)$
32	0.0039316	4026	-
64	0.0039277	16088	-
128	0.0039266	64335	1.91
256	0.0039264	257323	1.99
512	0.0039263	1029275	2.00

Remark 10. From the above tables, we can assure the convergence of $T_\infty(\tau, h)$ to the blow-up time of the solution of (1)-(3) since the rate of convergence is 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space. We can observe that when λ increases, numerical blow-up time decreases. In particular from Tables 2 and 3 we observe the same results for different values of H . The below Figures show that the solution blows up at the single point $x = 0$.

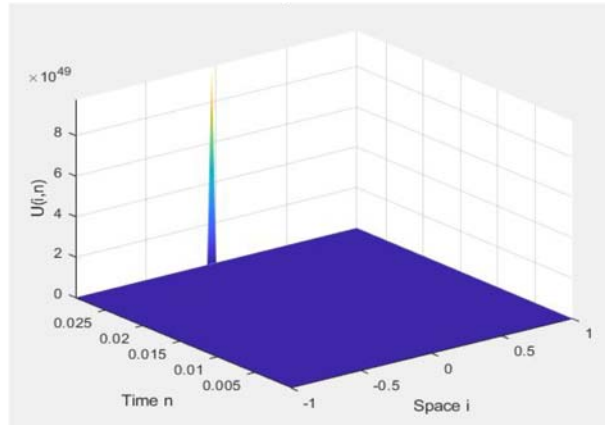


Figure 1. Evolution of the discrete solution, for $I = 64$, $H(s) = s^{1/100}$, $\tau = 0.01/I^2$ and $\lambda = 2$.

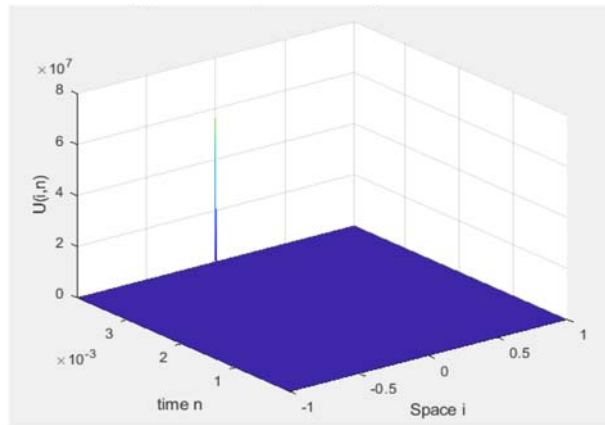


Figure 2. Evolution of the discrete solution, for $I = 256$, $H(s) = s^{5/1000}$, $\tau = 0.001/I^2$ and $\lambda = 3$.

References

- [1] L. M. Abia, J. C. López-Marcos and J. Martínez, The Euler method in the numerical integration of reaction-diffusion problems with blow-up, *Appl. Numer. Math.* 38(3) (2001), 287-313.
- [2] K. A. Adou, K. A. Touré and A. Coulibaly, Numerical study of estimating the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations, *Far East J. Appl. Math.* 100(4) (2018), 291-308.

- [3] Arturo De Pablo, Critical coefficients in blow-up problems, *Dynamic Systems and Applications* 18 (2009), 81-102.
- [4] H. Bandle and C. Brunner, Blow-up in diffusion equations: a survey, *J. Comp. Appl. Math.* 97 (1998), 3-22.
- [5] Y. G. Chen, Asymptotic behaviors of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{l+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo; Sec IA, Math.* 33 (1986), 541-574.
- [6] C.-H. Cho, On the computation of the numerical blow-up time, *Japan. J. Indust. Appl. Math.* 30 (2013), 331-349.
- [7] C. H. Cho, S. Hamada and H. Okamoto, On the finite difference approximation for a parabolic blow-up problem, *Japan J. Ind. Appl. Math.* 24(2) (2007), 131-160.
- [8] K. B. Edja, K. A. Touré and B. J.-C. Koua, Numerical blow-up for a heat equation with nonlinear boundary conditions, *J. Math. Research* 10(5) (2018), 119-128.
- [9] A. Friedman and Y. Giga, A single point blow-up for solutions of semilinear parabolic systems, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo; Sec IA, Math.* 34 (1987), 65-79.
- [10] A. Friedman and B. McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, *Indiana Univ. Math. J.* 34 (1985), 425-447.
- [11] C. Hirota and K. Ozawa, Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations - an application to the blow-up problems of partial differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 193 (2006), 614-637.
- [12] Masahiko Shimojō, The global profile of blow-up at space infinity in semilinear heat equations, *J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)* 48(2) (2008), 339-361.
- [13] T. Nakagawa, Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$, *Appl. Math. Optim.* 2 (1976), 337-350.
- [14] N'dri K. Cyrille, T. K. Augustin and Y. Gozo, Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions, *Inter. J. Numer. Meth. Appl.* 17(3-4) (2018), 141-160.
- [15] T. M. Mathurin, T. K. Augustin and M. E. Patrice, Numerical approximation of the blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions, *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 60(2) (2012), 125-167.

ON THE NUMERICAL QUENCHING TIME AT BLOW-UPKOFFI ACHILLE ADOU ¹, KIDJÉGBO AUGUSTIN TOURÉ, AND ADAMA COULIBALY

ABSTRACT. This paper deals with the study of the numerical approximation for the following boundary value

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + \varepsilon(1-v)^{-\beta}, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v(\pm 1, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) > 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^N , $\beta > 0$, and $\varepsilon > 0$. By a transformation, we obtain some conditions under which the solution v_t of the above problem blows up in finite time and estimate its semidiscrete blow-up time. We also establish the convergence of the semidiscrete blow-up time to the real one when the mesh size goes to zero. Finally, we give some numerical experiments to illustrate our analysis.

1. INTRODUCTION

Consider the problem

$$(1.1) \quad \begin{aligned} v_t - v_{xx} &= f(v) & \text{in } (-1, 1) \times (0, T), \\ v(\pm 1, t) &= 0 & \text{if } t \geq 0, \\ v(x, t) &= v_0(x) & \text{for } |x| \leq 1, \end{aligned}$$

¹corresponding author

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35B44; 35K58; 65N06.

Key words and phrases. Blow-up time, quenching problem, finite difference scheme, numerical blow-up time, semidiscrete scheme.

where $f(v) = \frac{\varepsilon}{(1-v)^\beta}$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq v_0 < 1$, and $v_0(\pm 1) = 0$. This type of reaction diffusion equation with a singular reaction term arises in connection with the diffusion equation generated by a polarization phenomena in ionic conductors, see [16, 25]. The problem can also be considered as a limiting case of models in chemical catalyst kinetics (Langmuir-Hinshelwood model) or of models in enzyme kinetics, see [22, 5]. The problem (1.1) has been extensively studied under assumptions implying that the solution $v(x, t)$ approaches one in finite time. The reaction term then tends to infinity and the smooth solution ceases to exist. This phenomenon is called quenching. For more general problems of parabolic type, some results were obtained by several authors, see [1, 16, 11, 10, 9, 12, 13, 3, 15, 14, 7]. There is also a large number of partial differential equations of parabolic type whose solution for a given initial data tends to infinity in finite time T . Such a phenomenon is called blow-up and T is called the blow-up time. Blow-up is known to occur in various equations including those in combustion theory, chemotaxis models and equations describing crystalline formation involving curvature-driven motion, see [21, 2, 4, 23, 27, 26, 24]. The study of blow-up phenomena is not only interesting from the mathematical point of view but also important for deep understanding of the nature of the phenomena which those equations describe. Throughout this paper we assume that v quenches at finite time T , and that v_0 is smooth and satisfies

$$v_0'' + \frac{\varepsilon}{(1-v_0)^\beta} \geq 0,$$

i.e., $v_t \geq 0$ at $t = 0$, where v_0'' is the second derivative of v_0 with respect to x . By means of transformation $u = \frac{1}{(1-v)}$, the differential equation in (1.1) becomes:

$$(1.2) \quad u_t - u_{xx} = -\frac{2u_x^2}{u} + \varepsilon u^{2+\beta} \quad \text{in } (-1, 1) \times (0, T),$$

$$(1.3) \quad u(\pm 1, t) = 1 \quad \text{if } t \geq 0,$$

$$(1.4) \quad u(x, t) = u_0(x) \quad \text{for } |x| \leq 1,$$

where $u_0(x) = \frac{1}{1-v_0(x)} \geq 1$.

Blow-up of solutions of this problem is equivalent to the quenching of solutions of 1.1 see([11, 1, 16, 17]). In [11], J.S. Guo has shown that

the solution u of problem (1.2-1.4) blows up in finite time T , and that $u \leq B(T-t)^{-\gamma}$, $0 \leq t < T$, for some positive constant B and $\gamma = \frac{1}{\beta+1}$, but Compared with the theoretical study, numerical analysis of the blow-up problem (1.2-1.4) does not seem to be explored enough. In the present work, we consider semidiscrete problem based on uniform discretization as in [6, 20, 12], but we are mainly concerned with its estimating the blow-up time.

Let I be a positive integer, we set $h = \frac{2}{I}$ and define the grid $x_i = ih - 1$, for $i = 0, \dots, I$. Let δ^2 denote the standard second order difference operator. We approximate the solution u of the problem (1.2-1.4) by the solution $U_h(t) = (U_0(t), U_2(t), \dots, U_I(t))^T$ of the semidiscrete equations :

$$(1.5) \quad \frac{d}{dt}U_i(t) = \delta^2 U_i(t) - 2 \frac{(\delta^0 U_i(t))^2}{U_i(t)} + \varepsilon U_i^{\beta+2}(t),$$

$$1 \leq i \leq I-1, t \geq 0,$$

$$(1.6) \quad U_0(t) = U_I(t) = 1, \quad t \geq 0,$$

$$(1.7) \quad U_i^0 = \varphi_i \geq 1, \quad 0 \leq i \leq I,$$

where:

$$\delta^2 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1, t \geq 0,$$

$$\delta^0 U_i(t) = \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h}, \quad 1 \leq i \leq I-1, t \geq 0,$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_I = 1, \quad \varphi_i = \varphi_{I-1}, \quad 0 \leq i \leq I, \quad \delta^+ \varphi_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h},$$

$$\delta^+ \varphi_i > 0, \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

and k is the integer part of number $I/2$.

Our paper is written in the following manner. In the next section, we give some properties concerning our semidiscrete scheme. Section 3 is consecrated to the study of the convergence of the semidiscrete blow-up time. In Section 4, we use an efficient algorithm to estimate the blow-up time and give some numerical results to illustrate our analysis.

2. PROPERTIES OF THE SEMIDISCRETE SCHEME

In this section, we give some lemmas which will be used later. The following lemma is a semidiscrete form of the maximum principle.

Lemma 2.1. *Let $a_h(t), b_h(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ and let $V_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ where $b_h(t)\delta^0 V_h(t) \leq 0$, such that for all $0 \leq i \leq I$,*

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V_i(t) - \delta^2 V_i(t) + b_i(t)\delta^0 V_i(t) + a_i(t)V_i(t) &\geq 0, \quad t \in]0, T[, \\ V_0(t) \geq 0, \quad V_I(t) &\geq 0, \\ V_i(0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Then,

$$V_i(t) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T[.$$

Proof. Let $T_0 < T$ and Define the vector $Z_h(t) = e^{\gamma t} V_h(t)$ where γ is sufficiently small such that $(a_i(t) - \gamma) > 0$ for $0 \leq i \leq I$, $t \in [0, T_0]$. Let $m = \min_{0 \leq i \leq I, 0 \leq t \leq T_0} Z_i(t)$. Since, for $i \in \{0, \dots, I\}$, $Z_i(t)$ is a continuous function on the compact $[0, T_0]$, there exist $t_0 \in [0, T_0]$ and $i_0 \in \{0, \dots, I\}$ such that $m = Z_{i_0}(t_0)$. We observe that

$$(2.2) \quad \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I,$$

$$(2.3) \quad \delta^2 Z_{i_0}(t_0) = \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1.$$

From (2.1), we obtain the following inequality

$$\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + b_{i_0}(t_0)\delta^0 Z_{i_0}(t_0) + (a_{i_0}(t_0) - \gamma)Z_{i_0}(t_0) \geq 0.$$

It follows from (2.2)-(2.3) that $(a_{i_0}(t_0) - \gamma)Z_{i_0}(t_0) \geq 0$, which implies that $Z_{i_0}(t_0) \geq 0$ because $(a_{i_0}(t_0) - \gamma) > 0$. We deduce that $V_h(t) \geq 0$ for $t \in [0, T_0]$ and the proof is complete. \square

Lemma 2.2. Let $V_h(t), W_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ and $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + V_i^q(t) \delta^0 V_i(t) + f(V_i(t), t) &< \\ < \frac{dW_i(t)}{dt} - \delta^2 W_i(t) + W_i^q(t) \delta^0 W_i(t) + f(W_i(t), t), \\ V_0(t) < W_0(t), \quad V_I(t) < W_I(t) \quad t \in]0, T[\\ V_i(0) < W_i(0), \quad 0 \leq i \leq I. \end{aligned}$$

Then $V_i(t) < W_i(t)$, $0 \leq i \leq I$, $t \in]0, T[$.

Proof. Introduce the vector $Z_h(t) = W_h(t) - V_h(t)$. Let t_0 the first $t > 0$ such that $Z_i(t) > 0$ for $t \in [0, t_0[$, $0 \leq i \leq I$, but $Z_{i_0}(t_0) = 0$ for a certain $i_0 \in \{0, \dots, I\}$. We observe that

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1. \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + W_{i_0}^q(t_0) \delta^0 Z_{i_0}(t_0) + q\mu_{i_0}^{q-1}(t_0) Z_{i_0}(t_0) \delta^0 V_{i_0}(t_0) + \\ f(W_{i_0}(t_0), t) - f(V_{i_0}(t_0), t) \leq 0, \end{aligned}$$

where $\mu_{i_0}(t_0)$ is an intermediate value between $W_{i_0}(t_0)$ and $V_{i_0}(t_0)$. But this inequality contradicts the first strict differential inequality of the lemma 2.1 and the proof is complete. \square

Lemma 2.3. Let U_h be the solution of problem (1.6–1.7). Then we have,

$$U_i(t) > 0 \quad \text{for } 0 \leq i \leq I, t \in]0, T[.$$

Proof. Assume that there exists a time $t_0 \in]0, T[$ such that $U_{i_0}(t_0) = 0$ for a certain $i_0 \in \{0, \dots, I\}$. We remark that:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_{i_0}(t_0) - U_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 U_{i_0}(t_0) &= \frac{U_{i_0+1}(t_0) - 2U_{i_0}(t_0) + U_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1, \end{aligned}$$

which implies:

$$\frac{dU_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 U_{i_0}(t_0) + U_{i_0}^q(t_0) \delta^0 U_{i_0}(t_0) - \varepsilon U_{i_0}^{\beta+2}(t_0) < 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1,$$

But this inequality contradicts (1.6) and we obtain the desired result. \square

The following lemma reveals that the solution U_h of the semidiscrete problem is symmetric and $\delta^0 U_i(t)$ is positive when i is between 0 and $k - 1$.

Lemma 2.4. *Let U_h be the solution of (1.6)-(1.7). Then for $t \in (0, T)$ we have:*

$$U_{I-i}(t) = U_i(t), \quad 0 \leq i \leq I \text{ and } \delta^+ U_i(t) > 0, \quad 0 \leq i \leq k - 1.$$

Proof. Introduce the vector $V_h(t)$ defined by $V_i(t) = U_{I-i}(t)$ for $0 \leq i \leq I$. It is not hard to see that $V_h(t)$ is a solution of (1.6)-(1.7). It follows from lemma 2.2 that $V_h(t) = U_h(t)$. Now, define the vector $Z_h(t)$ such that

$$Z_i(t) = U_{i+1}(t) - U_i(t), \quad 0 \leq i \leq k - 1,$$

and let t_0 be the first $t > 0$ such that $Z_i(t) > 0$ for $t \in [0, t_0)$ but $Z_{i_0}(t_0) = 0$. Without loss of the generality, we assume that i_0 is the smallest integer which guarantees the equality. If $i_0 = 0$ then we have $U_1(t_0) = U_0(t_0) = 0$, which is a contradiction because from lemma 2.3, $U_1(t_0) > 0$. It is easy to see that

$$(2.4) \quad \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) = 0, \quad \text{if } 1 \leq i_0 \leq k - 1.$$

On the other hand, we observe:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq k - 2, \end{aligned}$$

and we know if $i_0 = k - 1$,

$$\begin{aligned} \delta^2 Z_{k-1}(t_0) &= \delta^2 U_k(t_0) - \delta^2 U_{k-1}(t_0) \\ &= \frac{U_{k+1}(t_0) - 2U_k(t_0) + U_{k-1}(t_0) - U_k(t_0) + 2U_{k-1}(t_0) - U_{k-2}(t_0)}{h^2}. \end{aligned}$$

Since k is the integer part of the number $I/2$, using the fact that the discrete solution is symmetric, we have either $U_{k+1}(t) = U_{k-1}(t)$ or $U_{k+1}(t) = U_k(t)$.

In the both cases, we find that

$$\delta^2 Z_k(t_0) = \frac{Z_{k-2}(t_0)}{h^2} > 0.$$

The above inequalities imply that $\frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) < 0$, which a contradiction because of (2.4) and the proof is complete. \square

Lemma 2.5. *Let U_h be the solution. Then, we have:*

$$\frac{dU_i(t)}{dt} > 0 \quad \text{for } 0 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T[.$$

Proof. Consider the vector $Z_h(t)$ with $Z_i(t) = \frac{d}{dt}U_i(t)$, $0 \leq i \leq I$. Let t_0 be the first $t > 0$ such that $Z_i(t) > 0$ for $t \in [0, t_0[$ but $Z_{i_0}(t_0) = 0$ for a certain $i_0 \in \{1, \dots, I\}$. Without loss of the generality, we assume that i_0 is the smallest integer which satisfies the above equality. We get:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_{i_0}(t_0) - Z_{i_0}(t_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0, \quad 0 \leq i_0 \leq I, \\ \delta^2 Z_{i_0}(t_0) &= \frac{Z_{i_0+1}(t_0) - 2Z_{i_0}(t_0) + Z_{i_0-1}(t_0)}{h^2} > 0, \quad 1 \leq i_0 \leq I - 1, \end{aligned}$$

which implies that:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{i_0}(t_0)}{dt} - \delta^2 Z_{i_0}(t_0) + U_{i_0}^q(t_0)\delta^0 Z_{i_0}(t_0) + (qU_{i_0}^{q-1}(t_0)\delta^0 U_{i_0}(t_0) - \\ \epsilon(\beta + 2)U_{i_0}^{\beta+1}(t_0))Z_{i_0}(t_0) < 0, \quad \text{if } 1 \leq i_0 \leq I - 1. \end{aligned}$$

Therefore, we have a contradiction because of (1.6–1.7) and leads to the desired result. \square

The next theorem establishes that, for each fixed time interval $[0, T]$ where u is defined, the solution of semidiscrete problem approximates u , as $h \rightarrow 0$.

Theorem 2.1. *Assume that (1.2–1.4) has a solution $u \in C^{4,1}([-1, 1] \times [0, T])$ and the initial condition φ_h at (1.7) satisfies:*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1), \quad \text{as } h \rightarrow 0,$$

where $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$, $t \in [0, T]$. Then, for h sufficiently small, problem (1.6)–(1.7) has a unique solution $U_h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ such that

$$\max_{t \in [0, T]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

The proof of the theorem of convergence of the solution U_h is similar to those given in [19, 18], so we omit it here.

3. CONVERGENCE OF SEMIDISCRETE BLOW-UP TIME

In this section, under some assumptions we show that the semidiscrete solution U_h of problem (1.6–1.7) blows up in a finite time then we estimate its semidiscrete blow-up time and we prove that this time converges to the real one when the mesh size goes to zero.

Lemma 3.1. *Let $U_h \in \mathbb{R}^{I+1}$ such that $U_h > 0$. Then, we have*

$$\delta^2 U_i^\beta \geq \beta U_i^{\beta-1} \delta^2 U_i \quad \text{for } 0 \leq i \leq I, \quad \beta > 0.$$

Proof. Using Taylor's expansion, we obtain:

$$\begin{aligned} \delta^2 U_0^\beta &= \beta U_0^{\beta-1} \delta^2 U_0 + (U_1 - U_0)^2 \frac{\beta(\beta-1)}{h^2} \theta_0^{\beta-2}, \\ \delta^2 U_i^\beta &= \beta U_i^{\beta-1} \delta^2 U_i + (U_{i+1} - U_i)^2 \frac{\beta(\beta-1)}{2h^2} \theta_i^{\beta-2} + (U_{i-1} - U_i)^2 \frac{\beta(\beta-1)}{2h^2} \xi_i^{\beta-2}, \\ &\quad 1 \leq i \leq I-1, \\ \delta^2 U_I^\beta &= \beta U_I^{\beta-1} \delta^2 U_I + (U_{I-1} - U_I)^2 \frac{\beta(\beta-1)}{2h^2} \theta_i^{\beta-2}, \end{aligned}$$

where θ_i is an intermediate value between U_i and U_{i+1} and ξ_i is an intermediate value between U_{i-1} and U_i . Using the fact that $U_h > 0$, we have the desired result. \square

Theorem 3.1. *Let U_h be the solution U_h of problem (1.6–1.7). Suppose that there exists a positive integer λ such that:*

$$(3.1) \quad \delta^2 \varphi_i - \gamma_i \delta^0 \varphi_i + \varepsilon \varphi_i^{\beta+2} \geq \lambda \varphi_i^{\beta+2}, \quad 0 \leq i \leq I.$$

Then, the solution U_h of problem (1.6–1.7) blows up in a finite time T_b^h and we have the following estimate :

$$U_i(t) \leq B(T_b^h - t)^{-\gamma},$$

for $0 \leq t < T_b^h$, $0 \leq i \leq I$, and a positive constant B .

Proof. Let $[0, T_b^h[$ be the maximal time interval on which $\|U_h(t)\|_\infty < \infty$. Our aim is show that T_b^h is finite and satisfies the above inequality. We introduce the vector $J_h(t)$ such that:

$$J_i(t) = \frac{d}{dt}U_i(t) - \lambda U_i^{\beta+2}(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \geq 0.$$

Then we have:

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}U_i - \lambda U_i^{\beta+2}\right) - \delta^2\left(\frac{d}{dt}U_i - \lambda U_i^{\beta+2}\right).$$

Using lemma 3.1, a straightforward calculation gives:

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i + 4\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\delta^0 J_i + \left(\varepsilon(\beta+2)U_i^{\beta+1} + 2\left(\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\right)^2\right)J_i \geq \lambda\beta(\beta+1)U_i^\beta(\delta^0 U_i)^2.$$

Setting $\gamma_i = 4\frac{\delta^0 U_i}{U_i}$ and $b_i = -\left(\varepsilon(\beta+2)U_i^{\beta+1} + 2\left(\frac{\delta^0 U_i}{U_i}\right)^2\right)$ we obtain:

$$\frac{d}{dt}J_i - \delta^2 J_i + \gamma_i \delta^0 J_i - b_i J_i \geq \lambda\beta(\beta+1)U_i^\beta(\delta^0 U_i)^2 \geq 0.$$

From (3.1), we observe that:

$$J_i(0) = \delta^2 U_i(0) - \gamma_i(0)\delta^0 U_i(0) + \varepsilon U_i^{\beta+2}(0) - \lambda U_i^{\beta+2}(0) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I.$$

We deduce from lemma 2.1 that $J_h(t) \geq 0$ for $t \in [0, T_b^h)$, which implies that

$$\frac{dU_i(t)}{dt} \geq \lambda U_i^{\beta+2}(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \geq 0.$$

Integrating the above inequality over (t, T_b^h) , we arrive at

$$(3.2) \quad T_b^h - t \leq \frac{1}{\lambda} \frac{(U_i(t))^{-(\beta+1)}}{\beta+1},$$

which implies that: $U_i(t) \leq B(T_b^h - t)^{-\gamma}$ where $B = \left(\lambda(\beta+1)\right)^{-\gamma}$ and $\gamma = \frac{1}{\beta+1}$, completing the proof. \square

Remark 3.1. *The inequality (3.2) implies that:*

$$T_b^h - t_0 \leq \frac{1}{\lambda} \frac{\|U_h(t_0)\|_\infty^{-(\beta+1)}}{\beta+1} \quad \text{if } 0 \leq t_0 < T_b^h.$$

Theorem 3.2. *Suppose that the solution of (1.2)–(1.4) blows up in a finite time T_b such that $u \in C^{4,1}([0, 1] \times [0, T[, \mathbb{R})$ and the initial condition at (1.7) satisfies*

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ as } h \rightarrow 0.$$

Assume that there exists a positive constant λ such that:

$$\delta^2 \varphi_i - \gamma_i \delta^0 \varphi_i + \varepsilon \varphi_i^{\beta+2} \geq \lambda \varphi_i^{\beta+2}, 0 \leq i \leq I.$$

Then the solution U_h of (1.6)–(1.7) blows up in a finite time T_b^h and

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_b^h = T_b.$$

Proof. Let $\varepsilon > 0$. There exists a positive constant N such that:

$$(3.3) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{y^{-(\beta+1)}}{(\beta+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \infty \quad \text{for } y \in [N, +\infty[.$$

Since $\lim_{t \rightarrow T_b} \max_{x \in [0,1]} |u(x, t)| = +\infty$, then there exists T_1 such that:

$$|T_1 - T_b| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \|u(x, t)\|_\infty \geq 2N \quad \text{for } t \in [T_1, T_b].$$

Let $T_2 = \frac{T_1 + T_b}{2}$, then $\sup_{t \in [0, T_2]} |u(x, t)| < \infty$. It follows from Theorem 2.1 that $\sup_{t \in [0, T_2]} |U_h(t) - u_h(t)|_\infty \leq N$. Applying the triangular inequality, we get

$$\|U_h(t)\|_\infty \geq \|u_h(t)\|_\infty - \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty,$$

which implies $\|U_h(t)\|_\infty \geq N$ for $t \in [0, T_2]$. From theorem 3.1, $U_h(t)$ blows up in a finite time T^h . We deduce from remark 3.1 and (3.3) that

$$|T_b - T_b^h| \leq |T_b - T_2| + |T_2 - T_b^h| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\|U_h(T_2)\|_\infty^{-(\beta+1)}}{\beta+1} \leq \varepsilon,$$

which completes the proof. □

4. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this section, we estimate the numerical blow-up time and present some numerical results to the blow-up time of (1.2)-(1.4) with initial condition $\varphi(x) = \frac{1}{1-u(x)}$ where $u(x) = 0.001 * (1 - e^{x^2-1} + 0.5 * \cos(\frac{\pi}{2}x))$ by using the algorithm proposed by C. Hirota and K. Ozawa [4]. The main idea of this method is to transform the ODE into a tractable form by the arc length transformation technique and to generate a linearly convergent sequence to the blow-up time. The sequence is then accelerated by the Aitken Δ^2 method. The present method is applied to the blow-up problems of PDEs by discretising the equations in space and integrating the resulting ODEs by an ODE solver, see [4, 12, 14, 15]. For our experiments we use the DOP54, see [8], and we set the three tolerances parameters $AbsTol = RelTol = 1.d15$, $InitialStep = 0$. Then we define our geometric sequence s_ℓ by $s_\ell = 2^{15} \cdot 2^\ell$, ($\ell = 0, 1, \dots, 12$). And finally to show that T_b^h converges actually to T , we varied I , ε and β . In the following, we present some tables containing the numerical blow-up times, values of I , the steps and the orders of the approximations corresponding to meshes of 16, 32, 64, 128, 256, 512, and 1024 and some figures to illustrate our analysis. The order(s) of the method is computed from $s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h})/(T_{2h} - T_h))}{\log(2)}$.

Table 1 : Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations for $\varepsilon = 6$, $\beta = 3$

I	T_b^h	<i>Steps</i>	s
16	0.0416756045	1652	-
32	0.0416703945	1981	-
64	0.0416692123	2229	2.13
128	0.0416689256	2470	2.04
256	0.0416688545	2977	2.01
512	0.0416688367	5117	2.01
1024	0.0416688323	14890	2.01

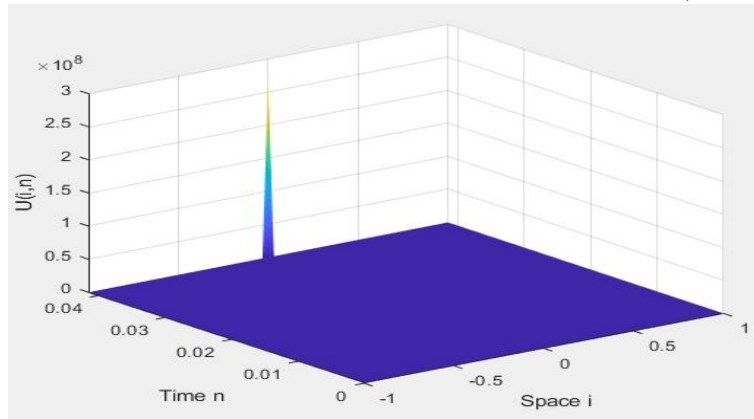
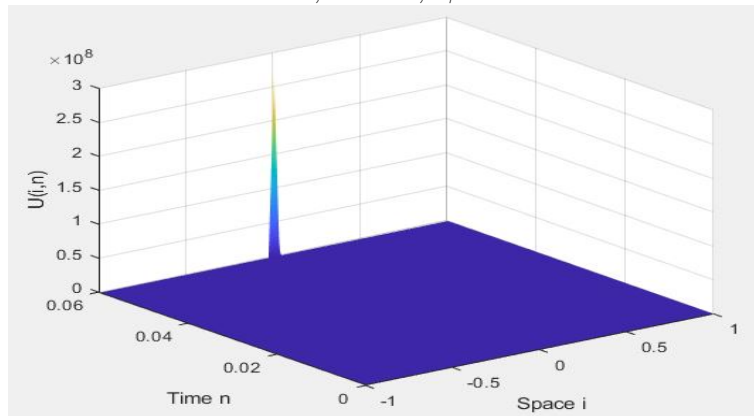
Table 2 : Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations for $\varepsilon = 9$, $\beta = 0.86$

I	T_b^h	Steps	s
16	0.059813403	2310	-
32	0.059793630	2648	-
64	0.059788614	2955	1.97
128	0.059787359	3229	1.99
256	0.059787046	3813	2.00
51	0.059786969	7060	2.02
1024	0.059786950	21084	2.02

Table 3 : Numerical blow-up times, numbers of iterations, and orders of the approximations for $\varepsilon = 10$, $\beta = 0.86$

I	T_b^h	Steps	s
16	0.0538100852	2332	-
32	0.053795621	2684	-
64	0.053791808	2998	1.93
128	0.053790856	3308	2.00
256	0.053790619	3444	2.00
512	0.053790560	6660	2.00
1024	0.053790546	192522	2.06

Remark 4.1. From these tables, we can assure the convergence of T_b^h to the blow-up time of the solution of (1.2-1.4), since the rate of convergence is near 2, which is just the accuracy of the difference approximation in space. For other illustrations, we also give some plots. From the Figures below, we can observe the rapidly growing behaviour of the solution and the blow-up point of the semidiscrete solution, which is in agreement with the theoretical results, see [11].

Figure 1 :Evolution of the semidiscrete solution for $I = 64$, $\varepsilon = 6$, $\beta = 3$ Figure 2 :Evolution of the semidiscrete solution for $I = 256$, $\varepsilon = 9$, $\beta = 0.86$ 

REFERENCES

- [1] A. ACKER, B. KAWOHL: *Remarks on quenching*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **13** (1989), 53–61.
- [2] A. FRIEDMAN, B. MCLEOD: *Blow-up of Positive Solutions of Semilinear Heat Equations*, Indiana Univ. Math. J., **34**, (1985), 425–447.
- [3] A. GANON, M. M. TAHA, K. A. TOURÉ : *Numerical blow-up for a quasilinear parabolic equation with nonlinear boundary condition*, Far East J. Math. Sci.(FJMS), **114**, (2019), 19–38 .
- [4] C. HIROTA, K. OZAWA,: *Numerical method of estimating the blow-up time and rate of the solution of ordinary differential equations-An application to the blow-up problems of partial differential equations*, Japan, Journal of Computational and Applied Mathematics, **193**, (2006), 614–637.

- [5] D. PHILLIPS: *Existence of solutions to a quenching problem*, Appl. Anal., **24** (1987), 253–264.
- [6] D. NABONGO, K. N’GUESSAN, K. A. TOURÉ,: *Blow-up for discretizations of some Reaction-Diffusion Equations with a Nonlinear Convection Term*, International Journal of Applied Mathematics (IJAM), **29** (5) 2016, 537–568.
- [7] D. NABONGO, T.K. BONI : *Numerical quenching solutions of localized semilinear parabolic equation*, Appl. Math. Sci., **2** (2008), 1145–1160.
- [8] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, G. WANNER: *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems.*, 2nd edition, Springer series in computational mathematics, Springer-verlag, 1993.
- [9] H. A. LEVINE: *Quenching, nonquenching and beyond quenching for solution of some semilinear parabolic equations*, Annali Math. Pura Appl., **155** (1990), 243–260.
- [10] H. KAWARADA: *On solutions of initial-boundary problem for $u_t = u_{xx} + l/(1 - u)$* , Publins RIMS Kyoto Univ., **10** (1975), 729–736.
- [11] J. S. GUO: *On the Quenching Behavior of the Solution of a Semilinear Parabolic Equation*, Journal of mathematical analysis and applications, **151** (1990), 58–79.
- [12] K. A. ADOU, K. A. TOURÉ , A. COULIBALY: *Numerical study of estimating the blow-up time of positive solutions of semilinear heat equations*, Far East Journal of Applied Mathematics (FJAM), **100** (4) (2018), 291–308.
- [13] K. A. ADOU, K. A. TOURÉ, A. COULIBALY: *On the computation of the numerical blow-up time for solutions of semilinear parabolic equation*, International Journal of Numerical Methods and Applications, **18** (1) (2019), 7–18 .
- [14] K. B. EDJA, K. A. TOURÉ, B. J-C. KOUA: *Numerical Blow-up for A Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions*, Journal of Mathematics Research, **10**, 2018.
- [15] K. C. N’DRI, K. A. TOURÉ, G. YORO : *Numerical blow-up time for a parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, International Journal of Numerical Methods and Applications, **17** (3-4) (2018), 141–160.
- [16] K. DENG: *Dynamical behavior of solutions of a semilinear heat equation with nonlocal singularity*, SIAM J. MATH. ANAL., **26**(1) (1995), 98–111.
- [17] K. DENG, H. A. LEVINE: *On the blow-up of u_t at quenching*, Proceedings of AMS, **106** (4) (1989), 1049–1056.
- [18] K. N’GUESSAN, D. NABONGO, A. K. TOUREÉ: *Blow-up for semidiscretizations of some semilinear parabolic equations with a convection Term*, Journal of Progressive Research in Mathematics(JPRM), **5**(2) (2015), 499–518.
- [19] L.M.ABIA, J.C.LÓPEZ-MARCOS, J.MARTINEZ: *The Euler method in the numerical integration of reaction diffusion problems with blow-up*, Applied Numerical Mathematics, **38** (2001), 287–313.
- [20] L.M.ABIA, J.C.LÓPEZ-MARCOS, J.MARTINEZ: *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*, Applied Numerical Mathematics, **26** (1998), 399–414.

- [21] M. CHIPOT, F.B. WEISSLER: *Some blow-up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term*, SIAM J. MATH. ANAL., **20** (4) (1989), 886–907.
- [22] M.FILA, H.A. LEVINE, J.L. VAZQUEZ: *Stabilization of solutions of weakly singular quenching problems*, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), 555–559.
- [23] M. M.TAHA, K. A. TOURÉ, E.P.MENSAH : *Numerical approximation of the Blow-up time for a semilinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Far East Journal of Mathematical Sciences(FJMS), **60** (2012), 125–167.
- [24] T. NAKAGAWA: *Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$* , Appl. Math. Optim., **2** (1976), 337–350.
- [25] T. SALIN: *On quenching with logarithmic singularity*, Nonlinear Analysis TMA, **52** (2003), 261–289.
- [26] Y.LI, R.YAO, X.TONG, Z.ZHANG: *Gradient blowup rate for a heat equation with general gradient nonlinearity*, Applicable Analysis, DOI:10.1080/00036811.2015.1068296, 2015.
- [27] T.K.USHIJIMA: *On the Approximation of Blow-up Time for Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, RIMS, Kyoto Univ., **36** (2000), 613–640.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY
UMRI MATHÉMATIQUES ET NOUVELLES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
YAMOISSOUKRO, BP 2444, CÔTE D'IVOIRE
E-mail address: achilleadou@gmail.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUËT-BOIGNY
UMRI MATHÉMATIQUES ET NOUVELLES TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
YAMOISSOUKRO, BP 2444, CÔTE D'IVOIRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ FÉLIX HOUPHOUËT-BOIGNY
BP 582, ABIDJAN 22, CÔTE D'IVOIRE
E-mail address: couliba@yahoo.fr