

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union - Discipline – Travail

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



Institut National Polytechnique  
Félix HOUPHOUËT-BOIGNY de Yamoussoukro



École Doctorale Polytechnique

Numéro d'ordre: 138/2022

## THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE FÉLIX  
HOUPHOUËT-BOIGNY

MENTION: MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

SPÉCIALITÉS: EDP ET ANALYSE NUMÉRIQUE

### Thème:

**Méthode numérique et asymptotique de  
certaines équations aux dérivées partielles (edp)  
de type hyperbolique**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Abro Goh André-Pascal**

le 23 Decembre 2022

### Jury

<b>M. BROU Yao Casimir,</b>	Professeur Titulaire, Institut National Polytechnique F H-B	Président
<b>M. TOURE K. Augustin,</b>	Professeur Titulaire, Institut National Polytechnique F H-B	Co-Directeur
<b>M. COULIBALY Adama,</b>	Professeur Titulaire, Université F H-B	Co-Directeur
<b>M. MONSIA Marc Delphin,</b>	Professeur Titulaire, Université d'Abomey Calavi	Rapporteur
<b>M. OKOU A. KPETIHI Sahoua Hypolithe,</b>	Maître de Conférences, Université F H-B	Rapporteur
<b>M. N'GUESSAN Koffi,</b>	Maître de Conférences, Université Alassane Ouattara	Examineur

---

# Dédicace

*Je dédie cette thèse à ma mère,*

**✠ BROUSSET JACQUELINE EUPHRASIE "ABEDJOU". ✠**

*Merci maman pour ces énormes sacrifices consentis. Puisse Dieu,  
le Très-Haut te bénir et t'accorder la longévité et la santé.*

---

# Liste des symboles et abréviations

- EDO : Équation Différentielle Ordinaire
- EDP : Équation Différentielle Partielle ou Équation aux Dérivées Partielles
- $\Omega$  : ouvert de  $\mathbb{R}$ .
- $\bar{\Omega}$  : adhérence de  $\Omega$ .
- $C(\Omega) = C^0(\Omega)$  : fonctions continues sur  $\Omega$ .
- $C_c(\Omega)$  : fonctions continues à supports compact dans  $\Omega$ .
- $C^k(\Omega)$  : fonctions  $k$  fois continument différentiables sur  $\Omega$  ( $k$  entier  $\geq 0$ ).
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$ .
- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$ .
- $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ .
- $C(\bar{\Omega})$  : fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ .
- $D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$ ,  
pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  d'entiers non nuls où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  est la longueur du multi-indice  $\alpha$ .
- $C^k(\bar{\Omega})$  : fonctions  $u$  de  $C^k(\Omega)$  telles que pour chaque multi-indice  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq k$ , l'application  $x \in \Omega \mapsto D^\alpha u(x)$  se prolonge continument sur  $\bar{\Omega}$ .
- $C^k(A, B)$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  : Ensemble des fonctions définies sur un intervalle  $A$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $B$ ,  $k$ -fois dérivables et dont la dérivée  $k$ -ième est continue. L'ensemble  $C^0(A, B)$  sera noté  $C(A, B)$ . Lorsque  $B = \mathbb{R}$ , on écrira  $C^k(A)$  au lieu de  $C^k(A, \mathbb{R})$ .

- 
- on note  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ou  $f_x$ , la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$ , on note  $f_{xx}$ , la dérivée seconde de  $f$  par rapport à  $x$ .

---

# Remerciements

J'adresse mes remerciements à mes co-Directeurs de thèse. À Monsieur TOURÉ Kidjégbo Augustin, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro. Je lui dis merci du fond du cœur, pour avoir accepté de diriger mes travaux, mais aussi pour sa bonté, ses conseils avisés, ses remarques, sa constante disponibilité aux appels téléphoniques et aux e-mails et toutes ses compétences qui ont été pour moi une aide précieuse dans la réalisation de ce projet. À Monsieur COULIBALY Adama, Professeur Titulaire à l'Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan. Je lui dis profondément merci pour avoir accepté de diriger mes travaux, mais aussi pour le soutien, les conseils précieux et l'intérêt incessant qu'il a porté au suivi de ce travail.

Je remercie respectueusement Monsieur BROU Yao Casimir, Professeur Titulaire à l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury de ma soutenance de thèse. Je remercie Monsieur Marc Delphin MONSIA, Professeur Titulaire à l'Université d'Abomey Calavi et Monsieur OKOU A. KPETIHI Sahoua Hypolithe, Maître de Conférences à l'Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan qui ont bien voulu examiner mon travail en tant que rapporteurs et dont les différentes remarques ont contribué à l'améliorer.

J'exprime mes remerciements à Monsieur N'GUESSAN Koffi, Maître de Conférences à l'Université Alassane Ouattara de Bouaké qui a accepté d'être examinateur de cette thèse.

---

Je remercie Monsieur MOUSSA Abdoul Kader Diaby, Directeur Général de l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny (INP-HB) de Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour leur accueil cordial dans l'illustre école de formation qu'ils gèrent de manière excellente.

Je remercie le Professeur YAO Kouassi Benjamin, Directeur de l'École Doctorale Polytechnique INP-HB Yamoussoukro, Côte d'Ivoire et son équipe pour leur accueil dans la prestigieuse école doctorale dont ils assurent la direction.

Un merci particulier au Professeur HILI Ouagnina, Directeur de l'unité mixte de recherche et d'innovation (UMRI) de Mathématiques et des Nouvelles Technologies de l'Information, pour sa disponibilité et ses conseils.

Un merci à Monsieur BOMISSO Gossrin Jean-Marc, Maître Assistant à l'Université Nangui Abrogoua pour ses conseils, ses orientations et sa disponibilité.

Je remercie aussi mes parents mais surtout ma mère, ma sœur et ma douce épouse pour m'avoir encouragé et soutenu tout au long de ce processus.

Je remercie sincèrement tous les membres de l'UMRI de Mathématiques et des Nouvelles Technologies de l'Information, en particulier Monsieur N'DRI Cyrille, Assistant à l'Institut National Polytechnique Félix Houphouët-Boigny de Yamoussoukro pour l'accueil chaleureux, les conseils et la franche collaboration.

---

# Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de deux systèmes mécaniques. Le premier système se constitue d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli, à coefficients constants, à laquelle est associée un contrôle en force et en moment ponctuels proportionnels respectivement à la vitesse et à la vitesse de rotation. Le deuxième système est constitué d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli, à coefficients variables, contrôlée en force et en moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et du terme de position (respectivement l'angle de rotation) dans le contrôle force (respectivement moment). Nous développons dans ce travail une méthode numérique stable et convergente qui conserve les propriétés de ces systèmes et nous montrons l'influence des paramètres de contrôles sur la stabilisation de ces systèmes. Ainsi, pour chacun de ces problèmes, nous montrons d'abord le caractère bien posé au sens des  $C_0$ -semi-groupes. Aussi, nous prouvons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible au moyen de la méthode de Faedo-Galerkin et des espaces intermédiaires. Ensuite, en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace, nous développons un schéma numérique semi-discret qui préserve les propriétés obtenues dans le cas continu. La convergence du schéma numérique est démontrée, une estimation de l'erreur a priori et l'ordre de convergence sont obtenus. Enfin, nous effectuons des simulations numériques aux fins de vérifier l'ordre de convergence obtenu et de présenter l'effet des paramètres de contrôles sur la dissipativité de l'énergie, l'amortissement des vibrations à l'extrémité libre et la convergence de ces poutres vers leur posi-

---

tion d'équilibre. Notre étude a l'avantage de permettre une validation numérique visuelle de certains résultats théoriques obtenus pour ces systèmes de poutre.

**Mots clés :** poutre d'Euler-Bernoulli, semi-groupe, existence et unicité, méthode des éléments finis, stabilité, méthode de Galerkin, estimation a priori.



---

# Abstract

This thesis is devoted to the study of two mechanical systems. The first system consists of a flexible Euler-Bernoulli beam, with constant coefficients, to which is associated a control in force and moment proportional respectively to the speed and to the rotation speed. The second system consists of a flexible Euler-Bernoulli beam, with variable coefficients, controlled in force and moment by a linear combination of the velocity, the rotation speed and the position term (respectively the rotation angle) in the force (respectively moment) control. We develop in this work a stable and convergent numerical method that preserves the properties of these systems and we show the influence of the control parameters on the stabilization of these systems. Thus, for each of these problems, we first show the well-posedness in the sense of  $C_0$ -semi-groups. Also, we prove the existence, uniqueness and regularity of the weak solution by means of the Faedo-Galerkin method and intermediate spaces. Then, using the finite element method for the discretization in space, we develop a semi-discrete numerical scheme that preserves the properties obtained in the continuous case. The convergence of the numerical scheme is demonstrated, an estimate of the a priori error and the order of convergence are obtained. Finally, we perform numerical simulations to verify the order of convergence obtained and to present the effect of the control parameters on the energy dissipativity, the vibration damping at the free end and the convergence of these beams to their equilibrium position. Our study has the advantage of allowing a visual numerical validation of some theoretical results obtained for these beam

## Abstract

---

systems.

**Key words** : Euler-Bernoulli beam, semi-group, existence and uniqueness, finite element method, stability, Galerkin method, a priori estimation.

---

# Table des matières

Dédicace	i
Liste des symboles et abréviations	ii
Remerciements	iv
Résumé	vi
Abstract	viii
Table des figures	xvi
Liste des tableaux	xvii
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>6</b>
1.1 Poutres d'Euler-Bernoulli . . . . .	6
1.1.1 Définition . . . . .	6
1.1.2 Hypothèses pour la théorie d'Euler-Bernoulli . . . . .	7
1.1.3 Modélisation . . . . .	8
1.2 Stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques . . . . .	9
1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle . . . . .	11
1.3.1 Topologie faible, espaces réflexifs, séparables . . . . .	11
1.3.2 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$ . .	13

1.3.3	Espaces de Hilbert . . . . .	16
1.3.3.1	Dual d'un espace de Hilbert . . . . .	17
1.3.3.2	Base hilbertienne . . . . .	20
1.3.4	Opérateurs adjoints, autoadjoints, compacts et anti-adjoint .	21
1.3.5	Espaces de Sobolev . . . . .	23
1.3.6	Distributions à valeurs réelles . . . . .	26
1.3.7	Quelques inégalités utiles . . . . .	27
1.3.8	Intégrabilité au sens de Bochner . . . . .	29
1.3.8.1	Caractérisation de l'intégrabilité au sens de Bochner . . . . .	29
1.3.8.2	Espaces $L^p(\Omega; E)$ . . . . .	30
1.3.8.3	Espaces $W^{1,p}(I; E)$ . . . . .	32
1.3.9	Distributions à valeurs vectorielles . . . . .	32
1.3.10	Quelques résultats utiles en EDP . . . . .	34
1.3.11	Espaces intermédiaires . . . . .	37
1.3.12	Existence et unicité de solution d'un problème d'évolution .	43
1.3.12.1	Quelques rappels sur la théorie des semi-groupes .	43
1.3.12.2	Existence et unicité de solution . . . . .	45
1.3.13	Principe d'invariance de LaSalle et stabilité forte . . . . .	47
1.3.13.1	Principe d'invariance de LaSalle . . . . .	48
1.3.13.2	Stabilité forte . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Étude numérique pour une équation de poutres d'Euler-Bernoulli à coefficients constants</b>	<b>50</b>
2.1	Introduction . . . . .	50
2.2	Caractère bien posé du problème . . . . .	52
2.3	Existence, unicité et régularité de la solution faible . . . . .	61
2.3.1	Définition de la solution faible . . . . .	61

2.3.2	Existence et unicité de la solution faible . . . . .	63
2.3.3	Résultat complémentaire de régularité . . . . .	70
2.4	Schéma semi-discret . . . . .	73
2.4.1	Polynômes cubiques d’Hermite . . . . .	74
2.4.2	Problème semi-discret . . . . .	78
2.4.3	Estimation d’erreur a priori . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Méthode numérique par la méthode des éléments finis (MEF) pour une</b>	
	<b>équation de poutre d’Euler-Bernoulli à coefficients variables</b>	<b>89</b>
3.1	Introduction . . . . .	89
3.2	Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	91
3.2.1	Problème bien posé au sens des semi-groupes . . . . .	92
3.2.2	Stabilité au sens de Lyapunov de (3.12) . . . . .	97
3.3	Existence, unicité et régularité de la solution faible . . . . .	99
3.3.1	Caractérisation de la solution faible . . . . .	99
3.3.2	Existence de la solution faible . . . . .	102
3.3.3	Unicité de la solution faible . . . . .	107
3.3.4	Résultat complémentaire de régularité . . . . .	109
3.4	Schéma semi-discret par la méthode des éléments finis (MEF) . . .	112
3.4.1	Problème semi-discret . . . . .	112
3.4.2	Estimation d’erreur a priori . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>122</b>
4.1	Équation de poutre d’Euler-Bernoulli à coefficients constants . . . .	122
4.1.1	Ordre de convergence (o.d.c) . . . . .	122
4.1.2	Influences des contrôles sur la dissipation de l’énergie . . . .	123
4.1.3	Influences des contrôles sur les vibrations de la poutre à l’ex- trémité libre . . . . .	126
4.1.4	Influences des contrôles sur la déflexion de la poutre $y(x, t)$	130

## Table des matières

---

4.1.5	Sensibilité des paramètres $\alpha$ et $\beta$ sur la stabilité . . . . .	131
4.2	Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables . . . .	132
4.2.1	Ordre de convergence (o.d.c) . . . . .	132
4.2.2	Influences des contrôles sur la dissipation de l'énergie . . .	133
4.2.3	Influences des contrôles sur les vibrations de la poutre à l'ex- trémité libre . . . . .	136
4.2.4	Influences des contrôles sur la déflexion de la poutre $w(x, t)$	141
4.2.5	Sensibilité des paramètres de contrôle sur la stabilité . . . .	142
<b>5</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>145</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>147</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>158</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>

---

# Table des figures

1.1	Structure d'une poutre . . . . .	7
2.1	Fonctions cubiques d'Hermite standards de base locale $N_i(\xi)$ , $i = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	75
2.2	Six premières fonctions cubiques d'Hermite standards de base globales avec partition à six nœuds sur $[0, 1]$ . . . . .	77
4.1	Dissipation de l'énergie pour $\alpha = \beta = 0; 0.1; 1$ . . . . .	124
4.2	Dissipation de l'énergie pour $\alpha = \beta = 5; 10; 15$ . . . . .	124
4.3	Dissipation de l'énergie pour $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ . . . . .	124
4.4	Dissipation de l'énergie pour $\beta = 5; 15; 30$ . . . . .	124
4.5	Dissipation de l'énergie pour $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$ . . . . .	125
4.6	Dissipation de l'énergie pour $\alpha = 5; 15; 30$ . . . . .	125
4.7	Courbes des positions $y(1, t)$ pour $\alpha = \beta = 0.01; 0.1; 1$ . . . . .	126
4.8	Courbes des positions $y(1, t)$ pour $\alpha = \beta = 2; 5; 10$ . . . . .	126
4.9	Courbes des angles de rotations $y_x(1, t)$ pour $\alpha = \beta = 0.01; 0.1; 1$ . . . . .	127
4.10	Courbes des angles de rotations $y_x(1, t)$ pour $\alpha = \beta = 2; 5; 10$ . . . . .	127
4.11	Courbes des positions $y(1, t)$ pour $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ . . . . .	127
4.12	Courbes des positions $y(1, t)$ pour $\beta = 5; 15; 30$ . . . . .	127
4.13	Courbes des angles de rotations $y_x(1, t)$ pour $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ . . . . .	128
4.14	Courbes des angles de rotations $y_x(1, t)$ pour $\beta = 5; 15; 30$ . . . . .	128
4.15	Courbes des positions $y(1, t)$ pour $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$ . . . . .	128

## Table des matières

---

4.16 Courbes des positions $y(1, t)$ pour $\alpha = 5; 10; 15$ . . . . .	128
4.17 Courbes des angles de rotations $y_x(1, t)$ pour $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$ . . . . .	129
4.18 Courbes des angles de rotations $y_x(1, t)$ pour $\alpha = 5; 10; 15$ . . . . .	129
4.19 Déflexion $y(x, t)$ pour $\alpha = \beta = 0.1$ . . . . .	130
4.20 Déflexion $y(x, t)$ pour $\alpha = \beta = 5$ . . . . .	130
4.21 Déflexion $y(x, t)$ pour $\alpha = 0.1; \beta = 5$ . . . . .	130
4.22 Déflexion $y(x, t)$ pour $\alpha = 5; \beta = 0.1$ . . . . .	130
4.23 Dissipation de l'énergie pour $\alpha = 1; 5; 10$ . . . . .	134
4.24 Dissipation de l'énergie pour $\beta = 1; 5; 10$ . . . . .	134
4.25 Dissipation de l'énergie pour $\mu_{21} = 1; 5; 10$ . . . . .	134
4.26 Dissipation de l'énergie pour $\mu_{22} = 1; 5; 10$ . . . . .	134
4.27 Dissipation de l'énergie pour $\mu_{12} = 1; 5; 10$ . . . . .	135
4.28 Dissipation de l'énergie pour $\mu_{11} = 1; 5; 10$ . . . . .	135
4.29 Dissipation de l'énergie pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ et $\alpha = \beta = 0$ . . . . .	135
4.30 Dissipation de l'énergie pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ et $\alpha \neq \beta \neq 0$ . . . . .	135
4.31 Courbes des positions $w(1, t)$ pour $\alpha = 1; 5; 10$ . . . . .	137
4.32 Courbes des positions $w(1, t)$ pour $\beta = 1; 5; 10$ . . . . .	137
4.33 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour $\alpha = 1; 5; 10$ . . . . .	137
4.34 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour $\beta = 1; 5; 10$ . . . . .	137
4.35 Courbes des positions $w(1, t)$ pour $\mu_{21} = 1; 5; 10$ . . . . .	138
4.36 Courbes des positions $w(1, t)$ pour $\mu_{22} = 1; 5; 10$ . . . . .	138
4.37 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour $\mu_{21} = 1; 5; 10$ . . . . .	138
4.38 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour $\mu_{22} = 1; 5; 10$ . . . . .	138
4.39 Courbes des positions $w(1, t)$ pour $\mu_{12} = 1; 5; 10$ . . . . .	139
4.40 Courbes des positions $w(1, t)$ pour $\mu_{11} = 1; 5; 10$ . . . . .	139
4.41 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour $\mu_{12} = 1; 5; 10$ . . . . .	139
4.42 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour $\mu_{11} = 1; 5; 10$ . . . . .	139



## Table des figures

---

4.43 Courbes des positions $w(1, t)$ pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ et $\alpha = \beta = 0$ . . . . .	140
4.44 Courbes des positions $w(1, t)$ pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ , $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	140
4.45 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ et $\alpha = \beta = 0$ . . . . .	140
4.46 Courbes des angles de rotations $w_x(1, t)$ pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ , $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	140
4.47 Déflexion $w(x, t)$ pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ , $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	142
4.48 Déflexion $w(x, t)$ pour différentes valeurs de $\mu_{ij}$ , $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	142

---

# Liste des tableaux

4.1	Ordre de convergence expérimentaux du premier problème. . . . .	123
4.2	Temps d'amortissement des vibrations de la poutre (en seconde) pour différentes valeurs de $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	131
4.3	Ordre de convergence expérimentaux du deuxième problème. . . . .	133
4.4	Temps d'amortissement des vibrations de la poutre (en seconde) pour différentes valeurs de $\mu_{21}$ et $\mu_{22}$ . . . . .	143
4.5	Temps d'amortissement des vibrations de la poutre (en seconde) pour différentes valeurs de $\mu_{12}$ et $\mu_{11}$ . . . . .	144

---

# Introduction générale

Les équations différentielles (ordinaires ou aux dérivées partielles) sont d'une importance capitale car elles permettent la modélisation mathématique et l'étude de différents systèmes et problèmes émanant de très nombreux domaines, notamment en physique (par exemple mécanique, acoustique), en chimie (cinétique des réactions), ou en biologie (dynamique des populations), etc.

Les équations différentielles aux dérivées partielles hyperboliques (en abrégé EDP hyperboliques) en particulier sont une classe d'EDP modélisant des phénomènes de propagation, apparaissant par exemple en mécanique. Au nombre de ces EDP hyperboliques, nous avons l'équation de poutre d'Euler-Bernoulli qui est un modèle très bien établi avec une large gamme d'application découlant de l'ingénierie, de l'industrie etc. Ce modèle mathématique est beaucoup utilisé par les ingénieurs structures dans leurs différents projets car il fournit aux concepteurs un outil simple pour analyser le comportement dynamique de nombreuses structures. Ainsi, l'équation de poutre d'Euler-Bernoulli intervient dans la modélisation et l'étude des vibrations d'antennes de télécommunication [9], des vibrations des structures ferroviaires [40], des bras de robots flexibles [24], des bâtiments élevés en raisons des forces externes [22], etc.

La nécessité d'amortir rapidement les vibrations transversales de ces systèmes a suscité l'intérêt pour ce type d'équations différentielles. L'objectif étant d'éliminer les harmoniques (oscillations sinusoïdales) internes afin d'éviter une défaillance prématurée de ces structures. Ainsi, dans le but de contrôler le comportement dy-

namique asymptotique de ces systèmes, une loi de commande leur est associée. Le rôle de celle-ci est de favoriser la dissipation de l'énergie afin de stabiliser le système en un temps raisonnable. Les systèmes ainsi obtenus sont dit dissipatifs.

Notons que l'étude de ces systèmes consiste en grande partie en la résolution des équations qui les modélisent. Cependant, la détermination d'une solution explicite pour ces équations est très difficile et quelques fois impossible (pour le moment). C'est pourquoi, sans connaître leurs expressions analytiques exactes, on effectue une étude qualitative des solutions du modèle mathématique. Cette étude consiste à établir, entre autres, l'existence et si possible l'unicité, la régularité de la solution, à connaître le comportement asymptotique des solutions aux frontières du domaine et à étudier leur stabilité. En outre, les méthodes numériques sont utilisées afin de résoudre ces EDP. Entre autres méthodes numériques nous avons la méthode des éléments finis (MEF). Celle-ci consiste à établir, à partir de la formulation variationnelle ou formulation faible du problème, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une EDP sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact. Le schéma numérique ainsi obtenu se doit de conserver les propriétés du problème dans le cas continu. Il se pose donc les questions d'existence et d'unicité de la solution approchée, de stabilité, de convergence.

Tous ces éléments suscités motivent notre intérêt pour l'étude des systèmes modélisés par les équations de poutre d'Euler-Bernoulli.

Dans cette thèse, nous étudions numériquement deux systèmes mécaniques. Le premier système est modélisé par une équation poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients constants. La poutre considérée est encastree à une extrémité et contrôlée à l'autre extrémité par un contrôle force et un contrôle moment proportionnels respectivement à la vitesse et à la vitesse de rotation. Notons qu'un tel système, a servi de modèle mathématique dans le cadre du programme COFS (Control of Flexible Structures) initié par la NASA afin de modéliser un long mât

flexible de 60 mètres de long fixé à sa base sur une navette spatiale et contrôlé à l'autre extrémité par un CMG (control moment gyro) [10].

Nous considérons un deuxième système modélisé par une équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables. L'intérêt lié à l'étude d'une telle équation réside dans l'apparition en ingénierie de poutres auxquelles sont associées des matériaux intelligents ([20]) tels que les matériaux piézo-électriques ou les alliages à mémoire de forme. Ces matériaux possèdent des fonctions qui leur permettent de se comporter comme un capteur (détecter des signaux), un actionneur (effectuer une action sur son environnement) ou parfois comme un processeur (traiter, comparer, stocker des informations). Ils sont capables de modifier spontanément leurs propriétés physiques en réponse à des excitations naturelles ou provoquées, venant de l'extérieur ou de l'intérieur du matériau. La poutre considérée est encastrée à une extrémité et contrôlée à l'autre extrémité en force et moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et le terme de position (respectivement l'angle de rotation) dans le contrôle force (respectivement moment). Ce système constitue un cas non uniforme du premier problème auquel est ajouté des contrôles supplémentaires.

L'objectif du présent travail est l'élaboration d'une méthode numérique semi-discrète, dissipative et convergente qui conserve les propriétés obtenues dans le cas continu. Aussi, notre étude permet de montrer les effets des paramètres de contrôles sur le comportement dynamique asymptotique de ces systèmes.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré aux rappels de quelques concepts et définitions liés à la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, à la notion de système dynamique en mathématiques et à quelques résultats d'analyse fonctionnelle. Ceux-ci portent sur quelques espaces fonctionnels et leurs propriétés, les distributions vectorielles, l'intégrabilité au sens de Bochner, les opérateurs compacts, l'existence et l'unicité de solution d'un problème d'évolution, la stabilité des systèmes linéaires et quelques inégalités qui nous seront utiles dans notre étude.

Dans le deuxième chapitre, une étude numérique pour une poutre flexible d'Euler-Bernoulli avec un contrôle force en vitesse et un contrôle moment en vitesse de rotation est effectuée. Nous montrons d'abord que ce problème est bien posé au sens des  $C_0$ -semi-groupes. Puis, nous prouvons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible au moyen de la méthode de Faedo-Galerkin avec les espaces intermédiaires définis dans [23] et les travaux d'Evans [14]. Ensuite, nous utilisons la méthode des éléments finis avec les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite, pour développer un schéma numérique semi-discret qui préserve les propriétés obtenues dans le cas continu. La convergence du schéma numérique est démontrée, une estimation de l'erreur a priori et l'ordre de convergence sont obtenues en utilisant la méthode décrite dans [3, 4].

Dans le troisième chapitre, nous considérons une poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables contrôlée en force et moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et le terme de position (respectivement l'angle de rotation) dans le contrôle force (respectivement moment). Nous développons pour ce problème une méthode numérique semi-discrète stable et convergente par la méthode des éléments finis, en utilisant les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite. Nous commençons par montrer le caractère bien posé de ce problème au sens des  $C_0$ -semi-groupes. Puis, en dépit des difficultés liées aux contrôles, nous montrons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible au moyen de la méthode de Faedo-Galerkin avec les espaces intermédiaires définis dans [23] et les travaux d'Evans [14]. Enfin, nous effectuons une estimation de l'erreur a priori pour l'approximation semi discrète obtenue et nous déterminons l'ordre de convergence en utilisant [3, 4].

Enfin, le quatrième chapitre présente les résultats de simulations numériques des problèmes traités aux chapitres 2 et 3. Dans cette partie, nous vérifions numériquement l'ordre de convergence obtenue dans les chapitres précédents. Aussi, nous étudions l'influence des paramètres de contrôles sur la dissipation de l'éner-

## **Introduction générale**

---

gie, l'amortissement des vibrations à l'extrémité libre et la convergence de ces poutres vers la position d'équilibre.

Nous terminons la rédaction de cette thèse par une conclusion générale qui rappelle nos objectifs et les résultats essentiels atteints. De plus, nous énonçons quelques perspectives pouvant faire l'objet d'extensions de nos travaux.

---

# Chapitre 1

## Généralités

Dans ce chapitre nous présentons brièvement quelques généralités concernant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et la notion de système dynamique en mathématiques. De plus, nous rappelons quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle.

### 1.1 Poutres d'Euler-Bernoulli

Les poutres sont des éléments de structures utilisées pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. La théorie des poutres est utilisée dans le domaine de la résistance des matériaux. On utilise en général la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement et la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.

#### 1.1.1 Définition

On appelle « poutre » un solide engendré par des surfaces, appelées « sections droites ». Ces sections sont telles que :

-leur centre de gravité forme une courbe continue, appelée « courbe moyenne » dont le rayon de courbure est grand devant sa longueur.



## 1.1 Poutres d'Euler-Bernoulli

---

- elles sont perpendiculaires à la courbe moyenne.
- leur dimension est petite devant la longueur de la courbe moyenne.

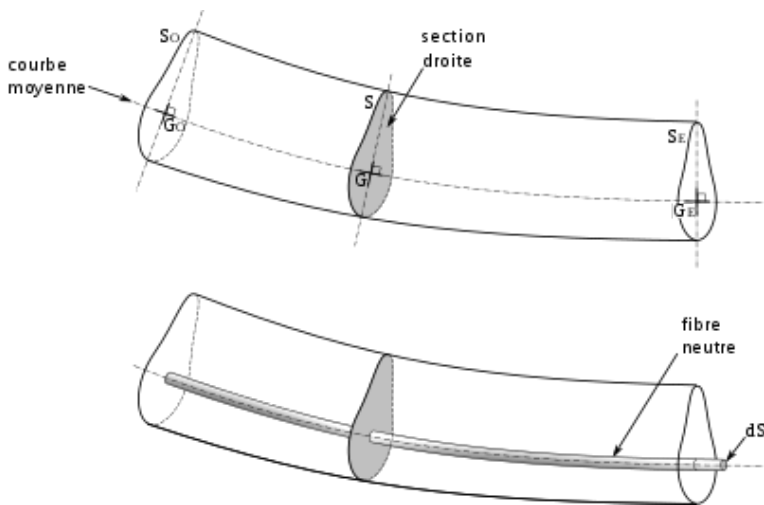


Figure 1.1 – Structure d'une poutre

### 1.1.2 Hypothèses pour la théorie d'Euler-Bernoulli

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est une simplification de la théorie linéaire de l'élasticité qui fournit un moyen de calculer les caractéristiques de charge et de déflexion des poutres. Elle couvre les cas de petites déformations des poutres soumises qu'à des charges latérales. Pour mener les calculs avec le modèle d'Euler-Bernoulli on considère que les sections droites sont indéformables, planes (dans leurs plans) et qu'elles restent perpendiculaires à la courbe moyenne au cours de la déformation. Ainsi, l'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion. Le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres. Cette hypothèse n'est pas valable pour les poutres courtes car ces dernières sont hors des limites de validité du modèle de poutre, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne.

### 1.1.3 Modélisation

La modélisation est la conception d'un modèle. Le modèle mathématique permet d'analyser des phénomènes réels et de prévoir des résultats à partir de l'application d'une ou plusieurs théories à un niveau d'approximation donné.

Afin de contrôler le comportement dynamique de grandes structures, plusieurs modèles ont vu le jour dont l'équation de poutre d'Euler-Bernoulli (voir [42] pour les différentes étapes relatives à l'élaboration de ce modèle). L'équation de poutre d'Euler-Bernoulli est un modèle bien établi qui a une large gamme d'applications découlant de l'ingénierie et de l'industrie.

Considérons une équation de poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables de longueur  $l$ , encastree à une extrémité et contrôlée à l'autre extrémité. En supposant que la densité des forces extérieures est nulle, la poutre flexible satisfait l'équation de poutre d'Euler-Bernoulli suivante :

$$\rho(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0. \quad (1.1)$$

Où  $EI$  représente la rigidité de flexion et  $\rho$  la masse linéique de la poutre.

Nous supposons aussi que, pour tout  $x \in [0, l]$  :

$$(\rho(x), EI(x)) \in [C^4(0, 1)]^2, \quad \text{avec } \rho(x) > 0, EI(x) > 0. \quad (1.2)$$

L'équation (1.1) est à compléter avec les conditions initiales :

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (1.3)$$

$$w_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < l \quad (1.4)$$

et des conditions aux limites. Les conditions aux limites de l'équation (1.1) sont définies en considérant les grandeurs suivantes dues à la flexion :

-Déplacement transversale  $w(x, t)$

## 1.2 Stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques

---

-angle de rotation dû à la flexion  $\theta(x, t) = w_x(x, t)$ ,

-moment de flexion  $M(x, t) = EIw_{xx}(x, t)$ ,

-force de cisaillement  $Q(x, t) = -(EIw_{xx})_x(x, t)$ .

On désigne par  $w_t(x, t) = v(x, t)$  la vitesse de la poutre,  $w_{tt}(x, t) = v_t(x, t)$  l'accélération et  $\theta_t(x, t) = w_{xt}(x, t)$  la vitesse de rotation. Notons aussi que  $-(EIw_{xx})_{xx}(x, t)$  est la force latérale totale agissant sur une tranche de la poutre de longueur  $dx$ , située à une position  $x$  au temps  $t$ .

À l'extrémité encastree de la poutre c'est-à-dire en  $x = 0$ , les conditions aux limites sont telles que

$$w(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$w_x(0, t) = 0 \quad t > 0. \quad (1.6)$$

À l'extrémité libre c'est-à-dire en  $x = l$ , la poutre peut être contrôlée en force et moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et le terme de position (resp. l'angle de rotation) dans le contrôle force (resp. moment). Ces contrôles nécessitent souvent l'ajout de paramètres positifs, des gains de rétroaction accordés dans la pratique.

## 1.2 Stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques

Lyapunov, dans son travail original de 1892 plus précisément dans son mémoire intitulé "Problème général de la stabilité du mouvement", a proposé deux méthodes pour démontrer la stabilité. La première méthode consiste à développer la solution en série et montrer qu'elle est convergente en passant aux limites. La deuxième méthode, qui est presque universellement utilisée de nos jours, utilise une fonction de Lyapunov  $V(x)$  qui est analogue à l'énergie mécanique d'un sys-

## 1.2 Stabilité de Lyapunov pour les systèmes dynamiques

---

tème dynamique classique. Elle est introduite comme suit pour un système ayant un point d'équilibre à  $x = 0$ . Considérons le système dynamique non linéaire  $\Sigma$  défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  est la solution du système vectorielle d'état,  $D$  est un ouvert contenant l'origine, et  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n$  est une fonctionnelle continue sur  $D$ . La méthode de stabilité de Lyapunov est principalement axée sur le système (1.7), c'est-à-dire un système à entrée nulle. En fait, de nombreux systèmes ont des entrées de contrôle externes. Si la loi de contrôle est sous la forme d'un retour d'état, les systèmes en boucle fermée sont équivalents au système (1.7). Dans ce cas, la théorie de la stabilité de Lyapunov peut être appliquée directement. Cela reste vrai si (1.7) est un système dynamique linéaire.

**Définition 1.1.** (Dérivation le long de la trajectoire d'un système) [38]

Soit le système dynamique  $\Sigma$  donné. La dérivée d'une fonctionnelle  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  le long de la trajectoire de  $\Sigma$  est définie par :

$$\frac{dV}{dt}|_{\Sigma} \equiv \frac{dV}{dt}|_{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(x(t)) - V(x_0)}{t}. \quad (1.8)$$

Il est généralement noté  $\dot{V}(x)$

**Définition 1.2.** (Fonction de Lyapunov) La fonctionnelle  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée candidate pour une fonction de Lyapunov pour un système dynamique si elle vérifie :

- i)  $V(x(t)) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $x = 0$ ,
- ii)  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ .

Ainsi, le système est dit stable au sens de Lyapunov. De plus, le système est dit asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  avec égalité si et

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

seulement si  $x = 0$ .

**Remarque 1.1.** Notons que dans *i*),  $V(0) = 0$  est requise. Sinon par exemple,  $V(x) = \frac{1}{1+|x|}$  prouverait que le système dynamique  $\dot{x}(t) = x(t)$  est localement stable.

La condition *ii*) est nécessaire pour conclure la stabilité globale.

Il est plus facile de visualiser cette méthode d'analyse en pensant à un système physique (par exemple, système-ressort vibrant avec masse) et en considérant l'énergie d'un tel système. Si le système perd de l'énergie au fil du temps et que l'énergie n'est jamais restaurée, le système doit finalement s'arrêter et atteindre un état de repos final. Cet état final est appelé attracteur. Cependant, trouver une fonction qui donne l'énergie précise d'un système physique peut être difficile, et pour certains systèmes mathématiques abstraits, économiques ou biologiques, la notion d'énergie peut ne pas être applicable. L'idée de Lyapunov est que la stabilité du système peut être prouvée sans nécessiter de connaissances sur l'énergie physique réelle. Il suffit de trouver une fonction de Lyapunov qui satisfait les contraintes de la Définition 1.46.

## 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Nous considérons pour la suite des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ . Aussi, on désigne par  $E'$  le dual topologique de  $E$  c'est-à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur  $E$ .

### 1.3.1 Topologie faible, espaces réflexifs, séparables

**Topologie faible** (voir [7] P35)

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $f \in E'$ . On désigne par  $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

définie par  $\varphi_f(x) = \langle f; x \rangle_{E', E}$ . Lorsque  $f$  décrit  $E'$  on obtient une famille  $(\varphi_f)_{f \in E'}$  d'applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.3.** [7] P35

La topologie faible  $\sigma(E, E')$  sur  $E$  est la topologie la moins fine (avec un minimum d'ouvert) sur  $E$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_f)_{f \in E'}$ .

**Espaces réflexifs** (Voir [7] P39)

Soit  $E$  un espace de Banach,  $E'$  son dual topologique (muni de la norme duale  $\|f\|_{E'} = \text{Sup}_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|$ ) et soit  $E''$  son bidual (topologique), c'est-à-dire le dual topologique de  $E'$  muni de la norme

$$\|\xi\|_{E''} = \text{Sup}_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle|$$

On a une injection canonique  $J : E \rightarrow E''$  définie comme suit : soit  $x \in E$  fixé, l'application  $f \mapsto \langle f, x \rangle_{E', E}$  de  $E'$  dans  $\mathbb{R}$  constitue une forme linéaire continue sur  $E'$  i.e. un élément de  $E''$  noté  $Jx$ . On a donc :

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \quad \forall x \in E, \forall f \in E'. \quad (1.9)$$

$J$  est linéaire et  $J$  est une isométrie i.e  $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$  pour tout  $x \in E$ ; en effet

$$\|Jx\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|_{E'} \quad (1.10)$$

Il peut arriver que  $J$  ne soit pas surjectif. A l'aide de  $J$  on peut toujours identifier  $E$  à un sous espace de  $E''$ .

**Définition 1.4.** [7] P43

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E''$  (définie précédemment). On dit que  $E$  est réflexif si  $J(E) = E''$ . Lorsque  $E$  est réflexif on identifie implicitement  $E$  et  $E''$  (à l'aide de l'isomorphisme  $J$ ).

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Théorème 1.1.** (Eberlein-Smulian). [43] P141

Soit  $E$  un espace de Banach.  $E$  est réflexif si et seulement si toute suite bornée dans  $E$  admet une sous-suite convergente pour la topologie faible  $\sigma(E, E')$ .

**Définition 1.5.** (Espaces séparables) [7] P47

On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble  $D \subset E$  dénombrable et dense.

**Corollaire 1.1.** [7] P48

Soit  $E$  un espace de Banach. Alors  $E$  est réflexif et séparable si et seulement si  $E'$  est réflexif et séparable.

**Théorème 1.2.** [7] P50

Soit  $E$  un espace de Banach réflexif et soit  $(x_n)$  une suite bornée dans  $E$ . Alors il existe une sous-suite extraite  $(x_{n_k})$  qui converge pour la topologie faible  $\sigma(E, E')$ .

On note pour la suite  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires et continues de  $E$  dans  $F$  muni de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F.$$

#### 1.3.2 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Lorsqu'une propriété quelconque  $Q$  est vérifiée pour tous les points  $x$  d'un ouvert  $\Omega$ , mis à part un sous ensemble de mesure nulle, on dit que  $Q$  est vraie presque partout dans  $\Omega$ . Si on considère un ensemble de fonctions définies sur  $\Omega$ , la propriété d'égalité presque partout est une relation d'équivalence sur cet ensemble. Nous notons  $E/p.p.$  ( $p.p.$  c'est-à-dire presque partout) l'ensemble quotient (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence pour l'égalité presque partout). Par  $dx$  nous avons noté la mesure de Lebesgue. [12] P47

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Définition 1.6.** [12] P47

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} / p.p.$$

Où  $p$  est fixé dans  $[1; \infty[$ .

$$L^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega \} / p.p.$$

On les munit (respectivement) des normes

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1; \infty[$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{Inf} \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega. \}$$

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ; on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  c'est-à-dire  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Théorème 1.3.** (Inégalité de Hölder) [7] P56

Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors  $f.g \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

**Théorème 1.4.** (Fischer-Riesz). [7] P57

$L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Théorème 1.5.** [7] P59

$L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Définition 1.7.** [7] P61

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ; on dit qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $L^p_{loc}(\Omega)$  si  $f1_K \in L^p(\Omega)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .



### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Lemme 1.1.** [7] P61

Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} f(x)u(x)dx = 0, \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Alors  $f = 0$  p.p sur  $\Omega$ .

**Théorème 1.6.** [7] P62

$L^p(\Omega)$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Théorème 1.7. (Convolution)** [7] P66

Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^N$ .

On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  et  $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ .

**Proposition 1.1.** [7] P69

Soient  $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$  et  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$  ( $k$  entier). Alors

$f * g \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$  et  $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$ .

En particulier si  $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$  et  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$  alors  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

Notons que  $D^\alpha f$  désigne ici l'une quelconque des dérivées partielles

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N \leq k.$$

**Définition 1.8.** [7] P68

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et soit  $f$  une fonction définie sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On

considère la famille de tous les ouverts  $(\omega_i)_{i \in I}$ ,  $\omega_i \subset \omega$  tels que pour chaque  $i \in I$ ,

$f = 0$  p.p. sur  $\omega_i$ . On pose  $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ .

Alors  $f = 0$  p.p. sur  $\omega$ .

Par définition, le support de  $f$  noté  $\text{supp} f$  est :  $\text{supp} f = \Omega \setminus \omega$ .

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Définition 1.9.** (suite régularisante). [7] P70

On appelle suite régularisante toute suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  de fonctions telle que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad \rho_n \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

**Théorème 1.8.** [7] P70

Soit  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ ; Alors  $\rho_n * f \rightarrow f$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^N$ .

**Théorème 1.9.** [7] P71

Soit  $f \in L^p(\mathbb{R})$  avec  $1 \leq p < \infty$ . Alors  $\rho_n * f \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

### 1.3.3 Espaces de Hilbert

**Définition 1.10.** [7] P78

Soit  $H$  un espace vectoriel. Un produit scalaire  $\langle u, v \rangle$  est une forme bilinéaire de  $H \times H$  dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, définie positive (c'est-à-dire  $\langle u, v \rangle \geq 0$ ,  $\forall u \in H$  et  $\langle u, u \rangle > 0$  si  $u \neq 0$ ).

**Définition 1.11.** [7] P78

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $H$  muni du produit scalaire  $\langle u, v \rangle$  et qui est complet pour la norme  $\langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

Dans la suite de cette sous section,  $H$  désigne un espace de Hilbert et on note  $\|u\|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}}$ .

**Définition 1.12.** [7] P80

Soit  $M \subset H$  un sous-espace vectoriel fermé. Soit  $f \in H$ . Alors  $u = P_M f$  (Projection de  $f$  sur  $M$ ) est caractérisé par

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in M \\ \langle f - u, v \rangle_H = 0 \quad \forall v \in M. \end{array} \right.$$

De plus  $P_M$  est un opérateur linéaire.

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Définition 1.13.** [7] P82

On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est

(i) continue s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

(ii) coercive s'il existe une constante  $\alpha$  telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

**Corollaire 1.2.** (Lax-Milgram) [7] P82

Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout  $\varphi \in H'$  il existe  $u \in H$  unique tel que

(i)  $a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H', H} \quad \forall v \in H.$

(ii) De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété  $u \in H$  et  $\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, v \rangle_{H', H} = \text{Min}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, v \rangle_{H', H} \right\}.$

#### 1.3.3.1 Dual d'un espace de Hilbert

Le théorème suivant montre la relation étroite qui existe entre un espace de Hilbert et son dual :

**Théorème 1.10.** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). [7] P81

Étant donné  $\varphi \in H'$ , il existe  $f \in H$  unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle_{H', H} = \langle f, v \rangle_H, \quad \forall v \in H.$$

De plus, on a  $\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$ .

On note  $B_E = \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}$  la boule unité de fermée de  $E$

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Théorème 1.11.** (Riesz) [7] P92

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, tel que  $B_E$  soit compact. Alors  $E$  est de dimension finie

**Identification de  $H$  et  $H'$**  [12] P41

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Le théorème de Riesz-Fréchet nous montre que  $H$  et  $H'$  sont isométriques et en particulier isomorphes. Ainsi, il est possible d'identifier  $H$  avec  $H'$ . Autrement dit, il est possible de faire comme si tout élément  $u$  de  $H$  était aussi un élément de  $H'$ , et d'autoriser l'écriture :  $u \in H'$ .

Prise de manière isolée une telle identification est toujours possible, mais il se peut que dans un certain contexte elle entre en conflit avec une identification déjà réalisée. Retenons que le fait de réaliser une identification (et en particulier celle liée à l'isomorphisme  $H \approx H'$ ) est une opération qui comporte des dangers. Supposons maintenant que  $V$  et  $H$  sont deux espaces de Hilbert tels que  $V \subset H$  et que l'injection de  $V$  dans  $H$  est dense. Il est clair que tout élément de  $H'$  appartient aussi à  $V'$ . De plus, le caractère dense de l'injection de  $V$  dans  $H$  assure que  $H'$  et  $V'$  ont le même élément nul. Par conséquent,  $H'$  est un sous-espace vectoriel de  $V'$ . Si on choisit par ailleurs d'identifier  $H$  avec  $H'$ , on obtient au final la chaîne d'injections :

$$V \subset H \approx H' \subset V'. \quad (1.12)$$

Ainsi, si  $u \in H$  (et en particulier si  $u \in V$ ) on autorise l'écriture  $u \in V'$  en ayant à l'esprit que :

$$\langle u, v \rangle_{V',V} = \langle u, v \rangle_H, \quad v \in V. \quad (1.13)$$

Dans cette situation simple, on peut déjà illustrer le danger majeur attaché à toute identification : le conflit entre deux identifications. En effet,  $V$  étant un espace de Hilbert, on est tenté de l'identifier lui aussi à son dual via le théorème de Riesz-

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Fréchet. C'est-à-dire de considérer :

$$V \approx V' \quad (1.14)$$

et, pour  $u \in V$ , d'autoriser l'écriture  $u \in V'$  avec la simplification implicite :

$$\langle u, v \rangle_{V',V} = \langle u, v \rangle_V, \quad v \in V. \quad (1.15)$$

Le problème est que les identifications liées à (1.12) et (1.14) sont incompatibles en général. Supposons en effet que l'on ait effectué simultanément les deux identifications. Alors, pour tout  $u \in V$  donné, on a aussi  $u \in V'$  avec à la fois les sens (1.13) et (1.15), d'où  $\langle u, v \rangle_H = \langle u, v \rangle_V$ , pour tout  $v \in V$ . Or cette égalité est absurde en général. On le vérifie aisément dans la situation où  $V, H$  sont de dimensions infinies et que l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte. On constate en effet que pour  $u \in V$ , on a  $\|u\|_V = \|u\|_H$  et par conséquent que l'identité sur  $V$  est compacte. Ceci contredit le théorème 1.11. Donc  $V$  est de dimension finie. Ainsi dans ce contexte si l'on tient à faire une identification, il faut choisir entre celle qui est liée à (1.12) et celle liée à (1.14). En général on choisit la première, et alors  $V$  et  $V'$  restent bien entendu isomorphes mais il faut distinguer les éléments de l'un avec ceux de l'autre. Si  $u \in V$  on note par exemple  $\tilde{u}$  l'élément qui lui est associé dans  $V'$  grâce au théorème de Riesz-Fréchet, c'est à dire qui vérifie :

$$\langle \tilde{u}, v \rangle_{V',V} = \langle u, v \rangle_V, \quad v \in V. \quad (1.16)$$

En identifiant  $H$  à son dual topologique  $H'$ , le premier point de la Proposition III.5 de [7] P35 permet d'avoir la définition suivante.

**Définition 1.14.** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. Une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H$  converge faiblement vers  $f$  si  $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$  pour tout  $g \in H$  (la limite est nécessairement unique). On note alors  $f_n \rightharpoonup f$ .

## 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

### 1.3.3.2 Base hilbertienne

**Définition 1.15.** [12] P42

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un système  $S = \{e_n\}_{n \geq 1} \subset H$  est appelé base hilbertienne de  $H$ , lorsque les conditions ci-dessous sont vérifiées :

- i)  $S$  est orthonormé, i.e.  $\langle e_i, e_j \rangle_H = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j \geq 1$ .
- ii) L'espace vectoriel engendré par  $S$  est dense dans  $H$ .

**Théorème 1.12.** [12] P42

Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Supposons que l'espace de Hilbert  $H$  admet une base  $\{e_n\}_{n \geq 1}$ . Pour  $k \geq 1$ , on pose  $E_k := Vect \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ , et on définit  $P_k : H \rightarrow E_k \hookrightarrow H$  par la formule

$$\forall u \in H : \quad P_k(u) = \sum_{i=1}^k \langle u, e_i \rangle_H e_i. \quad (1.17)$$

Voir [12] P42.

**Théorème 1.13.** [12] P42

La suite d'opérateurs  $(P_k)_k$  définie en (1.17) possède les propriétés suivantes :

- i) pour tout  $k \geq 1$ ,  $P_k = P_{E_k}$  est la projection orthogonale sur  $E_k$ ;
- ii)  $(P_k)_k \subset \mathcal{L}(H, H)$  et  $\|P_k\|_{\mathcal{L}(H, H)} \equiv 1$ ;
- iii) la suite  $(P_k)$  converge ponctuellement vers l'identité dans  $H$  :

$$\forall u \in H : \quad P_k(u) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } H \text{ et } \|u\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle_H^2;$$

- vi) réciproquement : soit  $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}$  donnée. Si la série réelle  $\sum_{k \geq 1} \alpha_k^2$  est convergente, alors la suite  $(v_k)_k \subset H$  définie par  $v_k := \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$  est convergente dans  $H$ . Soit  $v$  sa limite dans  $H$ , alors pour tout  $k$ ,  $v_k = P_k(v)$  et  $\alpha_k = \langle v, e_k \rangle_H$ .

### 1.3.4 Opérateurs adjoints, autoadjoints, compacts et anti-adjoint

**Définition 1.16.** [7] P26

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non-borné de  $E$  dans  $F$  toute application linéaire  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  définie sur un sous-espace vectoriel  $D(A) \subset E$ , à valeurs dans  $F$ .  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .

On dit que  $A$  est borné s'il existe une constante  $c \geq 0$  telle que

$$\|Au\| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in D(A).$$

**Définition de l'adjoint  $A^*$**  [7] P27

Soit  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  un opérateur linéaire non-borné de domaine dense. On va définir un opérateur non-borné  $A^* : D(A^*) \subset F' \rightarrow E'$  comme suit. On suppose

$$D(A^*) = \{v \in F'; \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c\|u\|, \forall u \in D(A)\}.$$

Il est clair que  $D(A^*)$  est un sous-espace vectoriel de  $F'$ . On va maintenant définir  $A^*v$  pour  $v \in D(A^*)$ . Étant donné  $v \in D(A^*)$  on considère l'application  $g : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{aligned} g(u) &= \langle v, Au \rangle, & u \in D(A). \\ |g(u)| &\leq c\|u\|, & u \in D(A). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, forme analytique, on sait que  $g$  peut être prolongée en une application linéaire  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in E.$$

Par suite  $f \in E'$ . On remarquera que le prolongement de  $g$  est unique puisque  $f$  est continue sur  $E$  et que  $D(A)$  est dense.

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

On pose

$$A^*v = f.$$

Il est clair que  $A^*$  est linéaire. L'opérateur  $A^* : D(A^*) \subset F' \rightarrow E'$  est appelé l'adjoint de  $A$ . On a par conséquent la relation fondamentale suivante qui lie  $A$  et  $A^*$  :

$$\langle v, Au \rangle_{F',F} = \langle A^*v, u \rangle_{E',E} \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

**Définition 1.17.** [7] P89

Soient  $E, F$  deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est compact si  $T(B_E)$  est relativement compact pour la topologie forte. (c'est-à-dire que l'adhérence de  $T(B_E)$  est une partie compacte de  $F$ ). On désigne par  $\mathcal{K}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $E$  vers  $F$  et on pose  $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$ .

**Proposition 1.2.** [7] P90

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach. Si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{K}(F, G)$  [resp.  $T \in \mathcal{K}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{L}(F, G)$ ], alors  $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$ .

Soit maintenant  $T \in \mathcal{L}(H)$  avec  $H$  un espace de Hilbert. En identifiant  $H$  et  $H'$ , on a  $T' \in \mathcal{L}(H)$ .

**Définition 1.18.** [7] P96

On dit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$  est autoadjoint si  $T^* = T$ , c'est-à-dire que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \quad \forall u, v \in H.$$

**Théorème 1.14.** [7] P 97

On suppose que  $H$  est un espace de Hilbert séparable. Soit  $T$  un opérateur autoadjoint compact. Alors  $H$  admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$ .

**Définition 1.19.** [34] P41

Un opérateur borné  $U$  sur  $H$  est unitaire si  $U^* = U^{-1}$ .



### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Définition 1.20.** [18] P5

Un opérateur  $U$  sur  $H$  est antiadjoint si  $D(U) = D(U^*)$  et  $U = -U^*$ .

**Théorème 1.15.** (Stone) [34] P41

Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $U$  un générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires sur  $H$  si et seulement si  $iU$  est auto-adjoint.

Notons que d'après la preuve du Théorème 1.15, on peut considérer que pour  $H$  un espace de Hilbert,  $U$  un générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires sur  $H$  si et seulement si  $U$  est antiadjoint.

#### 1.3.5 Espaces de Sobolev

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . En particulier, dans notre cas, on a  $n = 1$ .

**Définition 1.21.** [27] P63

L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ , où  $m, p \in \mathbb{N}^*$  est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ multi-indice, } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}, \quad (1.18)$$

où  $D^\alpha u$  est la dérivée d'exposant  $\alpha$  de  $u$  au sens des distributions.

Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  d'entier positifs non nuls, on désigne par

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  est la longueur du multi-indice  $\alpha$ .

Dans le cas particulier  $p = 2$ , on note  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ .

**Définition 1.22.** [33] P23

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on pose

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq m\}. \quad (1.19)$$

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

On le munit du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

**Proposition 1.3.** [27] P63

L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

On note  $C_c^{\infty}(\Omega)$  l'espace des fonctions  $C^{\infty}$  à support compact dans  $\Omega$ .

**Définition 1.23.** [33] P24

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $H_0^m(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^{\infty}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$ .

**Remarque 1.2.** [33] P25

Nous désignons par  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ .

on dit que  $\Gamma$  est continu si pour tout  $x \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $V$  (si, dans la suite, nous avons besoin de marquer la dépendance de  $V$  à  $x$ , nous le noterons) de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un nouveau système de coordonnées cartésiennes  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  tel que

- a)  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  tel que  $V$  est un hypercube dans ces nouvelles coordonnées de cotés de longueur  $2a_i$  :

$$V = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : |y_j| < a_j, \forall j = 1, \dots, n\};$$

- b) il existe une fonction  $\varphi$  définie sur

$$V' = \{(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) : |y_j| < a_j, \forall j = 1, \dots, n-1\}$$

à valeurs réelles et satisfaisant

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2}, \forall y' \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V : y_n < \varphi(y')\},$$

$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V : y_n = \varphi(y')\}.$$

De la même manière, nous disons que  $\Gamma$  est lipschitzien (respectivement de classe  $C^{k,1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $m$  fois continument différentiable,  $m \in \mathbb{N}$ ), lorsque la fonction  $\varphi$  ci-dessous est lipschitzienne (respectivement de classe  $C^{k,1}$ ,  $m$  fois continument différentiable).

**Théorème 1.16.** [33] P27

Si  $\Omega$  est à bords lipschitzien, alors  $C^\infty(\overline{\Omega})$  un dense dans  $H^m(\Omega)$ .

**Définition 1.24.** [33] P27

Soient deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$  tels que  $Y \subset X$ . On dit que  $Y$  s'injecte de manière continue dans  $X$  (en notation  $Y \hookrightarrow X$ ), si et seulement si l'opérateur identité

$$Id : Y \longrightarrow X, y \mapsto y$$

est continu. De même, on dit que  $Y$  s'injecte de manière compacte dans  $X$  (en notation  $Y \hookrightarrow_c X$ ), si et seulement si l'opérateur  $Id$  est compact de  $Y$  dans  $X$ ).

Nous énonçons maintenant les théorèmes d'injection des espaces de Sobolev.

**Théorème 1.17.** (Rellich) [33] P27

Si  $\Omega$  est un ouvert borné à bord continu, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (1.20)$$

En particulier,

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (1.21)$$

**Théorème 1.18.** (injection de Sobolev) [33] P27

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Si  $\Omega$  est un ouvert borné à bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes :

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{p}. \quad (1.22)$$

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m - \frac{n}{2} > -\frac{n}{2}. \quad (1.23)$$

**Théorème 1.19.** (Kondrašov) [33] P27

Si  $\Omega$  est un ouvert borné à bord lipschitzien, alors on a l'injection

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega) \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m - \frac{n}{2} > -\frac{n}{p}. \quad (1.24)$$

**Théorème 1.20.** [27] P 64

Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$  et si  $m > \frac{n}{2}$  alors  $H^m(\Omega)$  est un sous espace de  $C(\bar{\Omega})$ . En particulier, en dimension  $n = 1$ , on a  $H^m(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .

### 1.3.6 Distributions à valeurs réelles

**Définition 1.25.** [12] P56

On désigne par  $\mathcal{D}(\Omega)$ , l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On munit  $\mathcal{D}(\Omega)$  d'une topologie que nous caractérisons par un critère de convergence pour les suites.

**Définition 1.26.** [12] P56

Soient une suite  $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{D}(\Omega)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . On dit que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  si :

- i) il existe un compact  $K$  (fixé) tel que  $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- ii)  $\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi_k}{\partial x^\alpha} \rightarrow \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x^\alpha}$  uniformément dans  $K$ , pour tout multiindice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$   
(avec  $\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .)

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Définition 1.27.** [12] P56

On appelle distribution sur  $\Omega$ , toute forme linéaire  $T$  sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  qui vérifie les propriétés suivante :

$$\langle T, \varphi_k \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle T, \varphi \rangle \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

$$\forall \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

L'espace vectoriel des distributions est noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Définition 1.28.** [27] P56

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Pour tout multi-indice  $\alpha$ ,  $D^\alpha T$  désigne la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle \varphi, D^\alpha T \rangle.$$

On dit que  $D^\alpha T$  est la dérivée d'exposant  $\alpha$  de  $T$ .

#### 1.3.7 Quelques inégalités utiles

**Proposition 1.4.** (Inégalité de Young) [7] P56

Soient  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  avec  $1 < p, p' < \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

**Lemme 1.2.** (Lemme de Gronwall) [18] P8

Soient  $T > 0$ ,  $\lambda \in L^1(0, T)$ ,  $\lambda \geq 0$  presque partout et  $C > 0$ . Soit  $\varphi \in L^\infty(0, T)$ ,  $\varphi \geq 0$  presque partout tel que

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Alors on a :

$$\varphi(t) \leq C \exp \left\{ \int_0^t \lambda(s) ds \right\},$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

**Lemme 1.3.** (Inégalité de Ingham) [45] P162

Soit  $\gamma > 0$  et supposons que la suite strictement croissante  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de réels satisfait la condition d'écart  $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et  $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ . Alors, il existe deux constantes positives  $c$  et  $C$  dépendante seulement de  $\gamma$  et  $T$  telles que :

$$c \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2.$$

Pour toute suite de nombre complexe  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  appartenant à l'espace de Hilbert des suites de carré sommables  $\ell^2 = \{ \{a_k\} : \|a_k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty \}$ .

**Proposition 1.5.** (Inégalité de Poincaré). [27] P66

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  borné dans une direction d'espace (ou plus) . Alors, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |v|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

**Remarque 1.3.** Notons que le cadre naturel de notre étude requiert la prise en compte de fonctions dépendantes du temps et de l'espace.

Étant donnée une fonction  $u = u(x, t)$  ( $x \in \Omega$ ,  $0 \leq t \leq T$ ), il est commode de séparer les rôles des variables d'espace et de temps ([14] P351) . Ainsi, on associe à  $u$ , une application

$$\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow H$$

définie par

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x, t) \quad (x \in \Omega, 0 \leq t \leq T).$$

La fonction  $u(x, t)$  sera donc considérée comme une fonction définie sur  $[0, T]$  à valeurs

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

dans un espace  $H$ , où  $H$  est un espace de fonctions qui dépendent uniquement de  $x$  comme par exemple les espaces de Hilbert ( $L^2(\Omega)$ ,  $H^2(\Omega)$ , etc).

En outre dans notre étude,  $\mathbf{u}(t) := u(t)$  désignera un élément de  $H$ .

#### 1.3.8 Intégrabilité au sens de Bochner

La théorie de l'intégration de Bochner étend celle de Lebesgue aux fonctions à valeurs vectorielles.

##### 1.3.8.1 Caractérisation de l'intégrabilité au sens de Bochner

Soit  $E$  est un espace de Banach réflexif et séparable. On considère l'espace mesuré  $(\Omega, \beta, dx)$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\beta$  la tribu des boréliens sur  $\Omega$  et  $dx$  la mesure de Lebesgue. Pour caractériser l'intégrabilité, on définit d'abord la notion de mesurabilité. Il se trouve que dans le cas d'une fonction vectorielle, il y a au moins deux autres notions différentes qui se rajoutent. Une fonction  $f : \Omega \rightarrow E$  peut être qualifiée de  $\beta$ -mesurable, fortement mesurable et faiblement mesurable.

[12] P51

**Définition 1.29.** [13] P52

Une fonction  $f : \Omega \rightarrow E$  est :

- $\beta$ -mesurable si l'image réciproque de tout borélien de  $E$  appartient à l'ensemble des boréliens  $\beta$  de  $\Omega$ ;
- simple si elle est  $\beta$ -mesurable, s'annule en dehors d'un ensemble de mesure finie et prend un nombre fini de valeurs.

**Définition 1.30.** [12] P52

Une fonction  $f : \Omega \rightarrow E$  est :

- fortement mesurable si  $f$  est la limite ponctuelle (i.e. au sens de la norme  $\|\cdot\|_E$ ) d'une suite de fonctions simples de  $E$ ;

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

– faiblement mesurable, si pour tout  $\eta \in E'$  la fonction réelle  $\langle \eta, f(t) \rangle$  est mesurable

Puisque  $E$  est séparable et réflexif, les trois notions de mesurabilité coïncident. Avec ces définitions, on a la caractérisation suivante :

**Proposition 1.6.** [12] P52

$f$  est intégrable sur  $\Omega$  au sens de Bochner si et seulement si

$$f \text{ est fortement mesurable et } \int_{\Omega} \|f\|_E dx < \infty. \quad (1.25)$$

#### 1.3.8.2 Espaces $L^p(\Omega; E)$

**Définition 1.31.** [12] P52

On a :

$$L^p(\Omega; E) = \left\{ f : \Omega \rightarrow E, \text{ fortement mesurable et } \int_{\Omega} \|f\|_E^p dx < \infty \right\} / p.p.$$

pour  $p \in [1, \infty[$ ,

$$L^\infty(\Omega; E) = \{ f : \Omega \rightarrow E, \text{ fortement mesurable et} \\ \exists C > 0 \text{ telle que } \|f(x)\|_E < C \text{ p.p dans } \Omega \} / p.p.$$

que l'on munit (respectivement) de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega; E)} = \left( \int_{\Omega} \|u\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega; E)} = \inf \{ C > 0 : \|u(x)\|_E < C \text{ p.p dans } \Omega \}.$$



### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

#### Remarque 1.4.

a) Lorsque l'on ne précise pas l'espace  $E$ , cela veut dire que l'on prend  $E = \mathbb{R}$  et on note  $L^p(\Omega) = L^p(\Omega; \mathbb{R})$ .

Dans la suite, on prend  $p \in [1, \infty[$  et on note  $p'$  son exposant conjugué. L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise comme suit :

#### Proposition 1.7. [12] P52

Soit  $T > 0$ . Pour tout  $f \in L^p(0, T; E)$  et  $g \in L^{p'}(0, T; E')$ , la fonction réelle  $\langle g(t), f(t) \rangle_{E', E}$  est intégrable sur  $(0, T)$ . De plus on a :

$$\int_0^T |\langle g(t), f(t) \rangle_{E', E}| dt \leq \|g\|_{L^{p'}(0, T; E')} \|f\|_{L^p(0, T; E)}. \quad (1.26)$$

#### Théorème 1.21. (Convergence dominée de Lebesgue). [12] P54

Soit  $p \in [1, \infty[$  et  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega; E)$  qui vérifie les deux conditions suivantes :

- i)  $f_m \rightarrow f$  p.p sur  $\Omega$ .
- ii) Il existe  $g \in L^p(\Omega)$  telle que,  $\|f_m\|_E \leq g$  p.p.

Alors  $f_m \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega; E)$ .

Le théorème suivant regroupe certaines propriétés topologiques de ces espaces :

#### Théorème 1.22. [12] P53

- a) Pour tout  $p \in [1, \infty]$ ,  $L^p(\Omega; E)$  muni de  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega; E)}$  est un espace de Banach.
- b) Si  $E$  est séparable et  $p < +\infty$  alors  $L^p(\Omega; E)$  est séparable.
- c) Si  $E'$  est séparable alors pour tout  $p \in [1, \infty[$  fixé, l'application

$$g \in L^{p'}(\Omega; E') \mapsto T_g \in (L^p(\Omega; E))' \quad \text{telle que } \langle T_g, f \rangle = \int_{\Omega} \langle g(x), f(x) \rangle_{E', E} dx$$

est un isomorphisme.

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Théorème 1.23.** (Fubini). [12] P55

Soient  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$  et  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$  deux ouverts et  $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2; E)$ . Alors pour presque tout  $x \in \Omega_1$ , l'application partielle  $y \in \Omega_2 \mapsto f(x, y) \in E$  est intégrable. De plus l'application  $x \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) dx$  est intégrable et on a :

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

#### 1.3.8.3 Espaces $W^{1,p}(I; E)$

**Définition 1.32.** [13] P43

Soit  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $p \in [1, +\infty]$ . On définit l'espace

$$W^{1,p}(I; E) = \{u \in L^p(I; E) \mid u' \in L^p(I; E)\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I; E)} = \|u\|_{L^p(I; E)} + \|u'\|_{L^p(I; E)}.$$

Notons que  $u'$  est la dérivée au sens des distributions de  $u$ .

**Théorème 1.24.** [13] P43

Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $W^{1,p}(I; E)$  est un espace de Banach.

**Proposition 1.8.** [13] P43

Si  $E$  est séparable et  $p < +\infty$ , alors  $W^{1,p}(I; E)$  est séparable.

**Proposition 1.9.** [13] P44

Si  $1 < p < +\infty$  et  $E$  est séparable réflexif, alors  $W^{1,p}(I; E)$  est réflexif.

### 1.3.9 Distributions à valeurs vectorielles

L'espace vectoriel des distributions sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $E$  est noté  $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ .

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Définition 1.33.** [12] P62

On appelle distribution sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ , toute application  $T$  vérifiant les conditions suivantes :

- i)  $T$  est une application linéaire de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $E$ .
- ii)  $T$  est continue, dans le sens où l'implication ci-dessous est vérifiée :

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Théorème 1.25.** [12] P63

Soit  $f \in L^1(\Omega; E)$ . On considère  $T_f$  définie par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On a les résultats suivants :

- i)  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ .
- ii) l'application  $f \in L^1(\Omega; E) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$  est linéaire, continue et injective. Ceci permet d'identifier  $L^1(\Omega; E)$  à un sous espace de  $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ ;
- iii) la fonction  $f$  est indéfiniment dérivable au sens des distributions. Si de plus  $f \in C^1(\Omega; E)$  alors on a

$$T'_f = T_{f'}. \tag{1.27}$$

Considérons  $\tau > 0$ .

**Lemme 1.4.** [12] P64

Soit  $u \in L^1(0, \tau; E)$  alors

$$T'_u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(0, \tau) \iff u(t) = C \text{ presque partout dans } (0, \tau), \tag{1.28}$$

où  $C \in E$  est une constante.

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Proposition 1.10.** [12] P65

Soit  $E$  un espace de Banach, de dual  $E'$  et soient  $u, g \in L^1(0, \tau; E)$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la fonction  $u$  coïncide presque partout avec une primitive de  $g$  i.e.  $\exists \xi \in E$  et

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \text{ presque partout } t \in (0, \tau),$$

ii) pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(0, \tau)$  on a

$$\int_0^\tau u(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^\tau g(t)\varphi(t)dt \quad (1.29)$$

(ou autrement dit :  $g = u'$  dans le sens  $\mathcal{D}'(0, \tau; E)$ ),

iii)  $\forall \eta \in E'$

$$\frac{d}{dt} \langle \eta, u \rangle = \langle \eta, g \rangle, \text{ dans } \mathcal{D}'(0, \tau). \quad (1.30)$$

Si l'une de ces propriétés équivalentes est satisfaite, alors  $u$  coïncide presque partout avec une fonction  $\tilde{u} \in C([0, \tau]; E)$ .

#### 1.3.10 Quelques résultats utiles en EDP

Dans ce qui suit,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^s$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On note  $\lambda_d$  la mesure de Lebesgue en dimension  $d$ . Aussi,  $E, F, G$  sont des espaces de Banach.

i) [13] P27 et P28

Lorsque  $p \in [1; \infty[$ , l'espace  $L^p(U; L^p(\Omega))$  est canoniquement isomorphe à l'espace  $L^p(U \times \Omega)$ . D'où  $L^p(U; L^p(\Omega))$  est naturellement identifiable à  $L^p(U \times \Omega)$ .

ii) [13] P39

Lorsque  $T \in \mathcal{D}'(I; E)$  et  $l : E \rightarrow F$  est linéaire continue entre espaces de

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Banach, on définit la distribution  $l(T) \in \mathcal{D}'(I; F)$  par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle l(T), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I; F), \mathcal{D}(I)} = l(\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I; E), \mathcal{D}(I)})$$

$l(T)$  est bien une distribution vectorielle sur  $I$  à valeur dans  $F$  et on a  $l(T') = l(T)'$ .

**Proposition 1.11.** [13] P53

Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ .  $l : E \rightarrow F$  est linéaire continue alors  $l$  induit l'application linéaire continue

$$\begin{cases} W^{1,p}(0, T; E) & \rightarrow & W^{1,p}(0, T; F) \\ & u & \mapsto & l(u) \end{cases}$$

et on a, pour tout  $u \in W^{1,p}(0, T; E)$ ,  $(l(u))' = l(u')$  dans  $L^p(0, T; F)$ .

Ce résultat nous permet de démontrer des relations très utiles pour obtenir des estimations sur les solutions d'EDP.

Par exemple, si  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $u \in W^{1,p}(0, T; L^1(\Omega))$  ( ), on veut montrer que l'on peut écrire (en un certain sens à préciser)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u(t, x) dx.$$

Avec ce qui précède, c'est très simple : soit  $l : E = L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  l'application linéaire continue définie par  $l(f) = \int_{\Omega} f(x) dx$ ; on sait, puisque  $u \in W^{1,p}(0, T; E)$  que  $l(u) \rightarrow \int_{\Omega} u(t, x) dx$  est dans  $W^{1,p}(0, T; \mathbb{R})$ , et on peut donc parler de sa dérivée comme élément de  $L^p(0, T)$ ; on sait de plus que cette dérivée est  $l(u)' = l(u') : \int_{\Omega} u_t(t, x) dx$  ce qui donne la relation voulue (  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx$  est une dérivée au sens des distributions dans  $]0, T[$  et l'égalité a lieu dans  $L^p(0, T)$ , i.e. pour presque tout  $t \in ]0, T[$  ).

**Proposition 1.12.** [13] P54

Soit  $(p, q) \in [1; +\infty[$  et  $1 \leq r \leq +\infty$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ . Si  $B : E \times F \rightarrow G$  est

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

bilinéaire continue alors  $B$  induit l'application bilinéaire continue

$$\begin{cases} W^{1,p}(0, T; E) \times W^{1,q}(0, T; F) & \rightarrow W^{1,r}(0, T; G) \\ (u, v) & \mapsto B(u, v), \end{cases}$$

On a de plus, pour tout  $(u; v) \in W^{1,p}(0, T; E) \times W^{1,q}(0, T; F)$ ,

$$(B(u, v))' = B(u', v) + B(u, v')$$

$$\forall (s, t) \in [0; T]^2, \int_s^t B(u(\tau), v'(\tau))d\tau = B(u(t), v(t)) - B(u(s), v(s)) - \int_s^t B(u'(\tau), v(\tau))d\tau.$$

Ce résultat nous permet aussi de justifier un calcul très fréquent en EDP : l'intégration par parties.

Par exemple, si  $(u; v) \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) := W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ , en considérant  $B : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire continue définie par  $B(f; g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u(t, x) \frac{dv}{dt}(t, x) dx dt &= \int_{\Omega} u(T, x)v(T, x) dx - \int_{\Omega} u(0, x)v(0, x) dx \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} u(t, x) \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

En se souvenant que, lorsque  $(f, g) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , on a  $fg \in L^1(0, T; L^1(\Omega)) = L^1(]0, T[ \times \Omega)$  on peut aussi remplacer toutes les intégrales  $\int_0^T \int_{\Omega}$  ci-dessus par des intégrales  $\int_{]0, T[ \times \Omega}$ .

On constate aussi, avec  $B : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$  définie par  $B(f, g) = fg$ , que pour toute application  $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , on a  $u^2 \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$  et  $\frac{d}{dt}(u^2) = 2u \frac{du}{dt}$ .

**Proposition 1.13.** [13] P56

Soit  $T > 0$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $(p, q) \in [1, +\infty[$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i)  $W^{1,p}(0, T; L^q(\Omega))$ ,

## 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

ii)  $L^1_{loc}(\]0, T[ \times \Omega)$  vérifie

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} |u(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt < +\infty,$$

et  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1_{loc}(\]0, T[ \times \Omega)$  vérifie

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt < +\infty.$$

Dans ce cas on a, pour presque tout  $t \in \]0, T[$ ,  $u'(t)(\cdot) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$  presque partout sur  $\Omega$ .

**Remarque 1.5.**  $\frac{\partial u}{\partial t}$  représente la dérivée, dans la direction  $t$  et au sens des distributions sur  $\]0, T[ \times \Omega$  de  $u \in L^1_{loc}(\]0, T[ \times \Omega)$ .

**Proposition 1.14.** [13] P58

Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $\mathcal{D}(\Omega)$  s'injecte continument et densément dans  $E$ . Soit  $L^1_{loc}(\]0, T[ \times \Omega) = L^1(0, T; L^1(\Omega))$ ; on note  $D_t u$  la dérivée de  $u$  dans  $\mathcal{D}'(\]0, T[ \times \Omega)$  et  $u_t$  la dérivée de  $u$  dans  $\mathcal{D}'(0, T; L^1(\Omega))$ .

i) Si  $D_t u \in L^1(0, T; E')$ , on a  $u_t = D_t u$  dans  $\mathcal{D}'(0, T; E' + L^1(\Omega))$ ,

ii) Si  $u_t \in L^1(0, T; E')$ , on a  $u_t = D_t u$  dans  $\mathcal{D}'(\]0, T[ \times \Omega)$ .

### 1.3.11 Espaces intermédiaires

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert séparables telles que :

$$X \subset Y, X \text{ dense dans } Y \text{ avec injection continue} \quad (1.31)$$

Soient  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  les produits scalaires respectivement dans  $X$  et dans  $Y$ .

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

**Lemme 1.5.** [41]

A toute forme bilinéaire continue  $a$  sur  $X$ , on peut associer un opérateur linéaire continu  $A$  de  $X$  dans  $X'$  telle que

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{X', X}, \quad \forall u, v \in X.$$

Soit  $A$  un opérateur linéaire (de domaine  $D(A)$ ) d'un espace de Banach  $E$  dans  $E$ . Nous désignons par  $\rho(A)$  l'ensemble résolvant de  $A$  défini par :

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \text{ est borné sur } E \}$$

et  $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  son spectre, qui se décompose en trois sous-ensembles :

- $\mathcal{P}_\sigma$  : il contient tous les  $\lambda$  tels que l'opérateur linéaire  $\lambda I - A$  n'ait pas d'inverse, c'est le spectre ponctuel et ses éléments sont les valeurs propres de  $A$  ;
- $\mathcal{C}_\sigma$  : il contient tous les  $\lambda$  pour lesquels l'opérateur linéaire  $\lambda I - A$  ait un inverse dont le domaine est dense dans  $E$  mais qui n'est pas continu. C'est le spectre continu ;
- $\mathcal{R}_\sigma$  : il contient tous les  $\lambda$  pour lesquels l'opérateur linéaire  $\lambda I - A$  ait un inverse dont le domaine n'est pas dense dans  $E$ . C'est le spectre résiduel.

**Définition 1.34.** [26] P1

– L'opérateur linéaire  $A$  est positif si  $]-\infty, 0[ \subseteq \rho(A)$  et

$$M := \sup_{\lambda > 0} \|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| < \infty.$$

– Si en plus,  $0 \in \rho(A)$ , l'opérateur  $A$  est dit strictement positif.

On suppose que  $\alpha \in ]0, 1[$  et que l'opérateur linéaire  $A$  est positif.

**Définition 1.35.** [26] P57 et P58

L'opérateur de Balakrishnan de base  $A$  et d'exposant  $\alpha$  est un opérateur linéaire, noté



### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

$J_A^\alpha$ , de même domaine que  $A$  et défini par :

$$\forall x \in D(A), \quad J_A^\alpha := \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} Ax dt. \quad (1.32)$$

$J_A^\alpha$  est bien défini. En effet :

$$\int_0^\infty \|t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} Ax\| dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} (M+1) \|x\| dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1} \frac{M}{t} \|Ax\| dt$$

avec  $M$  de la Définition 1.34.

On peut maintenant définir les puissances  $A^\alpha$ .

**Définition 1.36.** (Puissances fractionnaires) [26]

Une puissance fractionnaire de l'opérateur  $A$ , notée  $A^\alpha$ , est définie par :

- i)  $A^\alpha := J_A^\alpha$ , lorsque l'opérateur linéaire  $A$  est borné sur  $E$ ;
- ii)  $A^\alpha := (J_{A^{-1}}^\alpha)^{-1}$ , et prolonge  $\overline{J_A^\alpha}$ , lorsque l'opérateur linéaire  $A$  est non-borné et  $0 \in \rho(A)$ ;
- iii)  $A^\alpha x := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha x$ , lorsque l'opérateur linéaire  $A$  est non-borné,  $0 \in \sigma(A)$  et  $D(A^\alpha)$  donné par

$$\left\{ x \in \overline{D(A)} \mid \exists \varepsilon_0 > 0, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 : x \in D((A + \varepsilon)^\alpha), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (A + \varepsilon)^\alpha x \text{ existe} \right\}$$

**Construction de l'opérateur  $\Lambda$ .** [23] P11 à P13

L'espace  $X$  peut être défini comme le domaine d'un opérateur  $\Lambda$  non borné (noté  $D(\Lambda)$ ) dans  $Y$ , autoadjoint, positif ( $\Lambda$  étant d'ailleurs non unique !),  $X$  ayant une norme équivalente à la norme du graphe

$$(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in D(\Lambda) = X. \quad (1.33)$$

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Désignons par  $D(S)$  l'ensemble des  $u$  tels que la forme antilinéaire

$$v \mapsto \langle u, v \rangle_X, \quad v \in X \quad (1.34)$$

soit continue pour la topologie induite par  $Y$ . Alors

$$\langle u, v \rangle_X = \langle Su, v \rangle_Y \quad (1.35)$$

Ce qui définit  $S$  comme un opérateur non borné dans  $Y$ , de domaine  $D(S)$ .

On vérifie que :

$S$  est dense dans  $Y$ ,

$S$  est un opérateur auto-adjoint, i.e.  $S$  coïncide avec  $S^*$  (ce qui signifie que leurs domaines coïncident) et strictement positif. En effet, il existe une constante  $c$  telle que :

$$\langle Sv, v \rangle_Y = \|v\|_X^2 \geq c\|v\|_Y^2. \quad (1.36)$$

Utilisant la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints (voir [44], [35], [39]), on peut définir les puissances  $S^\theta$  de  $S$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (et même  $\theta \in \mathbb{C}$ .)

On utilisera en particulier

$$\Lambda = S^{\frac{1}{2}}. \quad (1.37)$$

L'opérateur  $\Lambda$  est auto-adjoint positif dans  $Y$ , de domaine  $X$ . On déduit des équations (1.35)-(1.37) que :

$$\langle u, v \rangle_X = \langle \Lambda u, \Lambda v \rangle_Y. \quad (1.38)$$

L'opérateur  $S$  dépend du choix des produits scalaires sur  $X$  et  $Y$  sans changer évidemment les topologies de  $X$  et  $Y$  et donc l'opérateur  $\Lambda$  dépend aussi de ces produits scalaires ; il n'est donc pas intrinsèquement lié aux espaces  $X$  et  $Y$ .

**Définition 1.37.** [23] P13

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Sous l'hypothèse (1.31) et  $\Lambda$  étant défini par (1.37) on pose

$$[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}), \quad (\text{domaine de } \Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (1.39)$$

avec norme sur  $[X, Y]_\theta =$  norme du graphe de  $\Lambda^{1-\theta}$ , i.e.  $(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\theta}u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}$ .  
du graphe de  $\Lambda^{1-\theta}$ , qui en fait un espace de Hilbert.

**Remarque 1.6.** [23] P13

– On a :

$$[X, Y]_0 = X, \quad [X, Y]_1 = Y.$$

– Des propriétés de la décomposition spectrale, il résulte que  $X$  est dense dans  $[X, Y]_\theta$ .

**espace**  $W(a, b)$  [23] P13

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels, finis ou non,  $a < b$ .

Nous allons nous intéresser aux propriétés de densité, de prolongement et de continuité dans ces espaces dits « intermédiaires ». Pour cela, nous introduisons un nouvel espace :

$$\text{Pour un entier } m \geq 1, \text{ on pose } W(0, \tau) = \left\{ u \mid u \in L^2(a, b; X), \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a, b; Y) \right\}, \quad (1.40)$$

où  $u^{(m)}$  est calculée au sens des distributions  $\mathcal{D}'(]a, b[; X)$ . Muni de la norme

$$\|u\|_{W(a,b)} = [\|u\|_{L^2(a,b;X)} + \|u^{(m)}\|_{L^2(a,b;Y)}]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.41)$$

$W(a, b)$  est un espace de Hilbert (en effet c'est un espace complet pour cette norme).

Donnons à présent le « théorème des dérivées intermédiaires ».

**Théorème 1.26.** [23] P19

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert avec (1.31) et  $[X, Y]_\theta$  défini par (1.39).

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Si  $u \in W(a, b)$ , on a :

$$u^{(j)} \in L^2(a, b; [X, Y]_{j/m}), \quad 1 \leq j \leq m - 1. \quad (1.42)$$

En outre, l'application  $u \mapsto u^{(j)}$  est linéaire continue de

$$W(a, b) \rightarrow L^2\left(a, b; [X, Y]_{j/m}\right).$$

Nous énonçons ensuite les propriétés de densité, de prolongement et de continuité.

Notons que  $\mathcal{D}([a, b]; X)$  désigne l'espace des fonctions qui sont indéfiniment différentiables pour  $a \leq t \leq b$  à valeurs dans  $X$  et à support compact.

**Proposition 1.15.** (Densité) [23] P14

L'espace  $\mathcal{D}([a, b]; X)$  est dense dans  $W(a, b)$ .

Dans la suite, nous prenons  $m \geq 1$ .

**Proposition 1.16.** (Prolongement). [23] P17

On suppose que l'un au moins des  $a$  et  $b$  est fini. Il existe un opérateur linéaire continu  $u \mapsto p(u)$  de  $W(a, b)$  dans  $W(+\infty, +\infty)$  tel que

$$p(u) = u \text{ presque partout sur } ]a, b[. \quad (1.43)$$

**Proposition 1.17.** (Continuité). [23] P23

Considérons  $a$  et  $b$  finis. Pour tout  $u \in W(a, b)$ , on a :

$$u^{(j)} \in C\left([a, b]; [X, Y]_{(j+\frac{1}{2})/m}\right), \quad 1 \leq j \leq m - 1. \quad (1.44)$$

l'application  $u \mapsto u^{(j)}$  étant linéaire continue de  $W(a, b)$  dans  $C\left([a, b]; [X, Y]_{(j+\frac{1}{2})/m}\right)$ .

**Dualité** [23] P34

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

Puisque

$$X \subset [X, Y]_\theta \subset Y, \quad (1.45)$$

chaque espace étant dense dans le suivant, on a par dualité (sans aucune identification entre espace et son dual) :

$$Y' \subset [X, Y]'_\theta \subset X' \quad (1.46)$$

Énonçons maintenant le théorème de dualité dans les espaces intermédiaires.

**Théorème 1.27.** [23] P34

Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , on a :

$$[X, Y]'_\theta = [X', Y']_{1-\theta}. \quad (1.47)$$

avec équivalence des normes.

#### 1.3.12 Existence et unicité de solution d'un problème d'évolution

##### 1.3.12.1 Quelques rappels sur la théorie des semi-groupes

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel.

**Définition 1.38.** [34] P1

Soit  $X$  un espace de Banach. une famille à un paramètre  $T(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , d'opérateurs linéaires bornés de  $X$  dans  $X$  est un semi-groupe d'opérateur d'opérateur linéaire borné sur  $X$  si

- i)  $T(0) = I$  ( $I$  est l'opérateur identité sur  $X$ ),
- ii)  $T(t + s) = T(t)T(s)$ ,  $\forall s, t \geq 0$  (la propriété du semi-groupe).

**Définition 1.39.** [34] P4

Un semi-groupe  $T(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  d'opérateurs linéaires bornés sur  $X$  est un semi-

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés (ou est un  $C_0$ -semi-groupe)

si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X. \quad (1.48)$$

**Définition 1.40.** [34] P8

Soit  $T(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  un  $C_0$  semi-groupe. Il est dit contractant si :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.49)$$

**Définition 1.41.** [34] P1

L'opérateur linéaire  $A$  défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\} \quad (1.50)$$

et

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \quad \text{pour } x \in D(A). \quad (1.51)$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe  $T(t)$ ,  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .

**Définition 1.42.** [18] P5 et P4

$A$  est dissipatif dans  $H$  si et seulement si

$$\langle Au, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A). \quad (1.52)$$

Si, en plus, il existe  $\lambda_0 \geq 0$  tel que l'opérateur  $I - \lambda_0 A$  est surjectif, alors il est dit  $m$ -dissipatif.

Énonçons les deux théorèmes suivants qui sont très important dans la réalisation de nos travaux.

**Théorème 1.28.** (Lumner-Phillips) [34] P14

Soit  $A$  un opérateur linéaire de domaine dense dans  $X$ .

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

- i) Si  $A$  est dissipatif et il existe  $\lambda_0 \geq 0$  tel  $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$  alors  $A$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions sur  $X$ .
- ii) Si  $A$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions sur  $X$  alors  $A$  est dissipatif et  $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ .

#### **Théorème 1.29.** [34] P5

Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ - semi-groupe de contractions  $(T(t))_{t \geq 0}$ .

Alors :

- i) le domaine  $D(A)$  de  $A$  est dense dans  $H$  ;
- ii)  $A$  est un opérateur linéaire fermé.

#### 1.3.12.2 Existence et unicité de solution

#### **Théorème 1.30.** (Cauchy-Lipschitz-Picard). [7] P 104

Soient  $X$  un espace de Banach et  $F : X \rightarrow X$  une application telle que

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq L\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X \quad (L \geq 0).$$

Alors pour tout  $u_0 \in X$ , il existe  $u \in C^1([0, +\infty[; X)$  unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Fu(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.53)$$

Soit le problème d'évolution ( problème de Cauchy abstrait )

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.54)$$

#### **Théorème 1.31.** [34] P102

Soit  $A$  un opérateur linéaire dense dans un espace de Banach  $X$  d'ensemble résolvant

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

$\rho(A)$  non vide. Le problème de Cauchy (1.54) admet une solution unique pour  $u_0 \in D(A)$ , qui est continue et différentiable pour tout  $t \geq 0$  si et seulement si  $A$  générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $X$ .

**Théorème 1.32.** (Hille-Yosida-Phillips)[18] P 6

Soit  $X$  un espace de Banach et  $A$  un opérateur  $m$ -dissipatif dans  $X$ , de domaine dense. Alors il existe un unique semi-groupe de contractions  $T(t)$  tel que pour tout  $u_0 \in D(A)$ ,  $u(t) = T(t)u_0$  est l'unique solution du problème (1.54) avec

$$u \in C^1\left([0, +\infty[; X\right) \cap C\left([0, +\infty[; D(A)\right) \quad (1.55)$$

**Remarque 1.7.** [7]  $u$  est appelée solution « classique » de (1.54). Dans le cas général où  $u_0 \in H$ , il peut se produire que  $u(t) \notin D(A)$ ,  $\forall t > 0$  et que  $u(t)$  ne soit différentiable en aucun point de  $]0, +\infty[$ . Donc, a fortiori  $u(t)$  ne peut pas être une solution « classique » de (1.54). En fait, dans ce cas, le problème (1.54) ne possède aucune solution au sens classique. Néanmoins, on considère  $u(t)$  comme une solution « généralisée » de (1.54).

**Remarque 1.8.** [34] P105

Il existe de nombreuses manières de définir une solution généralisée du problème (1.54). Tous mènent finalement à  $T(t)x$ . Une telle façon de définir une solution généralisée de (1.54) est la suivante : Une fonction continue  $u$  sur  $[0, \infty[$  est une solution généralisée de (1.54) s'il existe  $x_n \in D(A)$  tel que  $x_n \rightarrow u(0)$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $T(t)x_n \rightarrow u(t)$  uniformément sur des intervalles bornés. Il est évident que la solution généralisée ainsi définie est indépendante de la suite  $\{x_n\}$ , est unique et si  $u(0) \in D(A)$  elle donne la solution de (1.54). Clairement, avec cette définition de solution généralisée, (1.54) a une solution pour tout  $x \in X$  et cette solution généralisée est  $T(t)x$ .

**Définition 1.43.** [17]

Un problème est dit bien posé



### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

- s'il admet une solution et une seule,
- si cette solution dépend continument des données initiales.

En particulier le problème (1.54) est bien posé (au sens des  $C_0$ -semi-groupe de contraction) s'il admet une unique solution (sous la forme d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction) qui dépend de façon continue des données initiales .

#### 1.3.13 Principe d'invariance de LaSalle et stabilité forte

Dans toute cette sous section,  $H$  est un espace de Hilbert,  $\mathcal{L}(H)$  désigne l'espace des applications linéaires continues de  $H$  dans  $H$ .  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  de contractions sur  $H$ .

Nous commençons par introduire des notions relatives à l'étude du comportement asymptotique (trajectoires, ensemble  $\omega$ -limite...) des systèmes dynamiques puis nous introduisons la notion de fonction de Lyapunov et le principe d'invariance qui sont des outils commodes pour étudier la stabilité de tels systèmes.

Considérons la définition suivante pour les systèmes dynamiques.

**Définition 1.44.** [18] P10

Soit  $(Z, d)$  un espace métrique complet.

Un système dynamique sur  $Z$  est une famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'application sur  $Z$  telle que :

- i)  $S(t) \in C(Z, Z), \quad \forall t \geq 0,$
- ii)  $S(0) = I_d,$
- iii)  $S(t + s) = S(t) \circ S(s), \quad \forall s, t \geq 0,$
- iv)  $\forall z \in Z, S(t)z \in C([0, +\infty), Z).$

**Définition 1.45.** (Trajectoire, ensemble  $\omega$ -limite). [18] P 11

Pour tout  $z \in Z,$

- i) La courbe continue  $t \mapsto S(t)z$  est appelée trajectoire issue de  $z$ .
- ii) L'ensemble  $\omega(z) = \{y \in Z / \exists t_n \rightarrow +\infty; S(t_n)z \rightarrow y, \text{ lorsque, } n \rightarrow +\infty\}$  est appelé ensemble  $\omega$ -limite de  $z$ .

## 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

### 1.3.13.1 Principe d'invariance de LaSalle

**Définition 1.46.** (Fonction de Lyapunov).

La fonctionnelle  $V : H \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée candidate pour une fonction de Lyapunov pour un système dynamique si elle vérifie :

- i)  $V(z) > 0, \quad \forall z \in H \setminus \{0\},$
- ii)  $V(0) = 0,$
- iii)  $\dot{V}(z) \leq 0.$

**Théorème 1.33.** (Principe d'invariance de LaSalle). [18] P 18

Soit  $V$  une fonction de Lyapunov pour  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  et soit  $z \in Z$  tel que  $\cup_{t \geq 0} S(t)z$  est relativement compacte dans  $Z$ . Alors

- i)  $c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(S(t)z)$  existe;
- ii)  $V(y) = c, \forall y \in \omega(z).$

En particulier :  $\forall y \in \omega(z), \forall t \geq 0, V(S(t)y) = V(y).$

### 1.3.13.2 Stabilité forte

Dans le cas où le système dynamique  $(S(t))_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de contractions (linéaire) sur un espace de Banach  $X$ , pour établir que les trajectoires sont précompactes dans  $X$ , il suffit de montrer qu'il existe un  $\lambda > 0$  tel que la résolvante  $R(\lambda, A)$  soit compacte et on montre dans ce cas que pour tout  $z_0 \in D(A)$ , l'ensemble  $\omega$ -limite correspondant  $\omega(z_0)$  est contenu dans  $D(A)$ , ce qui permet de mieux le caractériser, en particulier, lorsqu'il existe une fonction de Lyapunov différentiable. Le principe d'invariance de LaSalle s'énonce alors comme suit :

**Proposition 1.18.** [21] P 19

S'il existe une fonction  $V$  telle que  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  le long des trajectoires de  $S(t)$ , et un réel  $\lambda > 0$  tel que la résolvante  $R(\lambda, A)$  soit compacte, alors pour tout  $z_0 \in X$

- i) La trajectoire  $\{S(t)z_0\}_{t \geq 0}$  est précompacte dans  $X$ ,

### 1.3 Rappels de quelques résultats d'analyse fonctionnelle

---

ii) Si  $z_0 \in D(A)$ , l'ensemble  $\omega(z_0)$  est contenu dans  $M$ ,

où  $M$  est le plus grand sous ensemble invariant de  $S = \{z \in D(A) / \frac{dV}{dt}(z) = 0; \forall t \geq 0\}$

**Remarque 1.9.** [21] P 20

En pratique, pour montrer que les solutions convergent vers le point d'équilibre 0, on montre que l'ensemble  $M$  est réduit à  $\{0\}$ .

**Définition 1.47.** (Différents types de stabilité) [21] P 19

i) Le semi-groupe  $S(t)$  est dit fortement (ou asymptotiquement) stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)x = 0, \forall x \in H. \quad (1.56)$$

ii) Il est dit exponentiellement, (ou uniformément) stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0, \forall x \in H. \quad (1.57)$$

ou, d'une manière équivalente, s'il existe deux constantes  $M$  et  $\alpha > 0$ ) telles que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = M \exp^{-\alpha t}. \quad (1.58)$$

iii) Enfin, on dit que le semi-groupe  $S(t)$  est faiblement, stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle S(t)x, y \rangle = 0, \forall x, y \in H. \quad (1.59)$$

Pour la dernière définition,  $H$  est supposé un espace de Hilbert et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  son produit scalaire. Il est bien connu que dans le cas où l'espace  $X$  est de dimension finie, nous avons les équivalences suivantes  $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$ .

---

## Chapitre 2

# Étude numérique pour une équation de poutres d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions une poutre flexible d'Euler-Bernoulli fixée à une extrémité. À l'autre extrémité, on applique un contrôle force et un contrôle moment ponctuels proportionnels respectivement à la vitesse et à la vitesse de rotation. Les mouvements du système sont décrits par les équations suivantes :

$$y_{tt}(x, t) + y_{xxxx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (2.1)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.2)$$

$$y_{xx}(1, t) = -\beta y_{xt}(1, t), \quad t > 0 \quad (2.3)$$

$$y_{xxx}(1, t) = \alpha y_t(1, t), \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.5)$$

## 2.1 Introduction

---

avec  $y(x, t)$  qui représente la déviation transversale à la position  $x$  et au temps  $t$ . Nous supposons que  $\alpha$ ,  $\beta$  sont deux constantes strictement positives et que la longueur de la poutre est égale à l'unité.

Notons qu'un tel système, a servi de modèle mathématique dans le cadre du programme COFS (Control of Flexible Structures) [10] initié par la NASA afin de modéliser un long mât flexible de 60 mètres de long fixé à sa base sur une navette spatiale et contrôlé à l'autre extrémité par un CMG (Control Moment Gyro). La stabilité exponentielle d'un tel système a été prouvée dans [19]. Le système (2.1)–(2.5) a été considéré par Mensah E. Patrice [28]. À partir de la méthode de Shkalikov [37], une analyse spectrale de l'opérateur à été effectuée. De plus, en utilisant la méthode des différences finies, l'auteur a construit un schéma numérique afin d'étudier le lieu des valeurs propres en fonction des paramètres de rétroaction positifs  $\alpha$  et  $\beta$ .

Dans notre étude, nous écrivons ce problème sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait sur un espace de Hilbert convenable et nous montrons le caractère bien posé au sens des  $C_0$ -semi-groupes du problème de Cauchy. Puis, nous prouvons l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible au moyen de la méthode de Faedo-Galerkin avec les espaces intermédiaires définis dans [23] et les travaux d'Evans [14]. Ensuite, en utilisant la méthode des éléments finis avec les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite, nous développons un schéma numérique semi-discret stable et convergent qui reproduit fidèlement les propriétés du problème (2.1)–(2.5) telle que la dissipativité. Enfin, une estimation de l'erreur a priori pour l'approximation semi-discrète obtenue et l'ordre de convergence sont données en utilisant une méthode décrite dans [3, 4].

La suite de ce chapitre est organisée comme suit. Dans la section 2.2, le caractère bien posé du système (2.1)–(2.5) est établi. La section 2.3 est consacrée à l'existence, l'unicité et à la régularité de la solution faible. Dans la section 2.4, nous développons une méthode numérique semi-discrète stable et convergente en

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

utilisant la méthode des éléments finis. Aussi, une estimation d'erreur a priori et l'ordre de convergence sont obtenus.

## 2.2 Caractère bien posé du problème

Considérons l'espace suivant :

$$H_l^2(0, 1) = \{y \in H^2(0, 1) : y(0) = y_x(0) = 0\}.$$

On associe au système (2.1)–(2.5) l'énergie mécanique suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 y_{xx}^2 dx. \quad (2.6)$$

Soit  $y_t \in H_l^2(0, 1)$ . Afin d'obtenir la dérivée de  $E(t)$  le long des solutions classiques du système (2.1)–(2.5), on multiplie (2.1) par  $y_t$  et en intégrant sur  $(0, 1)$ , on obtient :

$$\int_0^1 y_{tt} y_t dx + \int_0^1 y_{xxxx} y_t dx = 0.$$

Ensuite, en considérant la Proposition 1.11 et la Proposition 1.13, on effectue deux intégrations par parties sur la deuxième intégrale de l'expression précédente. De plus, en utilisant les conditions aux bords (2.3)–(2.4), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_{tt} y_t dx + \int_0^1 y_{xx} y_{txx} dx &= -\alpha [y_t(1)]^2 - \beta [y_{xt}(1)]^2. \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 y_{xx}^2 dx \right] &= -\alpha [y_t(1)]^2 - \beta [y_{xt}(1)]^2. \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha [y_t(1)]^2 - \beta [y_{xt}(1)]^2 \leq 0. \quad (2.7)$$

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

L'expression (2.7) montre que l'énergie  $E(t)$  du problème continu décroît dans le temps.

Considérons maintenant l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \{z = (u, v)^\top : u \in H_l^2(0, 1), v \in L^2(0, 1)\} = H_l^2(0, 1) \times L^2(0, 1), \quad (2.8)$$

muni du produit scalaire

$$\langle z, \tilde{z} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 v \tilde{v} dx + \int_0^1 u_{xx} \tilde{u}_{xx} dx \quad (2.9)$$

avec  $z = (u, v)^\top \in \mathcal{H}$ ,  $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v})^\top \in \mathcal{H}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  la norme associée.  $\top$  en exposant désigne la transposition matricielle.

Le système (2.1)–(2.5) s'écrit comme une équation d'évolution sur  $\mathcal{H}$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} w(t) = \mathcal{A}w(t) \\ w(0) = w_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $w(t) = (y(\cdot, t), y_t(\cdot, t))^\top$ ,  $w(0) = (y_0, v_0)^\top$  pour tout  $t > 0$ .

L'opérateur linéaire  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (f, g) \in (H_l^2(0, 1) \cap H^4(0, 1)) \times H_l^2(0, 1) : f_{xx}(1) = -\beta g_x(1), f_{xxx}(1) = \alpha g(1) \right\} \quad (2.11)$$

est tel que

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -f_{xxxx} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

**Théorème 2.1.** *L'opérateur  $\mathcal{A}$  défini par (2.11)–(2.12) engendre un  $C_0$ -semi-groupe de contractions dans  $\mathcal{H}$  noté  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  et est à résolvante compacte. De plus,  $\mathcal{A}^{-1}$  existe et est compact.*

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

*Démonstration.*

–Montrons que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est générateur d'un  $C_0$ –semi-groupe de contractions.

Pour cela, commençons par prouver que  $\mathcal{A}$  est dissipatif.

Pour tout  $w = (f, g)^\top \in D(\mathcal{A})$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle (g, -f_{xxxx})^\top, (f, g)^\top \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^1 -f_{xxxx}g dx + \int_0^1 g_{xx}f_{xx} dx. \end{aligned}$$

En intégrant deux fois par parties la première intégrale de l'expression précédente et en utilisant les conditions aux bords (2.3)–(2.4), on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 -f_{xx}g_{xx} dx + \int_0^1 f_{xx}g_{xx} dx - \alpha [g(1)]^2 - \beta [g_x(1)]^2 \\ &= -\alpha [g(1)]^2 - \beta [g_x(1)]^2. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$  et l'opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  est dissipatif.

Prouvons à présent que  $I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est surjectif c'est-à-dire pour tout  $(f, g)^\top \in \mathcal{H}$ , il existe  $(y, v)^\top \in D(\mathcal{A})$  telle que  $(I - \mathcal{A})(y, v) = (f, g)$ . Ceci nous ramène de façon équivalente à chercher  $(y, v)^\top$  solution du système

$$v = y - f \tag{2.13}$$

$$y + y_{xxxx} = (g + f) \tag{2.14}$$

$$y_{xx}(1) = -\beta v_x(1) \tag{2.15}$$

$$y_{xxx}(1) = \alpha v(1) \tag{2.16}$$

où  $(g + f) \in L^2(0, 1)$ .

On multiplie (2.14) par  $\varphi \in H_l^2(0, 1)$  et on intègre sur  $(0, 1)$ . Après deux intégra-



## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

tions par parties et en considérant les conditions (2.15)-(2.16), on obtient :

$$a(y, \varphi) = L(\varphi) \quad (2.17)$$

avec

$$\begin{aligned} a(y, \varphi) &= \int_0^1 y\varphi dx + \int_0^1 y_{xx}\varphi_{xx} dx + \alpha y(1)\varphi(1) + \beta y_x(1)\varphi_x(1), \\ L(\varphi) &= \int_0^1 (g + f)\varphi dx + \alpha f(1)\varphi(1) + \beta f_x(1)\varphi_x(1). \end{aligned}$$

La forme bilinéaire  $a(., .)$  est continue, coercive sur  $H_l^2(0, 1) \times H_l^2(0, 1)$  et la forme linéaire  $L(.)$  est continue sur  $H_l^2(0, 1)$ .

En effet, soient  $y, \varphi \in H_l^2(0, 1)$  et  $x \in (0, 1)$ . En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, la Remarque 1 p. 56 et le Corollaire IX.13 p. 168 de [7], on a

$$|a(y, \varphi)| \leq \int_0^1 |y||\varphi| dx + \int_0^1 |y_{xx}||\varphi_{xx}| dx + \alpha |y(1)||\varphi(1)| + \beta |y_x(1)||\varphi_x(1)|.$$

$$|a(y, \varphi)| \leq \|y\|_{L^2(0,1)} \|\varphi\|_{L^2(0,1)} + \|y_{xx}\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_{xx}\|_{L^2(0,1)} + \alpha \|y\|_{\infty} \|\varphi\|_{\infty} + \beta \|y_x\|_{\infty} \|\varphi_x\|_{\infty}$$

$$|a(y, \varphi)| \leq (2 + C(\alpha + \beta)) \|y\|_{H_l^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_l^2(0,1)}.$$

Avec  $C$  une constante strictement positive.  $a(., .)$  est donc continue sur  $H_l^2(0, 1) \times H_l^2(0, 1)$ .

Aussi,

$$\begin{aligned} a(y, y) &= \int_0^1 |y|^2 dx + \int_0^1 |y_{xx}|^2 dx + \alpha |y(1)|^2 + \beta |y_x(1)|^2 \\ &= \|y\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y\|_{H_l^2(0,1)}^2 + \alpha |y(1)|^2 + \beta |y_x(1)|^2 \\ &\geq \|y\|_{H_l^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $a(., .)$  est coercive sur  $H_l^2(0, 1) \times H_l^2(0, 1)$ .

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

De plus, on a

$$\begin{aligned} |L(\varphi)| &\leq \int_0^1 (|g| + |f|)|\varphi|dx + \alpha|f(1)||\varphi(1)| + \beta|f_x(1)||\varphi_x(1)| \\ &\leq (\|g\|_{L^2(0,1)} + \|f\|_{L^2(0,1)}) \|\varphi\|_{L^2(0,1)} + \alpha\|f\|_\infty\|\varphi\|_\infty + \beta\|f_x\|_\infty\|\varphi_x\|_\infty \\ &\leq C\|\varphi\|_{H_t^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Avec  $C$  une constante strictement positive.  $L(\cdot)$  est donc continue sur  $H_t^2(0, 1)$ .

Ainsi, d'après le Théorème de Lax-Milgram, on peut trouver une solution unique  $y \in H_t^2(0, 1) \cap H^4(0, 1)$  pour (2.17).

Soient maintenant  $y$  solution de l'équation (2.17) et  $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$ .

Après deux intégrations par parties de (2.17), on obtient :

$$\int_0^1 y\varphi dx + \int_0^1 y_{xxxx}\varphi dx = \int_0^1 (g + f)\varphi dx.$$

Considérons  $h = (g + f)$ . On a,

$$\begin{aligned} \int_0^1 y\varphi dx + \int_0^1 y_{xxxx}\varphi dx - \int_0^1 h\varphi dx &= 0 \\ \int_0^1 ((y + y_{xxxx}) - h)\varphi dx &= 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(0, 1)$  étant dense dans  $L^2(0, 1)$ , alors on a :

$$(y + y_{xxxx}) - h = 0 \text{ p.p. sur } (0, 1).$$

D'où on a :

$$(y + y_{xxxx}) = h \text{ dans } \mathcal{D}'(0, 1).$$

En utilisant en particulier  $\varphi \in H_t^2(0, 1)$ , on retrouve les conditions aux bords. En

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

effet, on a après deux intégrations par parties

$$\int_0^1 y_{xx} \varphi_{xx} dx = y_{xx}(1) \varphi_x(1) - y_{xxx}(1) \varphi(1) + \int_0^1 y_{xxxx} \varphi dx. \quad (2.18)$$

Ensuite, en remplaçant (2.18) dans (2.17) et en considérant (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \left[ y_{xx}(1) + \beta y_x(1) \right] \varphi_x(1) + \left[ -y_{xxx}(1) + \alpha y(1) \right] \varphi(1) &= \left[ \beta y_x(1) - \beta v_x(1) \right] \varphi_x(1) \\ &+ \left[ \alpha y(1) - \alpha v(1) \right] \varphi(1) \\ \left[ y_{xx}(1) + \beta v_x(1) \right] \varphi_x(1) + \left[ -y_{xxx}(1) + \alpha v(1) \right] \varphi(1) &= 0 \end{aligned}$$

En prenant convenablement  $\varphi$ , on obtient le résultat

$$\begin{cases} y_{xx}(1) = -\beta v_x(1) \\ y_{xxx}(1) = \alpha v(1). \end{cases}$$

Par conséquent,  $(y, v)^\top \in D(\mathcal{A})$  et l'opérateur  $I - \mathcal{A}$  est surjectif.

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est donc m-dissipatif. Ainsi, d'après le Théorème de Lumer-Phillips,  $\mathcal{A}$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions.

De plus, d'après le Corollaire 2.5 p. 5 de [34],  $\mathcal{A}$  étant générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions alors  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

–Démontrons maintenant que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est à résolvante compacte.

D'après ce qui précède, l'opérateur  $\mathcal{A}$  est m-dissipatif. Par conséquent, l'opérateur  $I - \mathcal{A}$  est un isomorphisme de  $D(\mathcal{A})$  sur  $\mathcal{H}$ . De plus, la résolvante de  $\mathcal{A}$  est un opérateur linéaire et continu sur  $\mathcal{H}$ . D'après le Théorème d'injection de Sobolev, l'injection canonique  $i : H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  est compacte alors l'injection canonique  $j : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  est aussi compacte. De plus,  $(I - \mathcal{A})^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(\mathcal{A})$  est borné donc  $(I - \mathcal{A})^{-1}$  est compacte ( d'après la Proposition VI.3 p.90 de [7] ). L'opérateur  $\mathcal{A}$  est donc à résolvante compacte.

–Enfin, prouvons que l'opérateur  $\mathcal{A}^{-1}$  existe et est compact.

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

Pour tout  $\Psi = (f, g)^\top \in \mathcal{H}$ , nous cherchons un unique  $\Phi = (u, v)^\top \in D(\mathcal{A})$  tel que  $\mathcal{A}\Phi = \Psi$ . En considérant  $\mathcal{A}\Phi = \Psi$ , on obtient le système suivant

$$v(x) = f(x), \quad f \in H_1^2(0, 1) \quad (2.19)$$

$$-u_{xxxx}(x) = g(x), \quad g \in L^2(0, 1) \quad (2.20)$$

$$u(0) = u_x(0) = 0 \quad (2.21)$$

$$u_{xx}(1) = -\beta v_x(1) \quad (2.22)$$

$$u_{xxx}(1) = \alpha v(1). \quad (2.23)$$

Par une intégration de l'équation (2.20) et considérant la condition au bord (2.23), nous obtenons pour tout  $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_x^1 -u_{xxxx}(r)dr &= \int_x^1 g(r)dr \\ u_{xxx}(x) &= \alpha v(1) + \int_x^1 g(r)dr. \end{aligned}$$

Par une nouvelle intégration de l'expression précédente et considérant la condition au bord (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_x^1 u_{xxx}(\eta)d\eta &= \int_x^1 \alpha v(1)d\eta + \int_x^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta \\ -u_{xx}(x) &= -u_{xx}(1) + \alpha v(1)(1-x) + \int_x^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta \\ -u_{xx}(x) &= \beta v_x(1) + \alpha v(1)(1-x) + \int_x^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta. \end{aligned}$$

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

Par une autre intégration et considérant la condition au bord (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x -u_{xx}(\varepsilon)d\varepsilon &= \int_0^x \beta v_x(1)d\varepsilon + \int_0^x \alpha v(1)(1-\varepsilon)d\varepsilon + \int_0^x \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta d\varepsilon \\
 -u_x(x) + u_x(0) &= \beta v_x(1)x + \alpha v(1)(x - \frac{1}{2}x^2) + \int_0^x \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta d\varepsilon \\
 u_x(x) &= -\beta v_x(1)x + \alpha v(1)(\frac{1}{2}x^2 - x) - \int_0^x \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta d\varepsilon. \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

On effectue une dernière intégration. On obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^x u_s(s)ds &= -\int_0^x \beta v_x(1)ds + \int_0^x \alpha v(1)(\frac{1}{2}x^2 - x) - \int_0^x \int_0^s \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta d\varepsilon ds. \\
 u(x) &= -\beta v_x(1)(\frac{1}{2}x^2) + \alpha v(1)(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2) - \int_0^x \int_0^s \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta d\varepsilon ds.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u(x) = - \left[ \beta v_x(1)(\frac{1}{2}x^2) + \alpha v(1)(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) + \int_0^x \int_0^s \int_\varepsilon^1 \int_\eta^1 g(r)drd\eta d\varepsilon ds \right].$$

De plus,

$$\|\mathcal{A}^{-1}(f, g)\|_{H_t^4(0,1) \times H_t^2(0,1)} \leq C \|(f, g)\|_{\mathcal{H}}$$

avec  $C$  une constante strictement positive. D'où  $\mathcal{A}^{-1}$  est borné. Le théorème d'injection de Sobolev implique donc que  $\mathcal{A}^{-1}$  est compact sur  $\mathcal{H}$ .

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.1. □

Du Théorème 2.1, et en considérant le Théorème 1.32 puis la Remarque 1.8 du Chapitre 1, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 2.2.** (2.10) *admet une solution généralisée unique  $w(t) = T(t)w_0 \in C([0, \infty); \mathcal{H})$  pour tout  $w_0 \in \mathcal{H}$ .*

Puisque  $\{T(t)\}_{t>0}$  est un semi-groupe linéaire de contractions,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  est un potentiel candidat pour la fonctionnelle de Lyapunov pour (2.10).

## 2.2 Caractère bien posé du problème

---

Soit  $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la manière suivante

$$\mathcal{L}(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 y_{xx}^2 dx. \quad (2.25)$$

Pour toute solution classique  $w$ , on obtient, de façon analogue à (2.7) :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(w) = -\alpha [y_t(1)]^2 - \beta [y_{xt}(1)]^2 \leq 0. \quad (2.26)$$

Par conséquent, l'évolution dans le temps de la fonctionnelle de Lyapunov tout au long de la solution classique est décroissante. Notons qu'en raison du manque de régularité, la dérivée temporelle généralisée de la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  tout au long de la solution généralisée  $w(t)$  de (2.10) ( avec pour valeur initiale  $w_0 \in \mathcal{H}$  ) est telle que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(w_0) = \limsup_{t \searrow 0} \left( \frac{\mathcal{L}(w(t)) - \mathcal{L}(w_0)}{t} \right)$$

qui peut prendre la valeur  $-\infty$  ( [31] P3036 ).

De plus,  $\{T(t)\}_{t>0}$  étant un semi-groupe de contractions, la décroissance de  $\mathcal{L}$  tout au long des solutions classiques peut être étendue aux solutions généralisées ( voir [11] p. 13 ) et  $\mathcal{L}$  est une fonction de Lyapunov pour (2.10).

La Proposition A.1 de l'Annexe A montre que le plus grand sous-ensemble invariant  $M$  de  $S = \{w \in \mathcal{H} : \frac{d\mathcal{L}}{dt}(w) = 0\}$  est réduit à  $\{0\}$ . L'opérateur  $\mathcal{A}$  étant à résolvante compacte, en appliquant le principe d'invariance de LaSalle ( voir Proposition 1.18 du Chapitre 1 ), on a le résultat suivant :

**Théorème 2.3.** *Soit  $w(t)$  la solution généralisée de (2.10) pour tout  $w_0 \in \mathcal{H}$ . Alors  $w(t) \rightarrow 0 \in \mathcal{H}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .*

À présent, nous prouvons l'existence, l'unicité et la continuité forte de la solution faible. Pour ce faire, nous déterminons la formulation faible de notre problème et nous définissons la solution faible.

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

Afin d'obtenir la formulation faible de (2.1)–(2.5), nous considérons  $\phi \in H^2_l(0, 1)$ . En multipliant (2.1) par  $\phi$ , en intégrant deux fois par parties sur  $[0, 1]$  et en utilisant (2.2)–(2.4), on obtient

$$\int_0^1 y_{tt}\phi dx + \int_0^1 y_{xx}\phi_{xx} dx + \alpha y_t(1)\phi(1) + \beta y_{xt}(1)\phi_x(1) = 0. \quad (2.27)$$

#### 2.3.1 Définition de la solution faible

En s'inspirant des idées des auteurs H.T. Banks et al [2], nous considérons le triplet  $(u(1), u_x(1), u)$  avec la notation  $(u(1), u_x(1), u) = ({}^1\hat{u}, {}^2\hat{u}, {}^3\hat{u})$ . Soit l'espace de Hilbert  $Y$  et son produit scalaire définis par :

$$Y = \{ \hat{u} = (u(1), u_x(1), u), u \in L^2(0, 1) \},$$
$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_Y = \langle {}^3\hat{u}, {}^3\hat{v} \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Avec  $\hat{u} \in Y$  et  $\hat{v} \in Y$ .

Puis, l'espace de Hilbert  $X$  et son produit scalaire définis par :

$$X = \{ \hat{\phi} = (\phi(1), \phi_x(1), \phi), \phi \in H^2_l(0, 1) \},$$
$$\langle \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \rangle_X = \langle (\phi_1)_{xx}, (\phi_2)_{xx} \rangle_{L^2(0,1)}.$$

$X$  est dense dans  $Y$  et l'injection canonique de  $X$  dans  $Y$  est continue. Par conséquent, en prenant  $Y$  comme espace pivot, nous obtenons le triplet :

$$X \subset Y \subset X'$$

où  $X'$  représente le dual topologique de  $X$ .

Considérons à présent les formes bilinéaires suivantes qui interviendront dans la

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

définition de la solution faible du problème (2.1)–(2.5).

$$a^{(1)} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \mapsto a^{(1)}(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) = \langle \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \rangle_X.$$

$$a^{(2)} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\hat{u}, \hat{v}) \mapsto a^{(2)}(\hat{u}, \hat{v}) = \alpha {}^1\hat{u}^1\hat{v} + \beta {}^2\hat{u}^2\hat{v}.$$

**Définition 2.1.** Soit  $T > 0$  fixé. La fonction  $\hat{y} = (y(1), y_x(1), y)$  est une solution faible du problème (2.1) – (2.5) sur  $[0, T]$  si

$$\hat{y} \in L^2(0, T; X) \quad \text{avec} \quad \hat{y}_t \in L^2(0, T; Y), \quad \hat{y}_{tt} \in L^2(0, T; X'),$$

et vérifie :

$$\langle \hat{y}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{X', X} + a^{(1)}(\hat{y}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{y}_t, \hat{\phi}) = 0 \quad (2.28)$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$  et pour tout  $\hat{\phi} \in X$ , avec les conditions initiales suivantes

$$\hat{y}(0) = \hat{y}_0 = (y_0(1), (y_0)_x(1), y_0) \in X, \quad (2.29)$$

$$\hat{y}_t(0) = \hat{v}_0 = (v_0(1), (v_0)_x(1), v_0) \in Y. \quad (2.30)$$

Dans la Définition 2.1, la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  est le crochet de dualité entre  $X$  et  $X'$  qui coïncide avec le produit scalaire dans  $Y$ .

Désignons par  $[X, Y]_\theta$  avec  $0 \leq \theta \leq 1$ , l'espace intermédiaire explicité à la sous-section 1.3.11 du Chapitre 1. Afin de donner un sens aux conditions initiales (2.29)-(2.30), rappelons les lemmes suivants qui sont des cas particuliers au Théorème 3.1 p. 23 de [23].

**Lemme 2.1.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert, tels que  $X$  soit continument dense dans  $Y$ . Supposons que  $\hat{y} \in L^2(0, T; X)$  et  $\hat{y}_t \in L^2(0, T; Y)$ . Alors,  $\hat{y} \in$



## 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

$C\left([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}\right)$  après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle.

**Lemme 2.2.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert, tels que  $X$  soit continument dense dans  $Y$ . Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , on a

$$[X, Y]_{\theta}' = [Y', X']_{1-\theta}$$

avec équivalence de normes.

Énonçons également le résultat suivant prouvé dans [5] p. 155-157.

**Lemme 2.3.** Soit  $H_1^2(0, 1)$  le sous espace de  $H^2(0, 1)$ . Alors, il existe une suite de fonctions  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  telle que  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  soit une base orthogonale de  $H_1^2(0, 1)$  et  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  soit une base orthonormale de  $L^2(0, 1)$ .

### 2.3.2 Existence et unicité de la solution faible

**Théorème 2.4.** Il existe une unique solution  $\hat{y}$  pour (2.28)–(2.30) vérifiant

$$\hat{y} \in L^{\infty}(0, T; X), \quad (2.31)$$

$$\hat{y}_t \in L^{\infty}(0, T; Y), \quad (2.32)$$

$$\hat{y} \in C\left([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}\right), \quad (2.33)$$

$$\hat{y}_t \in C\left([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}}'\right). \quad (2.34)$$

*Démonstration.*

**Existence de la solution faible.**

Pour la preuve de l'existence de la solution faible, nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin.

D'après le Lemme 2.3, nous pouvons trouver une suite de fonctions  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ , qui

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

forme une base orthogonale pour  $X$  et une base orthonormale pour  $Y$ . En considérant une telle suite, introduisons les espaces de dimension finie engendrés par  $\{\phi_i\}_{i=1}^k$  et tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \hat{V}_k := \text{Vect} \left\{ \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_k \right\}.$$

–*Étape 1 : Construction des solutions approchées.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $\hat{y}_k(t)$  la solution approchée sur  $\hat{V}_k$ , telle que

$$\hat{y}_k(t) = \sum_{i=1}^k \sigma_k^i(t) \hat{\phi}_i \in \hat{V}_k,$$

avec  $\sigma_k^i(t) \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq t \leq T$ ,  $i = 1, \dots, k$ ) solution de (2.28) sur  $\hat{V}_k$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé, on a :

$$\langle (\hat{y}_k)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{y}_k, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{y}_k)_t, \hat{\phi}) = 0, \quad \forall \hat{\phi} \in \hat{V}_k \quad (2.35)$$

avec les conditions initiales :

$$\hat{y}_k(0) = \hat{y}_{k0}, \quad \hat{y}_{k0} = \sum_{i=1}^k \alpha_k^i \hat{\phi}_i \rightarrow \hat{y}_0 \text{ dans } X \text{ quand } k \rightarrow \infty, \quad (2.36)$$

$$(\hat{y}_k)_t(0) = \hat{v}_k(0), \quad \hat{v}_k(0) = \hat{v}_{k0}, \quad \hat{v}_{k0} = \sum_{i=1}^k \beta_k^i \hat{\phi}_i \rightarrow \hat{v}_0 \text{ dans } Y \text{ quand } k \rightarrow \infty \quad (2.37)$$

où  $\alpha_k^i = \sigma_k^i(0)$  et  $\beta_k^i = (\sigma_k^i)_t(0)$ .

Les relations (2.35)–(2.37) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^k \left[ \langle \hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j \rangle_Y (\sigma_k^i)_{tt} + a^{(2)}(\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j) (\sigma_k^i)_t + a^{(1)}(\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j) \sigma_k^i \right] = 0, \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (2.38)$$

## 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

Où  $\sigma_k = (\sigma_k^1, \dots, \sigma_k^k)$  avec les conditions initiales

$$\sigma_k(0) = (\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^k), \quad (2.39)$$

$$(\sigma_k)_t(0) = (\beta_k^1, \dots, \beta_k^k). \quad (2.40)$$

En considérant le fait que  $\{\phi_i\}_{i=1}^k$  forme une base orthogonale pour  $X$  et une base orthonormale pour  $Y$ , l'équation (2.38) devient

$$(\sigma_k)_{tt} + \hat{\mathbb{B}}(\sigma_k)_t + \hat{\mathbb{A}}\sigma_k = 0. \quad (2.41)$$

Avec  $\hat{\mathbb{B}} = \left( a^{(2)}(\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j) \right)_{1 \leq i, j \leq k}$  et  $\hat{\mathbb{A}} = \text{diag} \left( \|\hat{\phi}_j\|_X \right)_{1 \leq j \leq k}$ .

À présent, nous écrivons (2.41), avec (2.39)-(2.40) comme un système d'équations différentielles du premier ordre. En posant  $\mathbb{Z}_k = (\sigma_k, (\sigma_k)_t)^\top$ , on obtient

$$(\mathbb{Z}_k)_t = \mathcal{F}\mathbb{Z}_k, \quad (2.42)$$

$$\mathbb{Z}_k(0) = \mathbb{Z}_{k0}. \quad (2.43)$$

Avec

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} O_{k \times k} & \mathbb{I}_k \\ -\hat{\mathbb{A}} & -\hat{\mathbb{B}} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard ( voir Théorème 1.30 du Chapitre 1 ), le système d'équations différentielles (2.42)-(2.43) admet une solution unique. Nous concluons qu'il existe une unique solution  $\hat{y}_k \in C^2([0; T], X)$  pour (2.35)-(2.37).

–Étape 2 : Estimations a priori sur les solutions approchées.

Soit  $\hat{E} : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle d'énergie pour la trajectoire  $\hat{y}$  définie par

$$\hat{E}(t, \hat{y}) = \frac{1}{2} \|\hat{y}(t)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|\hat{y}_t(t)\|_Y^2.$$

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

Remplaçons  $\hat{\phi}$  par  $(\hat{y}_k)_t$  dans (2.35). En considérant qu'il existe une solution  $\hat{y}_k \in C^2([0; \tau], \hat{V}_k)$  pour (2.35) sur un intervalle  $[0; \tau]$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle (\hat{y}_k)_{tt}, (\hat{y}_k)_t \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{y}_k, (\hat{y}_k)_t) + a^{(2)}((\hat{y}_k)_t, (\hat{y}_k)_t) &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle (\hat{y}_k)_t, (\hat{y}_k)_t \rangle_Y + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a^{(1)}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) + a^{(2)}((\hat{y}_k)_t, (\hat{y}_k)_t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \|\hat{y}_t\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|\hat{y}\|_X^2 \right] + \alpha [{}^1(\hat{y}_k)_t]^2 + \beta [{}^2(\hat{y}_k)_t]^2 &= 0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{y}_k) = -\alpha [{}^1(\hat{y}_k)_t]^2 - \beta [{}^2(\hat{y}_k)_t]^2 \leq 0,$$

pour tout  $t \in [0, \tau]$ . Ainsi, on a la bornitude uniforme de la solution sur  $[0, \tau]$  :

$$\hat{E}(t, \hat{y}_k) \leq \hat{E}(0, \hat{y}_{k0}), \quad t \geq 0.$$

Ce qui implique que :

$$\{\hat{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \quad \text{est bornée dans } C([0, T]; X) \quad (2.44)$$

$$\{(\hat{y}_k)_t\}_{k \in \mathbb{N}^*} \quad \text{est bornée dans } C([0, T]; Y). \quad (2.45)$$

En considérant (2.44)–(2.45), on obtient pour tout  $\hat{\phi} \in X$  :

$$|a^{(1)}(\hat{y}_k, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{y}_k)_t, \hat{\phi})| \leq L \|\hat{\phi}\|_X, \quad (2.46)$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$  où  $L$  est une constante strictement positive indépendante de  $k$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  fixé. Considérons maintenant  $\hat{\phi} \in X$  avec  $\hat{\phi} = \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2$  telle que  $\hat{\varphi}_1 \in \hat{V}_k$  et  $\hat{\varphi}_2$  orthogonal à  $\hat{V}_k$  dans  $Y$ . Alors, on a  $\langle (\hat{y}_k)_{tt}, \hat{\varphi}_2 \rangle_Y = 0$ . De (2.35) et (2.46),

## 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

nous avons :

$$\langle (\hat{y}_k)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y = \langle (\hat{y}_k)_{tt}, \hat{\phi}_1 \rangle_Y = -a^{(1)}(\hat{y}_k, \hat{\phi}_1) - a^{(2)}((\hat{y}_k)_t, \hat{\phi}_1) \leq L\|\hat{\phi}_1\|_X \leq L\|\hat{\phi}\|_X.$$

Par conséquent,

$$\{(\hat{y}_k)_{tt}\}_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } C([0, T]; X'). \quad (2.47)$$

–Étape 3 : Passage à la limite

D'après le Théorème Eberlein-Smulian [8], il existe des sous-suites faiblement convergentes  $\{\hat{y}_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\{(\hat{y}_{k_l})_t\}_{l \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\{(\hat{y}_{k_l})_{tt}\}_{l \in \mathbb{N}^*}$  avec  $\hat{y} \in L^2(0, T; X)$ ,  $\hat{y}_t \in L^2(0, T; Y)$ ,  $\hat{y}_{tt} \in L^2(0, T; X')$  telles que :

$$\{\hat{y}_{k_l}\} \rightharpoonup \hat{y} \text{ dans } L^2(0, T; X) \quad (2.48)$$

$$\{(\hat{y}_{k_l})_t\} \rightharpoonup \hat{y}_t \text{ dans } L^2(0, T; Y) \quad (2.49)$$

$$\{(\hat{y}_{k_l})_{tt}\} \rightharpoonup \hat{y}_{tt} \text{ dans } L^2(0, T; X'). \quad (2.50)$$

Aussi, de (2.49) on a

$$\{^i(\hat{y}_{k_l})_t\} \rightharpoonup ^i\hat{y}_t \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}). \quad (2.51)$$

avec  $i = 1, 2$  et pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

Soit  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ . Considérons les fonctions  $\hat{\phi} \in L^2(0, T; \hat{V}_{k_0})$  telles que

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_{j=1}^{k_0} \alpha_j(t) \phi_j(x) \quad (2.52)$$

où  $\alpha_j \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ . Pour tout  $k_l \geq k_0$ , la formulation (2.35) devient :

$$\int_0^T [\langle (\hat{y}_{k_l})_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{y}_{k_l}, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{y}_{k_l})_t, \hat{\phi})] dt = 0. \quad (2.53)$$

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

Ainsi, en passant à la limite dans (2.53) quand  $l \rightarrow +\infty$  et en considérant les résultats de convergence (2.48)–(2.50), on obtient :

$$\int_0^T [\langle \hat{y}_{tt}, \hat{\varphi} \rangle_{X',X} + a^{(1)}(\hat{y}, \hat{\varphi}) + a^{(2)}(\hat{y}_t, \hat{\varphi})] dt = 0. \quad (2.54)$$

Les fonctions  $\hat{\varphi}$  de la forme (2.52) sont denses dans  $L^2(0, T; X)$ . Ainsi, (2.54) est bien définie pour tout  $\hat{\varphi} \in L^2(0, T; X)$ . On en déduit que (2.28) est satisfaite presque partout sur  $[0, T]$  et  $\hat{y}$  est solution de la formulation faible.

*–Régularité de la solution.*

La définition de solution faible et les résultats (2.44)–(2.45) impliquent que  $\hat{y}$  satisfait la régularité (2.31)–(2.32). De plus, le Lemme 2.1 implique (2.33), après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle. Aussi, du Lemme 2.1 et Lemme 2.2, on déduit la régularité (2.34).

**Unicité de la solution.**

À présent, nous prouvons l'unicité de la solution faible, en adaptant la preuve du Théorème 8.1 p. 290-291 de [23].

Tout d'abord, nous montrons que la solution  $\hat{y}$  satisfait les conditions (2.29)–(2.30).

Soit  $\hat{\phi} \in C^2([0, T], X)$  tel que  $\hat{\phi}(T) = 0$  et  $\hat{\phi}_t(T) = 0$ . En intégrant l'équation (2.28) sur  $[0, T]$ , on obtient :

$$\int_0^T [\langle \hat{y}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{X',X} + a^{(1)}(\hat{y}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{y}_t, \hat{\phi})] d\tau = 0.$$

En intégrant deux fois par parties sur  $[0, T]$  sous le crochet de dualité, on a :

$$\int_0^T [\langle \hat{y}, \hat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{y}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{y}_t, \hat{\phi})] d\tau = \langle \hat{y}_t(0), \hat{\phi}(0) \rangle_{X',X} - \langle \hat{y}(0), \hat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \quad (2.55)$$

De même, pour un  $k$  fixé, on obtient en intégrant deux fois par parties l'équation

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

(2.35) :

$$\int_0^T \left[ \langle \hat{y}_k, \hat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{y}_k, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{y}_k)_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = \langle \hat{v}_{k0}, \hat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \hat{y}_{k0}, \hat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \quad (2.56)$$

En utilisant (2.36)–(2.37) et (2.48)–(2.50) puis en passant à la limite dans (2.56) le long des sous-suites convergentes  $\{\hat{y}_{k_l}\}$ , on obtient :

$$\int_0^T \left[ \langle \hat{y}, \hat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{y}, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{y})_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = \langle \hat{v}_0, \hat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \hat{y}_0, \hat{\phi}_t(0) \rangle_Y. \quad (2.57)$$

Finalement en comparant (2.57) et (2.55), on déduit que  $\hat{y}(0) = \hat{y}_0$  et  $\hat{v}_0 = \hat{y}_t(0)$ .

Considérons maintenant  $\hat{y}$  une solution de (2.28) avec  $\hat{y}(0) = \hat{y}_0 = 0$ ,  $\hat{y}_t(0) = \hat{v}_0 = 0$ .

Soit  $s \in (0, T)$  fixé et la fonction auxiliaire suivante :

$$\hat{\pi}(t) = \begin{cases} \int_t^s \hat{y}(\tau) d\tau, & 0 < t < s \\ 0, & t \geq s. \end{cases}$$

Prenons  $\hat{\phi} = \hat{\pi}$  dans (2.28) et en intégrant sur  $[0, T]$ , on obtient :

$$\int_0^s \left[ \langle \hat{y}_{tt}(\tau), \hat{\pi}(\tau) \rangle_{X', X} + a^{(1)}(\hat{y}(\tau), \hat{\pi}(\tau)) + a^{(2)}(\hat{y}_t(\tau), \hat{\pi}(\tau)) \right] d\tau = 0. \quad (2.58)$$

Or après une intégration par partie, on a :

$$\int_0^s \langle \hat{y}_{tt}(\tau), \hat{\pi}(\tau) \rangle_{X', X} d\tau = - \int_0^s \langle \hat{y}_t(\tau), \hat{\pi}_t(\tau) \rangle_Y d\tau$$

et

$$\int_0^s a^{(2)}(\hat{y}_t(\tau), \hat{\pi}(\tau)) d\tau = - \int_0^s a^{(2)}(\hat{y}(\tau), \hat{\pi}_t(\tau)) d\tau.$$

## 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

Par conséquent, (2.58) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle \hat{y}_t(\tau), \hat{\pi}_t(\tau) \rangle_Y d\tau - \int_0^s a^{(1)}(\hat{y}(\tau), \hat{\pi}(\tau)) d\tau + \int_0^s a^{(2)}(\hat{y}(\tau), \hat{\pi}_t(\tau)) d\tau &= 0 \\ \int_0^s \langle \hat{y}_t(\tau), \hat{y}(\tau) \rangle_Y d\tau - \int_0^s a^{(1)}(\hat{\pi}_t(\tau), \hat{\pi}(\tau)) d\tau + \int_0^s a^{(2)}(\hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau)) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \langle \hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau) \rangle_Y - \frac{1}{2} a^{(1)}(\hat{\pi}(\tau), \hat{\pi}(\tau)) \right] d\tau &= - \int_0^s a^{(2)}(\hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau)) d\tau. \\ \left[ \frac{1}{2} \langle \hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau) \rangle_Y - \frac{1}{2} a^{(1)}(\hat{\pi}(\tau), \hat{\pi}(\tau)) \right]_0^s &= - \int_0^s a^{(2)}(\hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^s a^{(2)}(\hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau)) d\tau = \int_0^s \left( \alpha [\hat{y}(\tau)]^2 + \beta [\hat{y}(\tau)]^2 \right) d\tau \geq 0,$$

on en déduit que

$$\frac{1}{2} \|\hat{y}(s)\|_Y^2 + \frac{1}{2} a^{(1)}(\hat{\pi}(0), \hat{\pi}(0)) \leq 0.$$

La forme bilinéaire  $a^{(1)}(\cdot, \cdot)$  est coercive, on a :

$$a^{(1)}(\hat{\pi}(0), \hat{\pi}(0)) \geq \|\hat{\pi}(0)\|_X^2.$$

Ainsi,  $\hat{y}(s) = 0$  et  $\hat{\pi}(0) = 0$ . De plus,  $s \in (0, T)$  étant arbitraire, on a alors  $\hat{y} \equiv 0$ .

On conclut que la solution est unique. □

### 2.3.3 Résultat complémentaire de régularité

Dans cette sous-section, nous démontrons la continuité forte de la solution faible. Notre objectif est donc de prouver le résultat suivant :

**Théorème 2.5.** *Après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la*



## 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

solution  $\hat{y}$  de (2.28)-(2.30) satisfait

$$\hat{y} \in C([0, T]; X), \quad (2.59)$$

$$\hat{y}_t \in C([0, T]; Y). \quad (2.60)$$

Avant de donner la preuve de ce théorème, rappelons un lemme énoncé et démontré dans [23] p. 297. Ce lemme sera utile pour la preuve du Théorème 2.5.

**Lemme 2.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach,  $X \subset Y$  avec injection continue, l'espace  $X$  étant réflexif. On pose :

$$C_y([0, T]; Y) = \left\{ y \in L^\infty(0, T; Y) : t \mapsto \langle f, y(t) \rangle_{Y', Y} \text{ est continue sur } [0, T], \forall f \in Y' \right\}$$

qui désigne l'espace des fonctions faiblement continues à valeurs dans  $Y$ . Alors, on a

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_y([0, T]; Y) = C_y([0, T]; X).$$

Maintenant, nous présentons la preuve du Théorème 2.5. Notons que cette preuve est basée sur les stratégies standards présentées à la section 8.4 de [23] p. 297-301 et à la section 2.4 de [41].

*Démonstration.* En considérant le Lemme 2.4, il découle de (2.31) et (2.33) puis de (1.45) que  $\hat{y} \in C_y([0, T]; X)$ . De manière similaire, (2.32), (2.34) et (1.46) impliquent que  $\hat{y}_t \in C_y([0, T]; Y)$ .

Soit  $J$  un sous-intervalle compact de  $[0, T]$ . Considérons la fonction scalaire  $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$  fixée telle qu'elle vaut 1 sur un intervalle  $J \subset\subset [0, T]$  et 0 sur  $\mathbb{R} \setminus [0, T]$  (où  $\subset\subset$  désigne l'inclusion stricte et compacte). Alors, la fonction  $\xi \hat{y} : \mathbb{R} \rightarrow X$  est à support compact. Soit  $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une suite régularisante dépendant du temps

### 2.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

telle que par exemple

$$\zeta^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \zeta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

avec

$$\zeta(t) = \begin{cases} C e^{\frac{-1}{1-|t|^2}}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Au moyen de la régularisation par convolution des distributions, on introduit

$$\hat{y}^\varepsilon = \zeta^\varepsilon * \xi \hat{y} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, X).$$

$\hat{y}^\varepsilon$  converge vers  $\hat{y}$  dans  $X$  et  $\hat{y}_t^\varepsilon$  converge vers  $\hat{y}_t$  dans  $Y$  presque partout sur  $J$  ( en considérant [7] P70 Proposition IV .21 ). Donc,  $\hat{E}(t, \hat{y}^\varepsilon)$  converge vers  $\hat{E}(t, \hat{y})$  presque partout sur  $J$ .  $\hat{y}^\varepsilon$  étant suffisamment régulière sur  $J$ , on a :

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{y}^\varepsilon) = -\alpha [{}^1(\hat{y}^\varepsilon)_t]^2 - \beta [{}^2(\hat{y}^\varepsilon)_t]^2 \leq 0. \quad (2.61)$$

En passant à la limite dans (2.61), quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a :

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{y}) = -\alpha [{}^1(\hat{y})_t]^2 - \beta [{}^2(\hat{y})_t]^2 \leq 0 \quad (2.62)$$

au sens des distributions sur  $J$ .  $J$  étant arbitraire, (2.62) est vérifiée pour tout sous-intervalle compact de  $[0, T]$ .

Soit  $t$  fixé. Considérons la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  et la suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\delta_n = \frac{1}{2} \|\hat{y}_t(t) - \hat{y}_t(t_n)\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|\hat{y}(t) - \hat{y}(t_n)\|_X^2. \quad (2.63)$$

## 2.4 Schéma semi-discret

---

Alors,

$$\delta_n = \hat{E}(t, \hat{y}) + \hat{E}(t_n, \hat{y}) - \langle \hat{y}_t(t), \hat{y}_t(t_n) \rangle_Y - \langle \hat{y}(t), \hat{y}(t_n) \rangle_X. \quad (2.64)$$

Nous savons que  $\hat{y}$ ,  $\hat{y}_t$  sont faiblement continues. De plus,  $\hat{E}$  est continue par rapport à  $t$ . Alors, en passant à la limite dans (2.64) on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n &= 2\hat{E}(t, \hat{y}) - \|\hat{y}_t(t)\|_Y^2 - \|\hat{y}(t)\|_X^2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{y}_t(t) - \hat{y}_t(t_n)\|_Y^2 = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{y}(t) - \hat{y}(t_n)\|_X^2 = 0. \quad (2.65)$$

Finalement, à partir du théorème de caractérisation séquentielle de la continuité, on a  $\hat{y} \in C([0, T]; X)$  et  $\hat{y}_t \in C([0, T]; Y)$ .

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.5. □

Dans la section suivante, nous élaborons un schéma numérique semi-discret pour le problème (2.1)–(2.5) et nous obtenons une estimation de l'erreur a priori.

## 2.4 Schéma semi-discret

Le but de cette section est de développer, au moyen de la méthode des éléments finis, un schéma numérique semi-discret (discrétisation en espace) stable et convergent qui décrit fidèlement le comportement asymptotique du système (2.1)–(2.5).

Nous commençons par opérer un choix approprié d'espace discret pour l'approximation de Galerkin de (2.28). En effet, la solution approchée étant obtenue par combinaison linéaire des fonctions de base globales définies aux nœuds de discrét-

## 2.4 Schéma semi-discret

---

tisation, les contraintes de régularité sur la solution approchée nous conduisent à considérer comme espace discret, l'espace des fonctions polynomiales cubiques d'Hermite définies par morceaux sur le domaine de référence.

Ensuite, nous effectuons l'approximation de Galerkin du problème (2.28).

Enfin, nous déterminons l'ordre de convergence et une estimation d'erreur a priori pour la solution de l'approximation semi-discrète de Galerkin.

### 2.4.1 Polynômes cubiques d'Hermite

Nous construisons, dans cette sous section, un espace approprié de fonctions de classe  $C^2$  définies par morceaux sur le domaine  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  (où  $\Omega = (0, 1)$ ) comme par exemple dans [42, 5].

Pour cela, introduisons premièrement les fonctions cubiques d'Hermite de base nodales locales définies par

$$N_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad N_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, \quad (2.66)$$

$$N_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad N_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2, \quad (2.67)$$

pour  $\xi \in [0, 1]$ .

Les représentations graphiques de ces fonctions sont présentées à la Figure 2.1.

## 2.4 Schéma semi-discret

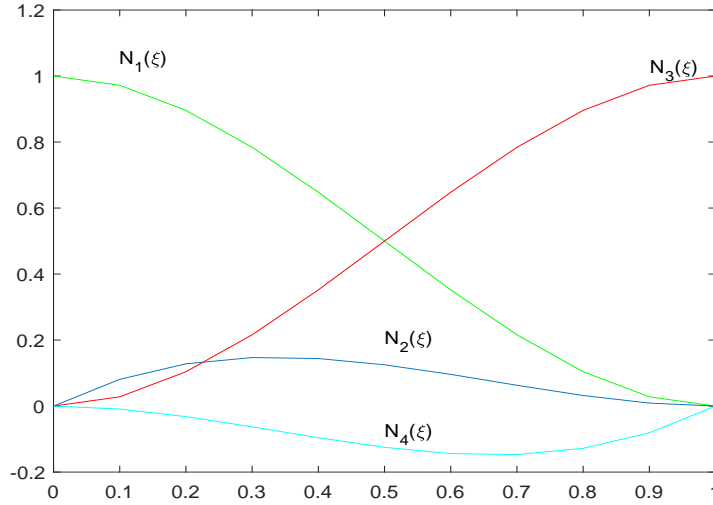


Figure 2.1 – Fonctions cubiques d’Hermite standards de base locale  $N_i(\xi)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Afin d’utiliser ces fonctions dans un intervalle arbitraire  $[x_l; x_r]$ , plutôt que l’intervalle de référence  $[0, 1]$ , nous transformons nos expressions (2.66)–(2.67) en utilisant la fonction

$$\zeta : [x_l, x_r] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \frac{x - x_l}{x_r - x_l}.$$

On obtient ainsi les fonctions  $\psi_i : [x_l, x_r] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , définies par

$$\psi_1(x) = N_1(\zeta(x)), \quad \psi_2(x) = (x_r - x_l) (N_2(\zeta(x))) \quad (2.68)$$

$$\psi_3(x) = N_3(\zeta(x)), \quad \psi_4(x) = (x_r - x_l) (N_4(\zeta(x))). \quad (2.69)$$

Notons que la valeur nodale de  $\psi_i(x)$  est égale à la valeur nodale de  $N_i(x)$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , et les  $\psi_i(x)$  préservent les propriétés des fonctions polynomiales cubiques d’Hermite de base nodale.

Soit  $n$  un entier fixé (avec  $n \geq 2$ ). Considérons maintenant une partition de  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  définie par  $\Omega_h = \cup_{m=1}^{n-1} Z_m$  où  $Z_m = [x_m, x_{m+1}]$  avec  $m = 1, 2, \dots, n - 1$ , est un

## 2.4 Schéma semi-discret

---

élément de cette partition. Supposons que ces éléments sont formés par les points nodaux  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ , avec  $n - 1$  étant le nombre d'éléments. De plus, si la subdivision est uniforme (comme c'est le cas dans notre travail), désignons la longueur du pas par  $h = 1/n$  et  $Z_m = [mh, (m + 1)h] = [x_m, x_{m+1}]$ . Pour chaque élément  $Z_m$ , nous utilisons la notation  $\psi_{m,i} = [x_m, x_{m+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , pour désigner les fonctions cubiques d'Hermite de base nodale locale définies sur cet élément. À chaque nœud  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nous définissons deux fonctions de base nodales globales comme suit.

Sur  $x_1$ , nous définissons

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \\ \psi_{1,1}(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \end{cases}, \phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \\ \psi_{1,2}(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Sur  $x_m$ ,  $m = 2, 3, \dots, n - 1$ , nous définissons

$$\phi_{2m-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{m-1}, x_{m+1}] \\ \psi_{m-1,3}(x) & \text{si } x \in [x_{m-1}, x_m] \\ \psi_{m,1}(x) & \text{si } x \in [x_m, x_{m+1}] \end{cases}, \phi_{2m}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{m-1}, x_{m+1}] \\ \psi_{m-1,4}(x) & \text{si } x \in [x_{m-1}, x_m] \\ \psi_{m,2}(x) & \text{si } x \in [x_m, x_{m+1}]. \end{cases}$$

Et sur  $x_n$ , nous définissons

$$\phi_{2n-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{n-1}, x_n] \\ \psi_{n-1,3}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}, \phi_{2n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{n-1}, x_n] \\ \psi_{n-1,4}(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Ainsi, la valeur nodale de  $\phi_m(x_j)$  pour  $m = 1, 2, \dots, 2n$  et  $j = 1, 2, \dots, n$  est donné comme suit :

$$\phi_{2i-1}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j \neq x_i \\ 1 & \text{si } x_j = x_i \end{cases}, \phi_{2i}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j \neq x_i \\ 1 & \text{si } x_j = x_i \end{cases}$$

## 2.4 Schéma semi-discret

---

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Nous représentons, à la Figure 2.2, les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite standards de base globales aux nœuds  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.2$ ,  $x_3 = 0.4$ ,  $x_4 = 0.6$ ,  $x_5 = 0.8$ ,  $x_6 = 1$  sur le domaine  $[0, 1]$ .

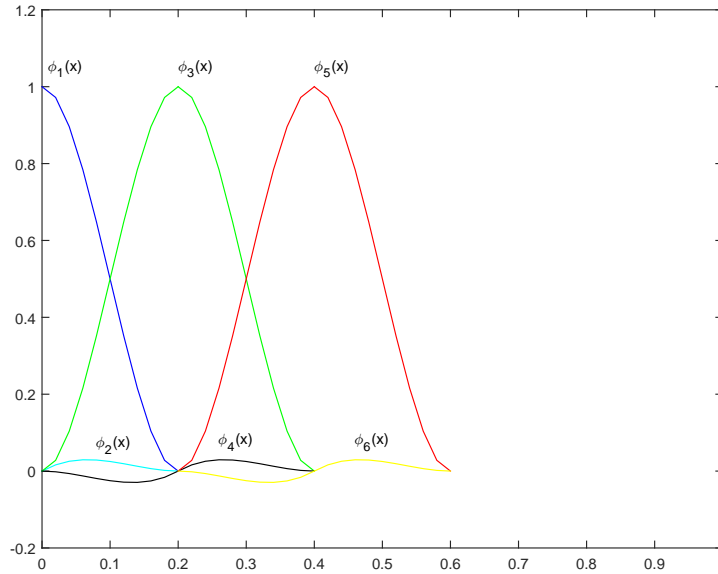


Figure 2.2 – Six premières fonctions cubiques d'Hermite standards de base globales avec partition à six nœuds sur  $[0, 1]$ .

Finalement, notre espace d'éléments finis d'Hermite noté  $V^h$  est tel que :

$$V^h = \text{Vect} \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n-1}, \phi_{2n} \}. \quad (2.70)$$

En considérant que  $y_h^i(t)$  et  $(y_h^i)_x(t)$  représentent respectivement les valeurs approchées de  $y$  et de sa dérivée au nœud  $x_i$ , par séparation des variables, la solution approchée  $y_h \in V^h$  que nous cherchons peut s'écrire de la manière suivante :

$$y_h(x, t) = \sum_{i=1}^n [y_h^i(t)\phi_{2i-1}(x) + (y_h^i)_x(t)\phi_{2i}(x)] \quad (2.71)$$

avec  $y_h(1, t) = y_h^n(t)$  et  $(y_h)_x(1, t) = (y_h^n)_x(t)$ .

## 2.4 Schéma semi-discret

---

### 2.4.2 Problème semi-discret

Soient  $X^h$  un sous-espace de dimension finie de  $X$  et  $V^h$  un sous-espace de dimension finie de  $H_t^2(0, 1)$ . Soit  $\phi_j, j = 1, \dots, N$  (avec  $N = 2n$ ) une base fixe pour  $V^h$ .

L'approximation de Galerkin de (2.28) s'énonce de la manière suivante :

Trouver  $\hat{y}_h = (y_h(1), (y_h)_x(1), y_h) \in C^2([0, \infty); X^h)$  ou plus simplement trouver  $y_h \in C^2([0, \infty); V^h)$  vérifiant

$$c((y_h)_{tt}(t), \phi_j) + a((y_h)_t(t), \phi_j) + b(y_h(t), \phi_j) = 0, \quad \phi_j \in V^h \quad (2.72)$$

avec

$$y_h(\cdot, 0) = y_0^h \in V^h \quad \text{et} \quad (y_h)_t(\cdot, 0) = y_1^h \in V^h. \quad (2.73)$$

Notons que les produits scalaires  $c$  et  $b$  sont des formes bilinéaires telles que :

$$c((y_h)_{tt}(t), \phi_j) = \int_0^1 (y_h)_{tt} \phi_j dx,$$
$$b(y_h(t), \phi_j) = \int_0^1 (y_h)_{xx} (\phi_j)_{xx} dx$$

et  $a$  est une forme bilinéaire telle que :

$$a((y_h)_t(t), \phi_j) = \alpha(y_h)_t(1)(\phi_j)(1) + \beta(y_h)_{xt}(1)(\phi_j)_x(1).$$

En considérant la base choisie, on a

$$y_h(x, t) = \sum_{i=1}^N Y_i(t) \phi_i(x) \quad \text{avec} \quad y_h(x, 0) = \sum_{i=1}^N d_i \phi_i(x) \quad \text{et} \quad (y_h)_t(x, 0) = \sum_{i=1}^N l_i \phi_i(x).$$



## 2.4 Schéma semi-discret

---

On note respectivement  $Y$ ,  $d$ ,  $l$ , les représentations vectorielles des fonctions  $y_h$ ,  $y_h(x, 0)$  et  $(y_h)_t(x, 0)$  définies comme suit :

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_N]^\top,$$

$$d = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_N]^\top,$$

$$l = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_N]^\top.$$

Ainsi, l'équation (2.72) devient l'équation différentielle ordinaire du second ordre suivante :

$$\mathbb{M}Y_{tt} + \mathbb{C}Y_t + \mathbb{K}Y = 0, \quad \text{avec} \quad Y(0) = d \quad \text{et} \quad Y_t(0) = l \quad (2.74)$$

avec pour tout  $i, j = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbb{M}_{i,j} = c(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i \phi_j dx,$$

$$\mathbb{C}_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j) = \alpha \phi_i(1) \phi_j(1) + \beta (\phi_i)_x(1) (\phi_j)_x(1),$$

$$\mathbb{K}_{i,j} = b(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 (\phi_i)_{xx} (\phi_j)_{xx} dx.$$

**Remarque 2.1.** Les matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  sont appelées respectivement matrice de masse et matrice de rigidité. Les matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  étant symétriques, définies et positives, elles sont donc inversibles. Ainsi, (2.74) admet une solution unique. De même, le problème (2.72)–(2.73) admet une solution unique.

Les résultats du calcul des éléments des matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  sont donnés comme suit.

## 2.4 Schéma semi-discret

---

Pour tout  $i = 1, \dots, n$  (avec  $N = 2n$ ), on a

$$\mathbb{M}_{2i-3,2i-3} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_{2i-3})^2 dx = \frac{13}{55}h$$

$$\mathbb{M}_{2i-2,2i-2} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_{2i-2})^2 dx = \frac{1}{105}h^3$$

$$\mathbb{M}_{2i-1,2i-1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i-1})^2 dx = \frac{13}{55}h$$

$$\mathbb{M}_{2i,2i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i})^2 dx = \frac{1}{105}h^3$$

$$\mathbb{M}_{2i-1,2i-3} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i-1})(\phi_{2i-3}) dx = \frac{9}{70}h$$

$$\mathbb{M}_{2i-3,2i-2} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_{2i-3})(\phi_{2i-2}) dx = \frac{11}{210}h^2$$

$$\mathbb{M}_{2i-1,2i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i-1})(\phi_{2i}) dx = \frac{-11}{210}h^2$$

$$\mathbb{M}_{2i-1,2i-2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i-1})(\phi_{2i-2}) dx = \frac{13}{420}h^2$$

$$\mathbb{M}_{2i-3,2i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i-3})(\phi_{2i}) dx = \frac{-13}{420}h^2$$

$$\mathbb{M}_{2i,2i-2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_{2i})(\phi_{2i-2}) dx = \frac{-1}{140}h^3.$$

$$\mathbb{K}_{2i-3,2i-3} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\phi_{2i-3})'')^2 dx = \frac{12}{h^3}$$

$$\mathbb{K}_{2i-1,2i-1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i-1})'')^2 dx = \frac{12}{h^3}$$

$$\mathbb{K}_{2i-2,2i-2} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\phi_{2i-2})'')^2 dx = \frac{4}{h}$$

$$\mathbb{K}_{2i,2i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i})'')^2 dx = \frac{4}{h}$$

$$\mathbb{K}_{2i-1,2i-3} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i-1})'')((\phi_{2i-3})'') dx = \frac{-12}{h^3}$$

## 2.4 Schéma semi-discret

---

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{2i-3,2i-2} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\phi_{2i-3})'')((\phi_{2i-2})'')dx = \frac{6}{h^2} \\ \mathbb{K}_{2i-1,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i-1})'')((\phi_{2i})'')dx = \frac{-6}{h^2} \\ \mathbb{K}_{2i-3,2i} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i-3})'')((\phi_{2i})'')dx = \frac{6}{h^2} \\ \mathbb{K}_{2i-1,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i-1})'')((\phi_{2i-2})'')dx = \frac{-6}{h^2} \\ \mathbb{K}_{2i,2i-2} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\phi_{2i})'')((\phi_{2i-2})'')dx = \frac{2}{h^2}\end{aligned}$$

### 2.4.3 Estimation d'erreur a priori

Dans cette sous section, l'estimation d'erreur a priori pour la solution de l'approximation semi-discrete de Galerkin (2.72) est effectuée en adaptant une méthode décrite dans [3, 4] .

Notons que quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira

$$\int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)) \text{ pour } \int_0^t a((e_p)_t(\tau), e_t(\tau))d\tau.$$

Ou encore

$$\int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 \text{ pour } \int_0^T \|(e_p)_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.$$

Soit l'opérateur de projection  $P$  définie par

$$b(y - Py, \phi) = 0 \text{ pour tout } \phi \in V^h. \quad (2.75)$$

On note  $y_p$  la projection de la solution faible  $y \in H_t^2(0, 1)$  sur  $V^h$ . En utilisant la

## 2.4 Schéma semi-discret

---

projection, nous subdivisons l'erreur  $e_h(t) = y(t) - y_h(t)$  comme suit :

$$e_h(t) = e(t) + e_p(t) \quad \text{avec} \quad e(t) = y_p(t) - y_h(t) \quad \text{et} \quad e_p(t) = y(t) - y_p(t).$$

Soit  $H_l^4(0, 1)$  un sous espace de  $H_l^2(0, 1)$  tel que

$$H_l^4(0, 1) = \{y \in H^4(0, 1) : y(0) = y_x(0) = 0\}.$$

Supposons que

$$y \in C([0, T]; H_l^4(0, 1)),$$

$$y_t \in L^2(0, T; H_l^4(0, 1)),$$

$$y_{tt} \in L^2(0, T; H_l^2(0, 1)).$$

D'après la Proposition 3.2. p. 471 de [4] et le Théorème 5.4.8 p. 137 de [6], nous avons les estimations suivantes pour presque tout  $t$  :

$$\|e_p\|_{H_l^2(0,1)} = \|y - y_p\|_{H_l^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|y\|_{H_l^4(0,1)}, \quad (2.76)$$

$$\|(e_p)_t\|_{H_l^2(0,1)} = \|y_t - (y_p)_t\|_{H_l^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|y_t\|_{H_l^4(0,1)}, \quad (2.77)$$

$$\|(e_p)_{tt}\|_{L^2(0,1)} = \|y_{tt} - (y_p)_{tt}\|_{L^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|y_{tt}\|_{H_l^4(0,1)}, \quad (2.78)$$

avec  $C_\Pi$  une constante positive.

Rappelons maintenant quelques propositions qui seront utiles pour la suite de notre travail. Notons qu'elles sont énoncées et démontrées, dans un cadre plus général, dans [3] P7 et dans [4] P472.

**Proposition 2.1.** Soit  $y \in C^2((0, T); H_l^2(0, 1))$  et  $y_p \in C^2((0, T); V^h)$  alors

$$c((e_h)_{tt}(t), \phi) + a((e_h)_t(t), \phi) + b(e(t), \phi) = 0, \quad \text{pour chaque} \quad \phi \in V^h. \quad (2.79)$$

## 2.4 Schéma semi-discret

---

**Proposition 2.2.** Si  $e_p \in C^1([0, T]; H_t^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_t^2(0, 1))$ , alors pour tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)) = a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)).$$

L'estimation de l'erreur  $e(t) = y_p(t) - y_h(t)$  est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 2.5.** Soit  $y \in C^1([0, T]; H_t^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_t^2(0, 1))$  alors,

$$\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)} + \|e(t)\|_{H_t^2(0,1)} \leq 4\sqrt{e^{3t}}A_T \quad (2.80)$$

avec

$$\begin{aligned} A_T = & \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_t^2(0,1)} + 3K \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_t^2(0,1)} \\ & + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{1+K}\|e(0)\|_{H_t^2(0,1)} + \sqrt{K}\|(e_p)_t(0)\|_{H_t^2(0,1)} \end{aligned} \quad (2.81)$$

où  $K$  est une constante positive.

*Démonstration.* On a  $e = y_p - y_h$  par conséquent  $e \in V^h$ . En remplaçant  $y_h$  par  $e$  dans (2.72), on a :

$$c(e_{tt}, \phi_j) + a(e_t, \phi_j) + b(e, \phi_j) = 0, \quad \phi_j \in V^h. \quad (2.82)$$

Ensuite, en prenant  $\phi_j = e_t$  dans (2.82), on obtient de manière analogue à (2.6), l'expression de l'énergie suivant  $e$  :

$$E(t, e) = \frac{1}{2}c(e_t(t), e_t(t)) + \frac{1}{2}b(e(t), e(t)) = \frac{1}{2}\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2}\|e(t)\|_{H_t^2(0,1)}^2. \quad (2.83)$$

## 2.4 Schéma semi-discret

---

Puisque  $b$  et  $c$  sont des produits scalaires et d'après (2.83), on a :

$$\frac{d}{dt}E(t, e) = c(e_{tt}(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)). \quad (2.84)$$

Prenons maintenant  $\phi = e_t$  dans (2.79). En considérant (2.75), on obtient :

$$\begin{aligned} c((e_h)_{tt}(t), e_t(t)) + a((e_h)_t(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)) &= 0 \\ c(e_{tt}(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)) + c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) + a((e_p)_t(t), e_t(t)) + a(e_t(t), e_t(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.84) et le fait que  $a(e_t(t), e_t(t)) \geq 0$ , on a l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt}E(t, e) \leq -c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) - a((e_p)_t(t), e_t(t)). \quad (2.85)$$

Par conséquent, pour tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}E(., e) \leq - \int_0^t c((e_p)_{tt}(.), e_t(.)) - \int_0^t a((e_p)_t(.), e_t(.)). \quad (2.86)$$

Puisque  $e_p \in C^1([0, T]; H_l^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_l^2(0, 1))$ , d'après la Proposition 2.2, on a pour tout  $t \in (0, T)$

$$\int_0^t a((e_p)_t(.), e_t(.)) = a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(.), e(.)). \quad (2.87)$$

En considérant (2.86) et (2.87), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt}E(., e) \leq & - \int_0^t c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) \\ & - \left( a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(.), e(.)) \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Considérons à présent les estimations suivantes obtenues en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young.

## 2.4 Schéma semi-discret

---

D'après (2.83), on a :

$$\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2E(t, e).$$

De plus,

$$|c((e_p)_{tt}(t), e_t(t))| \leq \frac{1}{2} \|(e_p)_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} |a((e_p)_t(t), e(t))| &\leq K \|(e_p)_t(t)\|_{H^1_1(0,1)} \|e(t)\|_{H^1_1(0,1)} \\ &\leq K\varepsilon^{-2} \|(e_p)_t(t)\|_{H^1_1(0,1)}^2 + 2K\varepsilon^2 E(t, e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)) \right| &\leq \int_0^t |a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot))| \\ &\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H^1_1(0,1)}^2 + K\varepsilon^2 \int_0^t \|e(\cdot)\|_{H^1_1(0,1)}^2 \\ &\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H^1_1(0,1)}^2 + 2K\varepsilon^2 \int_0^t E(\cdot, e) \end{aligned}$$

et

$$|a((e_p)_t(0), e(0))| \leq \frac{1}{2} K \|(e_p)_t(0)\|_{H^1_1(0,1)}^2 + \frac{1}{2} K \|e(0)\|_{H^1_1(0,1)}^2.$$

Où  $\varepsilon$  est une constante strictement positive prise de façon arbitraire et  $K \geq \alpha + \beta$ .

À partir des inégalités précédentes et en choisissant  $\varepsilon$  tel que  $2K\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ , (2.88)

devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E(t, e) &\leq \frac{3}{2} \int_0^t E(\cdot, e) + \frac{1}{2} \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + 4K^2 \|(e_p)_t(t)\|_{H^1_1(0,1)}^2 \\ &\quad + 4K^2 \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H^1_1(0,1)}^2 + E(0, e) + \frac{1}{2} K \|(e_p)_t(0)\|_{H^1_1(0,1)}^2 + \frac{1}{2} K \|e(0)\|_{H^1_1(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

## 2.4 Schéma semi-discret

---

En multipliant (2.90) par 2, on obtient

$$E(t, e) \leq 3 \int_0^t E(\cdot, e) + K_T \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } K_T = & \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + 8K^2 \max_{t \in [0,T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_t^2(0,1)}^2 + 8K^2 \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_t^2(0,1)}^2 \\ & + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + (1+K)\|e(0)\|_{H_t^2(0,1)}^2 + K\|(e_p)_t(0)\|_{H_t^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on a  $E(t, e) \leq K_T e^{3t}$  c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|e(t)\|_{H_t^2(0,1)}^2 \leq K_T e^{3t}.$$

En considérant les inégalités

$$\left( \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)} + \|e(t)\|_{H_t^2(0,1)} \right)^2 \leq 2\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2\|e(t)\|_{H_t^2(0,1)}^2 \leq 4K_T e^{3t}$$

et

$$\begin{aligned} K_T \leq & 4 \left[ \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} + 3K \max_{t \in [0,T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_t^2(0,1)} + 3K \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_t^2(0,1)} \right. \\ & \left. + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{1+K}\|e(0)\|_{H_t^2(0,1)} + \sqrt{K}\|(e_p)_t(0)\|_{H_t^2(0,1)} \right]^2, \end{aligned}$$

on obtient finalement le résultat (2.80). □

À présent, nous donnons un résultat important pour la convergence du schéma semi-discret :

**Théorème 2.6.** *Soit  $y$  la solution de (2.27). Supposons que*

*$y \in C^1([0, T]; H_t^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_t^2(0, 1))$ ,  $y_{tt} \in L^2([0, T]; H_t^4(0, 1))$ . À partir des*



## 2.4 Schéma semi-discret

---

expressions (2.76)–(2.78) et (2.80), pour tout  $t \in (0, T)$  on a

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y_h(t)\|_{H_t^2(0,1)} + \|y_t(t) - (y_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} &\leq C_\Pi h^2 \left( \|y(t)\|_{H_t^4(0,1)} + \|y_t(t)\|_{H_t^4(0,1)} \right) \\
&+ 4\sqrt{e^{3t}} C_\Pi h^2 \left[ \int_0^T \|y_{tt}(\cdot)\|_{H_t^4(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|y_t(t)\|_{H_t^4(0,1)} \right. \\
&+ 3K \int_0^T \|y_{tt}(\cdot)\|_{H_t^4(0,1)} \left. \right] + 4\sqrt{e^{3t}} \left[ \|y_1^P - y_1^h\|_{L^2(0,1)} \right. \\
&+ \left. \sqrt{1+K} \|y_0^P - y_0^h\|_{H_t^2(0,1)} + \sqrt{K} \|y_1 - y_1^P\|_{H_t^2(0,1)} \right]. \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Avec  $y_p(\cdot, 0) = y_0^P$  et  $(y_p)_t(\cdot, 0) = y_1^P$ .

De plus, si  $y_0^h$  et  $y_1^h$  sont respectivement les interpolations d'Hermite de  $y_0$  et de  $y_1$ , alors :

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y_h(t)\|_{H_t^2(0,1)} + \|y_t(t) - (y_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} &\leq C_\Pi h^2 \left[ \left( \|y(t)\|_{H_t^4(0,1)} + \|y_t(t)\|_{H_t^4(0,1)} \right) \right. \\
&+ 4\sqrt{e^{3t}} \left( (T + 3KT) \max_{t \in [0, T]} \|y_{tt}(t)\|_{H_t^4(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|y_t(t)\|_{H_t^4(0,1)} \right. \\
&+ \left. \left. (2 + \sqrt{K}) \|y_1\|_{H_t^4(0,1)} + 2\sqrt{1+K} \|y_0\|_{H_t^4(0,1)} \right) \right]. \quad (2.93)
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $y \in C^1([0, T]; H_t^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_t^2(0, 1))$  et  $y_{tt} \in L^2([0, T]; H_t^4(0, 1))$ . Alors, pour tout  $t \in (0, T)$  on a

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y_h(t)\|_{H_t^2(0,1)} + \|y_t(t) - (y_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} &\leq \|y(t) - (y_p)(t)\|_{H_t^2(0,1)} \\
&+ \|y_t(t) - (y_p)_t(t)\|_{L^2(0,1)} \quad (2.94) \\
&+ \|e(t)\|_{H_t^2(0,1)} + \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.5, (2.94) et (2.76)–(2.78), on obtient (2.92).

Aussi, en considérant  $y_0^h = \Pi y_0$  et  $y_1^h = \Pi y_1$  respectivement les interpolations

## 2.4 Schéma semi-discret

---

d'Hermite de  $y_0$  et de  $y_1$ , on a :

$$\begin{aligned} \|y_0^P - \Pi y_0\|_{H_t^2(0,1)} &\leq \|y_0^P - y_0\|_{H_t^2(0,1)} + \|y_0 - \Pi y_0\|_{H_t^2(0,1)} \\ &\leq 2C_\Pi h^2 \|y_0\|_{H_t^4(0,1)} \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \|y_1^P - \Pi y_1\|_{L^2(0,1)} &\leq C \|y_1^P - y_1\|_{H_t^2(0,1)} + C \|y_1 - \Pi y_1\|_{H_t^2(0,1)} \\ &\leq 2C_\Pi h^2 \|y_1\|_{H_t^4(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Finalement, à partir de (2.95), (2.96) et l'inégalité

$$\int_0^T \|y_{tt}(\cdot)\|_{H_t^4(0,1)} \leq T \max_{t \in [0, T]} \|y_{tt}(t)\|_{H_t^4(0,1)},$$

on obtient (2.93). □

**Remarque 2.2.** *L'ordre de convergence pour le schéma semi-discrétisé en espace est de 2.*

Conclusion : En définitive, nous avons établi dans ce chapitre l'existence et l'unicité d'une solution forte et d'une solution faible pour le problème (2.1)–(2.5), en utilisant respectivement la théorie des  $C_0$ -semi-groupes et la méthode de Faedo-Galerkin. Nous avons développé un schéma numérique semi-discret stable, dont l'ordre de convergence est 2. En outre, nous avons obtenu une estimation de l'erreur a priori pour la solution de l'approximation semi-discrète.

Avant d'effectuer les simulations numériques qui permettront une validation numérique des résultats présentés dans ce chapitre, intéressons-nous au deuxième problème à l'étude dans cette thèse.

---

## Chapitre 3

# Méthode numérique par la méthode des éléments finis (MEF) pour une équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

### 3.1 Introduction

Nous étudions, dans ce chapitre, une équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables. La poutre considérée est encastree à une extrémité et contrôlée à l'autre extrémité, en force et en moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et du terme de position (respectivement l'angle de rotation) dans le contrôle force (respectivement moment). Ce système de poutre vibrante est décrit par les équations suivantes :

### 3.1 Introduction

---

$$\rho(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (3.1)$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1, t) = (2\mu_{11}w_t + \mu_{12}w_{xt} + \alpha w_x)(1, t), \quad t > 0 \quad (3.3)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = (\mu_{21}w_t + 2\mu_{22}w_{xt} + \beta w)(1, t), \quad t > 0 \quad (3.4)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (3.5)$$

où  $w(x, t)$  est la déviation transversale à la position  $x$  et au temps  $t$ . On suppose que  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\mu_{ij} \geq 0$ , avec  $1 \leq i, j \leq 2$  sont des constantes telles que :

$$\mu_{12} > 0 \quad \text{et} \quad \mu_{12}\mu_{21} \geq (\mu_{11} + \mu_{22})^2. \quad (3.6)$$

Pour le système (3.1)–(3.5), nous supposons que la longueur de la poutre est égale à l'unité. De plus, la masse linéique de la poutre  $\rho(x)$  et sa rigidité en flexion  $EI(x)$  satisfont les conditions suivantes :

$$(\rho(x), EI(x)) \in [C^4(0, 1)]^2, \text{ avec } \rho(x) > 0, EI(x) > 0, \quad (3.7)$$

pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Rappelons que le cas uniforme de ce système avec les conditions  $\mu_{12}\mu_{21} \geq (\mu_{11} + \mu_{22})^2$  et  $\alpha = \beta = 0$ , est appelé deuxième problème de Rideau [36] selon Grabowski P. [16]. Aussi, la propriété de base de Riesz et la stabilisation exponentielle du système (3.1)–(3.5) ont été étudiées par My Driss Aouragh et Naji Yebari ([1]). Dans leur article, les auteurs ont montré qu'il existe une suite de fonctions propres généralisées qui forme une base de Riesz de l'espace d'énergie considéré, et qu'il y a stabilité exponentielle sous certaines conditions portant sur les coefficients de feedback assurant la dissipation. De plus, pour étudier numériquement le spectre du système, ils ont utilisé la méthode des différences finies et la méthode

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

QZ [32, 15].

Bomisso et al ([5]), en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et le travail de Lions et al [23], ont étudié l'existence et l'unicité de la solution faible pour une poutre flexible d'Euler-Bernoulli soumise à un contrôle force en rotation et vitesse de rotation (une étude à coefficients constants). Nous adaptons la même procédure pour montrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (3.1) sous les conditions (3.2)–(3.4). Notons que l'apparition des termes dépendant que du temps dans la définition de la solution faible du problème aux valeurs limites complique l'application des techniques standards énoncées dans [23, 14]. Nous surmontons cette difficulté en adaptant ces techniques standards. De plus, nous développons une méthode numérique semi discrète stable et convergente qui préserve inconditionnellement les résultats obtenus dans le cas continu. Nous effectuons une estimation de l'erreur a priori pour l'approximation semi-discrète et déterminons l'ordre de convergence en utilisant une méthode récente décrite dans [3, 4].

Le reste de ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 3.2, nous prouvons que le problème est bien posé au sens des  $C_0$ -semi-groupes de contractions. Ensuite, à partir de la formulation faible du problème, nous montrons dans la section 3.3 l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible. Enfin, à la section 3.4, une méthode numérique semi-discrète est construite en utilisant la méthode des éléments finis. La convergence de cette méthode est démontrée et une estimation d'erreur a priori est obtenue.

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

Dans cette section, le système (3.1)–(3.5) est écrit sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait sur un espace de Hilbert convenablement choisi. Aussi, le caractère

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

bien posé au sens des  $C_0$ -semi-groupes de contractions et la stabilité au sens de Lyapunov du problème de Cauchy sont démontrés.

#### 3.2.1 Problème bien posé au sens des semi-groupes

Introduisons l'espace fonctionnel suivant :

$$H_E^2(0, 1) = \{w \in H^2(0, 1) : w(0) = w_x(0) = 0\}.$$

Considérons comme espace d'énergie, l'espace de Hilbert défini par

$$\mathcal{X} = H_E^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \quad (3.8)$$

muni du produit scalaire

$$\langle w, v \rangle_{\mathcal{X}} = \int_0^1 \rho g_1 g_2 dx + \int_0^1 EI(f_1)_{xx}(f_2)_{xx} dx + \alpha(f_1)_x(1)(f_2)_x(1) + \beta f_1(1)f_2(1) \quad (3.9)$$

où  $w = (f_1, g_1)^\top \in \mathcal{X}$ ,  $v = w_t = (f_2, g_2)^\top \in \mathcal{X}$ .

Notons  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  la norme associée au produit scalaire précédent.

Soit  $\mathbb{H} = (H_E^2(0, 1) \cap H^4(0, 1)) \times H_E^2(0, 1)$ .

Considérons  $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  l'opérateur linéaire de domaine

$$D(A) = \left\{ (f, g)^\top \in \mathbb{H} : \begin{aligned} -EI(1)f_{xx}(1) &= 2\mu_{11}g(1) + \mu_{12}g_x(1) + \alpha f_x(1), \\ (EI(\cdot)f_{xx})_x(1) &= \mu_{21}g(1) + 2\mu_{22}g_x(1) + \beta f(1) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

défini par

$$A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\cdot) \\ -\frac{1}{\rho(\cdot)} (EI(\cdot)f_{xx})_{xx} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

Le système (3.1)–(3.5) peut être formulé d’une façon équivalente comme un problème de Cauchy sur  $\mathcal{X}$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{X}, \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^\top$ ,  $y(0) = (w_0, v_0)^\top$  pour tout  $t > 0$ .

**Théorème 3.1.** *L’opérateur  $A$  défini par (3.10)–(3.11) est dense et engendre un  $C_0$ -semi-groupe de contractions sur  $\mathcal{X}$  noté  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . De plus,  $A^{-1}$  existe et est compact.*

*Démonstration.*

–Nous commençons par démontrer que l’opérateur  $A$  est générateur d’un  $C_0$ -semi-groupe de contractions en utilisant le théorème bien connu de Lumer-Phillips énoncé au Théorème 1.28 du chapitre 1.

Montrons premièrement que  $A$  est un opérateur dissipatif.

Pour tout  $w = (f, g)^\top \in D(A)$ ,

$$\begin{aligned} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{X}} &= \left\langle \left( g(x), -\frac{1}{\rho(x)} (EI(x)f_{xx}(x))_{xx} \right)^\top, (f, g)^\top \right\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \int_0^1 - (EI(x)f_{xx}(x))_{xx} g(x) dx + \int_0^1 EI(x)g_{xx}(x)f_{xx}(x) dx \\ &\quad + \alpha g_x(1)f_x(1) + \beta g(1)f(1). \end{aligned}$$

On intègre deux fois par parties l’expression précédente. Puis, en utilisant les conditions aux bords (3.2)–(3.4) et en prenant la partie réelle, on obtient :

$$\langle Aw, w \rangle_{\mathcal{X}} = - \left( \mu_{21} [g(1)]^2 + \mu_{12} [g_x(1)]^2 + 2\mu_{22}g_x(1)g(1) + 2\mu_{11}g(1)g_x(1) \right) \leq 0.$$

Ainsi,  $A$  est un opérateur dissipatif.

Montrons maintenant que  $I - A$  est surjectif c’est-à-dire prouvons que pour tout  $(f, g)^\top \in \mathcal{X}$ , nous pouvons trouver  $(w, v)^\top \in D(A)$  tel que  $(I - A)(w, v) = (f, g)$ .

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

On sait que  $(I - A)(w, v) = (f, g)$  équivaut au système d'équations suivant :

$$v = w - f \quad (3.13)$$

$$\rho(x)w + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = \rho(x)(g + f) \quad (3.14)$$

$$-EI(1)w_{xx}(1, t) = (2\mu_{11}v + \mu_{12}v_x + \alpha w_x)(1, t) \quad (3.15)$$

$$(EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = (\mu_{21}v + 2\mu_{22}v_x + \beta w)(1, t) \quad (3.16)$$

avec  $\rho(x)(g + f) \in L^2(0, 1)$ .

Multiplions (3.14) par  $\varphi \in H_E^2(0, 1)$ . Après deux intégrations par parties sur  $(0, 1)$  et en utilisant les conditions (3.15)-(3.16), nous obtenons :

$$a(w, \varphi) = L(\varphi) \quad (3.17)$$

où ,

$$\begin{aligned} a(w, \varphi) &= \int_0^1 \rho(x)w\varphi dx + \int_0^1 (EI(x)w_{xx})\varphi_{xx} dx + \alpha w_x(1)\varphi_x(1) + \beta w(1)\varphi(1) + \\ &+ 2\mu_{11}w(1)\varphi_x(1) + \mu_{12}w_x(1)\varphi_x(1) + \mu_{21}w(1)\varphi(1) + 2\mu_{22}w_x(1)\varphi(1). \\ L(\varphi) &= \int_0^1 \rho(x)(g + f)\varphi dx + 2\mu_{11}f(1)\varphi_x(1) + \mu_{12}f_x(1)\varphi_x(1) + \mu_{21}f(1)\varphi(1) \\ &+ 2\mu_{22}f_x(1)\varphi(1). \end{aligned}$$

Pour tout  $w \in H_E^2(0, 1)$  ,  $\varphi \in H_E^2(0, 1)$  et  $x \in (0, 1)$ , on a



### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

$$\begin{aligned}
|a(w, \varphi)| &\leq \int_0^1 \rho(x) |w| |\varphi| dx + \int_0^1 EI(x) |w_{xx}| |\varphi_{xx}| dx + \alpha |w_x(1)| |\varphi_x(1)| + \beta |w(1)| |\varphi(1)| \\
&\quad + 2\mu_{11} |w(1)| |\varphi_x(1)| + \mu_{12} |w_x(1)| |\varphi_x(1)| + \mu_{21} |w(1)| |\varphi(1)| + 2\mu_{22} |w_x(1)| |\varphi(1)| \\
&\leq \|\rho\|_\infty \|w\|_{L^2(0,1)} \|\varphi\|_{L^2(0,1)} + \|EI\|_\infty \|w_{xx}\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_{xx}\|_{L^2(0,1)} + \alpha \|w_x\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty \\
&\quad + \beta \|w\|_\infty \|\varphi\|_\infty + 2\mu_{11} \|w\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty + \mu_{12} \|w_x\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty + \mu_{21} \|w\|_\infty \|\varphi\|_\infty \\
&\quad + 2\mu_{22} \|w_x\|_\infty \|\varphi\|_\infty \\
&\leq (\|\rho\|_\infty + \|EI\|_\infty) \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)} \\
&\quad + M (2\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{21} + 2\mu_{22} + \alpha + \beta) \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)} \\
|a(w, \varphi)| &\leq C \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

Avec  $M$  et  $C = (\|\rho\|_\infty + \|EI\|_\infty + M (2\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{21} + 2\mu_{22} + \alpha + \beta))$  deux constantes strictement positives.  $a(., .)$  est donc continue sur  $H_E^2(0, 1) \times H_E^2(0, 1)$ .

De plus,

$$\begin{aligned}
a(w, w) &= \int_0^1 \rho(x) |w|^2 dx + \int_0^1 EI(x) |w_{xx}|^2 dx + \alpha |w_x(1)|^2 + \beta |w(1)|^2 \\
&\quad + 2\mu_{11} w(1) w_x(1) + \mu_{12} |w_x(1)|^2 + \mu_{21} |w(1)|^2 + 2\mu_{22} w_x(1) w(1) \\
&= \|w\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w\|_{H_E^2(0,1)}^2 + 2\mu_{11} w(1) w_x(1) + \mu_{12} |w_x(1)|^2 \\
&\quad + \mu_{21} |w(1)|^2 + 2\mu_{22} w_x(1) w(1) \\
&\geq \|w\|_{H_E^2(0,1)}^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,  $a(., .)$  est coercive sur  $H_E^2(0, 1) \times H_E^2(0, 1)$ .

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

Aussi, on a :

$$\begin{aligned}
 |L(\varphi)| &\leq \int_0^1 \rho(x)(|g| + |f|)|\varphi|dx + 2\mu_{11}|f(1)||\varphi_x(1)| + \mu_{12}|f_x(1)||\varphi_x(1)| + \mu_{21}|f(1)||\varphi(1)| \\
 &\quad + 2\mu_{22}|f_x(1)||\varphi(1)| \\
 &\leq \|\rho\|_\infty (\|g\|_{L^2(0,1)} + \|f\|_{L^2(0,1)}) \|\varphi\|_{L^2(0,1)} + 2\mu_{11}\|f\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty + \mu_{12}\|f_x\|_\infty \|\varphi_x\|_\infty \\
 &\quad + \mu_{21}\|f\|_\infty \|\varphi\|_\infty + 2\mu_{22}\|f_x\|_\infty \|\varphi\|_\infty \\
 &\leq M\|\rho\|_\infty \left( \|g\|_{H_E^2(0,1)} + 2\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{21} + 2\mu_{22} + \alpha + \beta \right) \|\varphi\|_{H_E^2(0,1)} \\
 &\leq C\|\varphi\|_{H_E^2(0,1)}.
 \end{aligned}$$

Où la constante  $C > 0$ .  $L$  est donc continue sur  $H_E^2(0, 1)$ .

De ce qui précède, on déduit que la forme bilinéaire  $a(., .)$  est continue, coercive et la forme linéaire  $L(.)$  est continue.

D'après le Théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution  $w \in H_E^2(0, 1) \cap H^4(0, 1)$  pour (3.17).

Considérons maintenant  $\varphi \in \mathcal{D}(0, 1)$ . Après deux intégrations par parties de (3.17), on obtient :

$$\int_0^1 \rho(x)w\varphi dx + \int_0^1 (EI(x)w_{xx})_{xx} \varphi dx = \int_0^1 \rho(x)(g + f)\varphi dx$$

Posons  $h = \rho(x)(g + f)$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \rho(x)w\varphi dx + \int_0^1 (EI(x)w_{xx})_{xx} \varphi dx - \int_0^1 h\varphi dx &= 0 \\
 \int_0^1 \left( \rho(x)w + (EI(x)w_{xx})_{xx} - h \right) \varphi dx &= 0
 \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{D}(0, 1)$  est dense dans  $L^2(0, 1)$ , on a

$$\left( \rho(x)w + (EI(x)w_{xx})_{xx} - h \right) = 0 \text{ p.p. sur } (0, 1)$$

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

et

$$\left( \rho(x)w + (EI(x)w_{xx})_{xx} \right) = h \text{ dans } \mathcal{D}'(0, 1).$$

En utilisant en particulier  $\varphi \in H_E^2(0, 1)$ , on retrouve les conditions aux bords.

On en déduit que  $(w, v)^\top \in D(A)$  et  $I - A$  est surjectif.

Finalement, l'opérateur  $A$  est m-dissipatif et d'après le Théorème de Lumer-Phillips,  $A$  est générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions sur  $\mathcal{X}$ .

D'après le Corollaire 2.5 p. 5 de [34] le domaine  $D(A)$  est dense dans  $\mathcal{X}$ .

De plus, d'après Proposition 2.1. p.486 de [1] ,  $A^{-1}$  existe et est compact dans  $\mathcal{X}$ . □

D'après le Théorème 1.32 puis la Remarque 1.8 du Chapitre 1, le Théorème 3.1 implique le résultat suivant :

**Théorème 3.2.** (3.12) *admet une unique solution généralisée  $y(t) = S(t)y_0 \in C([0, \infty); \mathcal{X})$ , pour tout  $y_0 \in \mathcal{X}$ .*

#### 3.2.2 Stabilité au sens de Lyapunov de (3.12)

L'idée de cette partie est que, s'il existe sur l'espace Hilbert  $\mathcal{X}$  une fonctionnelle  $\mathcal{V} \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  telle que l'ensemble  $\{x : \mathcal{V}(x) = 0\}$  ne contient aucune orbite négative complète sauf  $x = 0$  et si  $\frac{d}{dt}\mathcal{V} \leq 0$  (la dérivée temporelle généralisée de  $\mathcal{V}$ ) alors le système est stable au sens de Lyapunov.

Considérons à présent l'énergie mécanique totale du système (3.1)–(3.5) donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \rho(x)w_t^2 dx + \int_0^1 EI(x)w_{xx}^2 dx + \alpha w_x^2(1) + \beta w^2(1) \right). \quad (3.18)$$

### 3.2 Problème bien posé et stabilité au sens de Lyapunov

---

Afin d'obtenir la dérivée par rapport au temps de l'énergie  $E(t)$ , on multiplie (3.1) par  $w_t$ . Puis, on effectue deux intégrations par partie de l'expression obtenue en tenant compte des conditions (3.2)–(3.4). On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \rho(x) w_{tt} w_t dx + \int_0^1 EI(x) w_{txx} w_{xx} dx + \alpha w_{tx}(1) w_x(1) + \beta w_t(1) w(1) \\
 &= -2(\mu_{22} + \mu_{11}) w_{xt}(1, t) w_t(1, t) - \mu_{21} w_t^2(1, t) - \mu_{12} w_{xt}^2(1, t) \\
 & \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \rho(x) w_t^2 dx + \int_0^1 EI(x) w_{xx}^2 dx + \alpha w_x^2(1) + \beta w^2(1) \right) \right] \\
 &= -2(\mu_{22} + \mu_{11}) w_{xt}(1, t) w_t(1, t) - \mu_{21} w_t^2(1, t) - \mu_{12} w_{xt}^2(1, t).
 \end{aligned}$$

Ainsi, en considérant (3.6), la dérivée par rapport au temps de l'énergie  $E(t)$  est telle que :

$$\frac{d}{dt} E(t) = -2(\mu_{22} + \mu_{11}) w_{xt}(1, t) w_t(1, t) - \mu_{21} w_t^2(1, t) - \mu_{12} w_{xt}^2(1, t) \leq 0. \quad (3.19)$$

De la propriété de contraction du semi-groupe définie au Théorème 3.1, on déduit que  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  est un potentiel candidat pour la fonctionnelle de Lyapunov pour (3.12).

Soit  $\mathcal{V} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme suit :

$$\mathcal{V}(y) = \frac{1}{2} \|y\|_{\mathcal{X}}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 EI(x) w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) w_t^2 dx + \frac{1}{2} \alpha w_x^2(1, t) + \frac{1}{2} \beta w^2(1, t). \quad (3.20)$$

Comme pour (3.19), on montre que pour toute solution classique  $y$  on a :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(y) = -2(\mu_{22} + \mu_{11}) w_{xt}(1, t) w_t(1, t) - \mu_{21} w_t^2(1, t) - \mu_{12} w_{xt}^2(1, t) \leq 0. \quad (3.21)$$

Ainsi, l'évolution dans le temps de la fonctionnelle  $\mathcal{V}$  tout au long de la solution classique est décroissante. De plus, d'après le Théorème 3.1, la décroissance de l'énergie tout au long des solutions classiques peut être étendue aux solutions généralisées. Ainsi,  $\mathcal{V}$  est la fonction de Lyapunov pour (3.12). Le système (3.12)

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

est stable au sens de Lyapunov.

De plus, le plus grand sous-ensemble invariant  $\mathfrak{M}$  de  $\left\{ y \in \mathcal{X} : \frac{d\mathcal{V}}{dt}(y) = 0 \right\}$  est réduit à  $\{0\}$ . En appliquant le principe d'invariance de LaSalle (voir Proposition 1.18 du Chapitre 1), on obtient le résultat de stabilité suivant :

**Théorème 3.3.** *Soit  $y(t)$  la solution généralisée de (3.12) pour tout  $y_0 \in \mathcal{X}$ . Alors  $y(t) \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{X}$  quand  $t \rightarrow \infty$ .*

## 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

Dans cette section, la formulation faible du système (3.1)–(3.5) est déterminée et la solution faible est définie. Aussi, l'existence et l'unicité de la solution faible sont prouvées. Notons que cette formulation faible servira à la section 3.4 pour développer une méthode numérique appropriée.

### 3.3.1 Caractérisation de la solution faible

Soit  $\phi \in H_E^2(0, 1)$ . On multiplie (3.1) par  $\phi$  et on intègre sur  $[0, 1]$ . On obtient :

$$\int_0^1 \rho(x) w_{tt} \phi + \int_0^1 (EI(x) w_{xx})_{xx} \phi = 0.$$

Après deux intégrations par parties et en considérant les conditions aux limites (3.2)–(3.4), on obtient l'égalité suivante appelée formulation faible du problème (3.1)–(3.5).

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho(x) w_{tt} \phi dx + \int_0^1 EI(x) w_{xx} \phi_{xx} dx + \alpha w_x(1) \phi_x(1) + \beta w(1) \phi(1) + 2\mu_{11} w_t(1) \phi_x(1) \\ & + \mu_{12} w_{xt}(1) \phi_x(1) + \mu_{21} w_t(1) \phi(1) + 2\mu_{22} w_{xt}(1) \phi(1) = 0, \quad \forall \phi \in H_E^2(0, 1), \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

Afin de définir la solution faible du problème (3.1)–(3.5), nous adaptons les idées des auteurs H.T. Banks et al [2]. Ainsi, nous commençons par effectuer un choix approprié d'espaces fonctionnels.

Soient l'espace de Hilbert

$$O = \{ \hat{z} = (z(1), z_x(1), z), z \in L^2(0, 1) \}$$

muni du produit scalaire défini par :

$$\langle \hat{z}_1, \hat{z}_2 \rangle_O = \langle \rho z_1, z_2 \rangle_{L^2(0,1)}$$

et l'espace de Hilbert

$$Z = \{ \hat{\phi} = (\phi(1), \phi_x(1), \phi), \phi \in H_E^2(0, 1) \}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\langle \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \rangle_Z = \langle (\phi_1)_{xx}, (\phi_2)_{xx} \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Remarquons que  $Z$  est un sous-espace dense dans  $O$  et l'injection canonique de  $Z$  dans  $O$  est continue. En considérant  $O$  comme espace pivot, nous obtenons le triplet

$$Z \subset O \subset Z'$$

avec  $Z'$  le dual topologique de  $Z$ .

Considérons aussi les formes bilinéaires

$$b^{(1)} : Z \times Z \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\left( \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \right) \mapsto \langle EI \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \rangle_Z + \alpha (\phi_1)_x(1) (\phi_2)_x(1) + \beta \phi_1(1) \phi_2(1)$$

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

et

$$b^{(2)} : O \times O \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\hat{z}_1, \hat{z}_2) \mapsto 2\mu_{11}z_1(1)(z_2)_x(1) + \mu_{12}(z_1)_x(1)(z_2)_x(1) + \mu_{21}z_1(1)z_2(1) + 2\mu_{22}(z_1)_x(1)z_2(1).$$

On considère pour la suite la notation  $\hat{z} = (z(1), z_x(1), z) = ({}^1\hat{z}, {}^2\hat{z}, {}^3\hat{z})$ .

Aussi, rappelons que  $[Z, O]_{\frac{1}{2}}$  désigne un espace intermédiaire tel que défini au Chapitre 1 à la Définition 1.37.

Définissons maintenant la solution faible du problème (3.1)–(3.5).

**Définition 3.1.** Soit  $T > 0$  bien fixé.  $\hat{w} = (w(1), w_x(1), w)$  est une solution faible du problème (3.1)–(3.5) sur  $[0, T]$  si

$$\hat{w} \in L^2(0, T; Z) \quad \text{avec} \quad \hat{w}_t \in L^2(0, T; O), \quad \hat{w}_{tt} \in L^2(0, T; Z')$$

et satisfait

$$\langle \hat{w}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{Z', Z} + b^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + b^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi}) = 0 \quad (3.23)$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$  et pour tout  $\hat{\phi} \in Z$ , avec les conditions initiales

$$\hat{w}(0) = \hat{w}_0 = (w_0(1), (w_0)_x(1), w_0) \in Z, \quad (3.24)$$

$$\hat{w}_t(0) = \hat{v}_0 = (v_0(1), (v_0)_x(1), v_0) \in O. \quad (3.25)$$

**Remarque 3.1.** Dans la Définition 3.1, notons que les hypothèses  $\hat{w} \in L^2(0, T; Z)$  et  $\hat{w}_t \in L^2(0, T; O)$  impliquent que  $\hat{w} \in C\left([0, T]; [Z, O]_{\frac{1}{2}}\right)$  après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle (voir Théorème 3.1 p.23 de [23]). Cela donne un sens aux conditions initiales (3.24)–(3.25).

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

#### 3.3.2 Existence de la solution faible

Pour prouver l'existence de la solution faible, nous aurons besoin du lemme suivant dont la preuve apparaît dans [5] p. 155-157.

**Lemme 3.1.** Soit  $H_E^2(0, 1)$  un sous-espace de  $H^2(0, 1)$ . Alors, il existe une suite de fonctions  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  telle que  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  soit une base orthogonale de  $H_E^2(0, 1)$  et  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  soit une base orthonormale de  $L^2(0, 1)$ .

Aussi, rappelons le théorème de dualité énoncé au Théorème 1.27 du Chapitre 1.

**Lemme 3.2.** Soient  $Z$  et  $O$  deux espaces de Hilbert tels que  $Z$  soit continument dense dans  $O$ . Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , on a :

$$[Z, O]_\theta' = [O', Z']_{1-\theta}.$$

avec équivalence de normes.

Énonçons maintenant le théorème d'existence de la solution faible qui est l'un des résultats fondamentaux de cette section.

**Théorème 3.4.** Il existe une solution  $\hat{w}$  pour la formulation faible (3.23)–(3.25) telle que

$$\hat{w} \in L^\infty(0, T; Z) \tag{3.26}$$

$$\hat{w}_t \in L^\infty(0, T; O) \tag{3.27}$$

$$\hat{w} \in C\left([0, T]; [Z, O]_{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.28}$$

$$\hat{w}_t \in C\left([0, T]; [Z, O]_{\frac{1}{2}}'\right) \tag{3.29}$$

*Démonstration.* Dans cette démonstration, nous adaptons la méthode de Faedo-Galerkin afin de prouver l'existence de la solution faible.



### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

On sait d'après le Lemme 3.1 qu'on peut trouver une suite de fonctions  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ , telle que  $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$  soit une base orthogonale pour  $Z$  et une base orthonormale pour  $O$ . Les espaces de dimension finie engendrés par  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  sont définis de la manière suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \hat{V}_m := \text{Vect} \left\{ \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_m \right\}. \quad (3.30)$$

#### –Construction des solutions approchées

Considérons la solution approchée

$$\hat{w}_m(t) = \sum_{i=1}^m \sigma_{im}(t) \hat{\phi}_i \in \hat{V}_m \quad (3.31)$$

avec les  $\sigma_{im}(t) \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq t \leq T$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) solutions de la formulation faible (3.23) sur  $\hat{V}_m$ . Soit  $m$  un entier non nul fixé. On a :

$$\langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_O + b^{(1)}(\hat{w}_m, \hat{\phi}) + b^{(2)}((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi}) = 0, \quad \forall \hat{\phi} \in \hat{V}_m \quad (3.32)$$

avec les conditions initiales :

$$\hat{w}_m(0) = \hat{w}_{m0}, \quad (3.33)$$

$$(\hat{w}_m)_t(0) = \hat{v}_m(0) = \hat{v}_{m0}. \quad (3.34)$$

Notons que lorsque  $m \rightarrow \infty$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{w}_{m0} &= \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \hat{\phi}_i \longrightarrow \hat{w}_0 \text{ dans } Z \\ \hat{v}_{m0} &= \sum_{i=1}^m \beta_{im} \hat{\phi}_i \longrightarrow \hat{v}_0 \text{ dans } O. \end{aligned}$$

avec  $\alpha_{im} = \sigma_{im}(0)$  et  $\beta_{im} = (\sigma_{im})_t(0)$ .

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles du second ordre, on est assuré de l'existence d'une solution  $\hat{w}_m \in C^2([0, T]; Z)$  pour (3.32)–(3.34), avec  $0 \leq t \leq T$ .

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

#### – Estimations a priori sur les solutions approchées

Définissons maintenant  $\hat{E} : \mathbb{R} \times Z \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle d'énergie pour la trajectoire  $\hat{w}$ . On a

$$\hat{E}(t, \hat{w}) = \frac{1}{2} \|\sqrt{EI} \hat{w}(t)\|_Z^2 + \frac{1}{2} \|\hat{w}_t(t)\|_O^2 + \frac{1}{2} \alpha [{}^2 \hat{w}(t)]^2 + \frac{1}{2} \beta [{}^1 \hat{w}(t)]^2. \quad (3.35)$$

Supposons  $\hat{w}_m \in C^2([0, \tau]; \hat{V}_m)$  une solution à (3.32) sur  $[0, \tau]$ . En prenant  $(\hat{w}_m)_t = \hat{\phi}$  dans (3.32), on obtient

$$\langle (\hat{w}_m)_{tt}, (\hat{w}_m)_t \rangle_O + b^{(1)}(\hat{w}_m, (\hat{w}_m)_t) + b^{(2)}((\hat{w}_m)_t, (\hat{w}_m)_t) = 0. \quad (3.36)$$

Ainsi, de manière analogue à (3.19), la dérivée de la fonctionnelle de l'énergie suivant la trajectoire  $\hat{w}_m$  est :

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}_m) = -2(\mu_{22} + \mu_{11}) [{}^2(\hat{w}_m)_t] [{}^1(\hat{w}_m)_t] - \mu_{21} [{}^1(\hat{w}_m)_t]^2 - \mu_{12} [{}^2(\hat{w}_m)_t]^2. \quad (3.37)$$

De plus, en considérant (3.6), on a

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}_m) \leq 0 \quad (3.38)$$

pour tout  $t \in [0, \tau]$ .

Par conséquent, nous avons sur  $[0, \tau]$  :

$$\hat{E}(t, \hat{w}_m) \leq \hat{E}(0, \hat{w}_{m0}), \quad t \geq 0. \quad (3.39)$$

Ce qui implique que

$$\{\hat{w}_m\}_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } C([0, T]; Z) \quad (3.40)$$

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

et

$$\{(\hat{w}_m)_t\}_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } C([0, T]; O). \quad (3.41)$$

Nous déterminons maintenant l'ensemble sur lequel  $\{(\hat{w}_m)_{tt}\}_{m \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  fixé. Considérons  $\hat{\phi} \in Z$  avec  $\hat{\phi} = \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2$  telles que  $\hat{\varphi}_1 \in \hat{V}_m$  et  $\hat{\varphi}_2$  orthogonal à  $\hat{V}_m$  dans  $O$ . C'est-à-dire  $\langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\varphi}_2 \rangle_O = 0$ . D'après (3.32) et (3.40)–(3.41), nous avons :

$$\langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_O = -b^{(1)}(\hat{w}_m, \hat{\phi}) - b^{(2)}((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi}) \leq M \|\hat{\varphi}_1\|_Z \leq M \|\hat{\phi}\|_Z,$$

où  $M$  est une constante strictement positive qui ne dépend pas de  $m$ . On en déduit que

$$\{(\hat{w}_m)_{tt}\}_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée dans } C([0, T]; Z'). \quad (3.42)$$

#### –Passage à la limite

D'après le Théorème d'Eberlein-Smulian [8], il existe des sous suites faiblement convergentes  $\{\hat{w}_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}^*}$ ,  $\{(\hat{w}_{m_l})_t\}_{l \in \mathbb{N}^*}$  et  $\{(\hat{w}_{m_l})_{tt}\}_{l \in \mathbb{N}^*}$  avec  $\hat{w} \in L^2(0, T; Z)$ ,  $\hat{w}_t \in L^2(0, T; O)$ ,  $\hat{w}_{tt} \in L^2(0, T; Z')$  telles que :

$$\{\hat{w}_{m_l}\} \rightharpoonup \hat{w} \text{ dans } L^2(0, T; Z) \quad (3.43)$$

$$\{(\hat{w}_{m_l})_t\} \rightharpoonup \hat{w}_t \text{ dans } L^2(0, T; O) \quad (3.44)$$

$$\{(\hat{w}_{m_l})_{tt}\} \rightharpoonup \hat{w}_{tt} \text{ dans } L^2(0, T; Z'). \quad (3.45)$$

Aussi, de (3.44) on a

$$\{^i(\hat{w}_{m_l})_t\} \rightharpoonup ^i\hat{w}_t \text{ dans } L^2(0, T; \mathbb{R}), \quad (3.46)$$

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

avec  $i = 1, 2$  et pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

Soit  $m_0 \in \mathbb{N}^*$ . Pour toutes fonctions  $\hat{\varphi} \in L^2(0, T; \hat{V}_{m_0})$  de la forme

$$\hat{\varphi}(x, t) = \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j(t) \phi_j(x) \quad (3.47)$$

où  $\alpha_j \in L^2(0, T; \mathbb{R})$  et pour tout  $m_l \geq m_0$ , la formulation (3.32) devient :

$$\int_0^T [\langle (\hat{w}_{m_l})_{tt}, \hat{\varphi} \rangle_O + b^{(1)}(\hat{w}_{m_l}, \hat{\varphi}) + b^{(2)}((\hat{w}_{m_l})_t, \hat{\varphi})] dt = 0. \quad (3.48)$$

En passant à la limite dans (3.48) et en considérant les résultats de convergence (3.43)–(3.45), on obtient :

$$\int_0^T [\langle \hat{w}_{tt}, \hat{\varphi} \rangle_{Z', Z} + b^{(1)}(\hat{w}, \hat{\varphi}) + b^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\varphi})] dt = 0. \quad (3.49)$$

Ainsi,  $\langle (\hat{w})_{tt}, \hat{\varphi} \rangle_{Z', Z} + b^{(1)}(\hat{w}, \hat{\varphi}) + b^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\varphi}) = 0$  p.p sur  $[0, T]$  pour tout  $\hat{\varphi} \in L^2(0, T; Z)$ .

Les fonctions  $\hat{\varphi}$  de la forme (3.47) sont denses dans  $L^2(0, T; Z)$ . Donc (3.49) est bien défini pour tout  $\hat{\varphi} \in L^2(0, T; Z)$ . On obtient ainsi l'expression de la formulation faible presque partout sur  $[0, T]$ .  $\hat{w}$  est bien solution de (3.23).

Concernant les régularités supplémentaires, nous avons que  $\hat{w}$  vérifie la régularité (3.26)–(3.27), par définition de solution faible et les résultats importants (3.40)–(3.41).

De plus, notons que (3.28) découle directement de la remarque 3.1 après une éventuelle modification sur un ensemble de mesure nulle et que la régularité de (3.29) est déduite de la remarque 3.1 et du Lemme 3.2.

On conclut de ce qui précède qu'il existe bien une solution  $\hat{w}$  pour la formulation faible (3.23)–(3.25).

□

#### 3.3.3 Unicité de la solution faible

**Théorème 3.5.** *La formulation faible (3.23) avec les conditions (3.24)–(3.25) admet une unique solution  $\hat{w}$ .*

*Démonstration.* Cette preuve est une adaptation de la preuve du Théorème 8.1 p. 290-291 dans [23].

Montrons premièrement que la solution  $\hat{w}$  satisfait les conditions (3.24)–(3.25). Soit  $\hat{\phi} \in C^2([0, T]; Z)$  telle que  $\hat{\phi}(T) = 0$  et  $\hat{\phi}_t(T) = 0$ . En intégrant l'équation (3.23) sur  $[0, T]$ , on obtient :

$$\int_0^T \left[ \langle \hat{w}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{Z', Z} + b^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + b^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = 0.$$

Par intégration par partie sous le crochet de dualité, on a :

$$\int_0^T \left[ \langle \hat{w}, \hat{\phi}_{tt} \rangle_O + b^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + b^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = \langle \hat{w}_t(0), \hat{\phi}(0) \rangle_{Z, Z'} - \langle \hat{w}(0), \hat{\phi}_t(0) \rangle_O. \quad (3.50)$$

De même, pour  $m$  fixé, par intégration par parties de (3.32) sur  $[0, T]$ , on a :

$$\int_0^T \left[ \langle \hat{w}_m, \hat{\phi}_{tt} \rangle_O + b^{(1)}(\hat{w}_m, \hat{\phi}) + b^{(2)}((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = \langle \hat{w}_{m0}, \hat{\phi}(0) \rangle_O - \langle \hat{w}_{m0}, \hat{\phi}_t(0) \rangle_O. \quad (3.51)$$

En utilisant (3.33)–(3.34) avec (3.43)–(3.45), et en passant à la limite dans (3.51) le long de la sous-suite  $\{\hat{w}_{m_i}\}$ , on obtient :

$$\int_0^T \left[ \langle \hat{w}, \hat{\phi}_{tt} \rangle_O + b^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + b^{(2)}((\hat{w})_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = \langle \hat{v}_0, \hat{\phi}(0) \rangle_O - \langle \hat{w}_0, \hat{\phi}_t(0) \rangle_O. \quad (3.52)$$

Par comparaison entre l'expression (3.52) et l'expression (3.50), on obtient  $\hat{w}(0) = \hat{w}_0$  et  $\hat{v}_0 = \hat{w}_t(0)$ . D'où les conditions initiales sont vérifiées.

Considérons maintenant  $\hat{w}$  une solution de (3.23) telle que  $\hat{w}(0) = \hat{w}_0 = 0$ ,  $\hat{w}_t(0) =$

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

$$\hat{v}_0 = 0.$$

Soit  $s \in (0, T)$  fixé. Considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$\hat{\psi}(t) = \begin{cases} \int_t^s \hat{w}(\tau) d\tau, & 0 < t < s \\ 0, & t \geq s. \end{cases}$$

En remplaçant  $\hat{\phi}$  par  $\hat{\psi}$  dans (3.23) et en intégrant par parties sur  $[0, T]$ , on obtient :

$$\int_0^s \left[ \langle \hat{w}_t(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle_O - b^{(1)}(\hat{\psi}_t(\tau), \hat{\psi}(\tau)) + b^{(2)}(\hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau)) \right] d\tau = 0. \quad (3.53)$$

Par conséquent, on a

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \langle \hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle_O - \frac{1}{2} b^{(1)}(\hat{\psi}(\tau), \hat{\psi}(\tau)) \right] d\tau = - \int_0^s b^{(2)}(\hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau)) d\tau. \quad (3.54)$$

D'où,

$$\left[ \frac{1}{2} \langle \hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle_O - \frac{1}{2} b^{(1)}(\hat{\psi}(\tau), \hat{\psi}(\tau)) \right]_0^s = - \int_0^s b^{(2)}(\hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau)) d\tau.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \|\hat{w}(s)\|_O + \frac{1}{2} b^{(1)}(\hat{\psi}(0), \hat{\psi}(0)) \leq 0. \quad (3.55)$$

$b^{(1)}(\cdot, \cdot)$  étant une forme bilinéaire coercive, alors  $\hat{w}(s) \equiv 0$  et  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Aussi  $s \in (0, T)$  étant arbitraire, on a  $\hat{w} \equiv 0$ .

Finalement, la formulation faible (3.23) avec admet bien une unique solution  $\hat{w}$ .

□

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

#### 3.3.4 Résultat complémentaire de régularité

Considérons le lemme suivant qui servira dans la démonstration du théorème de la continuité forte (Théorème 3.6) de la solution faible  $\hat{w}$ .

**Lemme 3.3.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach,  $X \subset Y$  avec injection continue,  $X$  étant réflexif. On pose :*

$$C_w([0, T]; Y) = \left\{ w \in L^\infty(0, T; Y) : t \mapsto \langle f, w(t) \rangle_{Y', Y} \text{ est continue sur } [0, T], \forall f \in Y' \right\}$$

qui désigne l'espace des fonctions faiblement continues à valeurs dans  $Y$ . Alors on a

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_w([0, T]; Y) = C_w([0, T]; X).$$

*Démonstration.* Voir Lemme 8.1 p. 297–298 de [23]. □

**Théorème 3.6.** *Après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la solution  $\hat{w}$  de (3.23)-(3.25) vérifie*

$$\hat{w} \in C([0, T]; Z) \tag{3.56}$$

$$\hat{w}_t \in C([0, T]; O). \tag{3.57}$$

*Démonstration.* Cette preuve est basée sur les méthodes standards évoquées dans la section 8.4 de [23] p. 297 – 301 et dans la section 2.4 de [41].

En considérant le Lemme 3.3, il découle de (3.26), (3.28) et des inclusions considérés en (1.45) que  $\hat{w} \in C_w([0, T]; Z)$ . De même (3.27), (3.29) et les inclusions considérés en (1.46) impliquent  $\hat{w}_t \in C_w([0, T]; O)$ .

Soit  $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$  la fonction scalaire fixée telle que

$$\xi(x) = 1 \text{ si } x \in J \subset\subset [0, T]$$

$$\xi(x) = 0 \text{ sinon.}$$

### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

Où  $J$  est un sous-intervalle compact de  $[0, T]$  et  $\subset\subset$  désigne l'inclusion stricte et compacte.

La fonction  $\xi\hat{w}$  est donc à support compact. Soit  $\eta^\varepsilon$  une suite régularisante dépendante du temps telle que  $\eta^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  avec

$$\eta(t) = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{1-|t|^2}}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Notons que  $\eta(t)$  appartient à  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  pour tout réel  $C$  et telle que  $\int_{\mathbb{R}} \eta dx = 1$ .

En appliquant la régularisation par convolution des distributions, on définit

$$\hat{w}^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \xi\hat{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, Z).$$

La suite  $\hat{w}^\varepsilon$  converge vers  $\hat{w}$  dans  $Z$  et  $\hat{w}_t^\varepsilon$  converge vers  $\hat{w}_t$  dans  $O$  presque partout sur  $J$ . Par conséquent,  $\hat{E}(t, \hat{w}^\varepsilon)$  converge vers  $\hat{E}(t, \hat{w})$  presque partout sur  $J$ .  $\hat{w}^\varepsilon$  étant dérivable, on obtient par un calcul direct sur  $J$  :

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}^\varepsilon) = -2(\mu_{11} + \mu_{22}) [{}^2\hat{w}_t^\varepsilon(t)] [{}^1\hat{w}_t^\varepsilon(t)] - \mu_{12} [{}^2\hat{w}_t^\varepsilon(t)]^2 - \mu_{21} [{}^1\hat{w}_t^\varepsilon(t)]^2. \quad (3.58)$$

En passant à la limite dans (3.58), lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}) = -2(\mu_{11} + \mu_{22}) [{}^2\hat{w}_t(t)] [{}^1\hat{w}_t(t)] - \mu_{12} [{}^2\hat{w}_t(t)]^2 - \mu_{21} [{}^1\hat{w}_t(t)]^2. \quad (3.59)$$

au sens des distributions sur  $J$ . (3.59) est bien vérifiée pour tout sous-intervalle compact de  $[0, T]$  car  $J$  est arbitraire.

Soit  $t \in [0, \infty[$  bien fixé. Considérons  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  et une



### 3.3 Existence, unicité et régularité de la solution faible

---

suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{aligned} \nu_n = & \frac{1}{2} \|\hat{w}_t(t) - \hat{w}_t(t_n)\|_O^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{EI}(\hat{w}(t) - \hat{w}(t_n))\|_Z^2 + \frac{\alpha}{2} [{}^2\hat{w}(t) - {}^2\hat{w}(t_n)]^2 \\ & + \frac{\beta}{2} [{}^1\hat{w}(t) - {}^1\hat{w}(t_n)]^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \nu_n = & \hat{E}(t, \hat{w}) + \hat{E}(t_n, \hat{w}) - \langle \hat{w}_t(t), \hat{w}_t(t_n) \rangle_O - \langle EI\hat{w}(t), \hat{w}(t_n) \rangle_Z \\ & - \alpha [{}^2\hat{w}(t)] [{}^2\hat{w}(t_n)] - \beta [{}^1\hat{w}(t)] [{}^1\hat{w}(t_n)]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Puisque la fonction  $\hat{E}$  est continue par rapport à  $t$ , on a :

$$\hat{E}(t_n, \hat{w}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{E}(t, \hat{w}).$$

De plus  $\hat{w}$ ,  $\hat{w}_t$  sont faiblement continue. Ainsi en passant à la limite dans (3.61), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = 0.$$

Cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{w}_t(t) - \hat{w}_t(t_n)\|_O^2 = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{w}(t) - \hat{w}(t_n)\|_Z^2 = 0. \quad (3.62)$$

Finalement,  $\hat{w} \in C([0, T]; Z)$  et  $\hat{w}_t \in C([0, T]; O)$ . □

### 3.4 Schéma semi-discret par la méthode des éléments finis (MEF)

Maintenant que nous disposons de la formulation faible du problème (3.1)–(3.5) et que nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution faible, nous recherchons au moyen de la méthode des éléments finis une solution approchée. Pour ce faire, nous élaborons un schéma numérique semi-discret ( discrétisation en espace) stable et convergent. Comme au chapitre précédent et pour les mêmes raisons, nous considérons comme espace d'approximation, l'espace des fonctions polynomiales cubiques d'Hermite noté ici

$$S^h = \text{Vect} \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n-1}, \phi_{2n} \}.$$

Aussi par la séparation des variables, la solution approchée  $w_h \in S^h$  peut s'écrire sous la forme

$$w_h(x, t) = \sum_{i=1}^n [\bar{w}_i(t)\phi_{2i-1}(x) + (\bar{w}_i)_x(t)\phi_{2i}(x)].$$

#### 3.4.1 Problème semi-discret

Soit  $Z^h$  et  $S^h$  des sous-espaces de dimension finie respectifs de  $Z$  et  $H_E^2(0, 1)$  avec  $\phi_j, j = 1, \dots, N$  (où  $N = 2n$ ) une base fixe de  $S^h$ .

L'approximation de Galerkin de (3.23) nommée **Problème**  $G^h$  s'écrit comme suit :

**Problème**  $G^h$  : Trouver  $\hat{w}_h = (w_h(1), (w_h)_x(1), w_h) \in C^2([0, \infty[; Z^h)$  ou plus simplement trouver la dernière composante  $w_h \in C^2([0, \infty[; S^h)$  telle que pour chaque  $t \in (0, \infty)$

$$c((w_h)_{tt}(t), \phi_j) + a((w_h)_t(t), \phi_j) + b(w_h(t), \phi_j) = 0, \quad \phi_j \in S^h \quad (3.63)$$

avec

$$w_h(., 0) = w_0^h \in S^h \quad \text{et} \quad (w_h)_t(., 0) = w_1^h \in S^h, \quad (3.64)$$

où les produits scalaires  $c$  et  $b$  sont des formes bilinéaires telles que :

$$c((w_h)_{tt}(t), \phi_j) = \int_0^1 \rho(x)(w_h)_{tt}\phi_j dx,$$

$$b(w_h(t), \phi_j) = \int_0^1 EI(x)(w_h)_{xx}(\phi_j)_{xx} dx + \alpha(w_h)_x(1)(\phi_j)_x(1) + \beta(w_h)(1)(\phi_j)(1).$$

De plus,  $a$  est une forme bilinéaire telle que :

$$a((w_h)_t(t), \phi_j) = 2\mu_{11}(w_h)_t(1)(\phi_j)_x(1) + \mu_{12}(w_h)_{xt}(1)(\phi_j)_x(1) \\ + \mu_{21}(w_h)_t(1)(\phi_j)(1) + 2\mu_{22}(w_h)_{xt}(1)(\phi_j)(1).$$

Notons que les valeurs initiales  $w_0^h$  et  $w_1^h$  sont des éléments de  $S^h$  et doivent être choisies de manière appropriée.

Aussi,  $w_h$  peut s'écrire dans la base choisie sous la forme :

$$w_h(x, t) = \sum_{i=1}^N W_i(t)\phi_i(x)$$

avec  $w_h(x, 0) = \sum_{i=1}^N d_i\phi_i(x)$  et  $(w_h)_t(x, 0) = \sum_{i=1}^N l_i\phi_i(x)$ .

On considère  $W$ ,  $d$ ,  $l$  respectivement, les représentations vectorielles des fonctions  $w_h$ ,  $w_h(x, 0)$  et  $(w_h)_t(x, 0)$  définies de la manière suivante :

$$W = [W_1 \quad W_2 \quad \dots \quad W_N]^\top, \quad (3.65)$$

$$d = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_N]^\top, \quad (3.66)$$

$$l = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_N]^\top. \quad (3.67)$$

Ainsi, l'équation (3.63) est équivalente à l'équation vectorielle suivante :

$$MW_{tt} + SW_t + KW = 0, \quad \text{avec } W(0) = d \quad \text{et} \quad W_t(0) = l. \quad (3.68)$$

Pour tout  $i, j = 1, \dots, N$ , les matrices M, K et S sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= c(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \rho(x) \phi_i \phi_j dx, \\ S_{i,j} &= a(\phi_i, \phi_j) = 2\mu_{11} \phi_i(1)(\phi_j)_x(1) + \mu_{12} (\phi_i)_x(1)(\phi_j)_x(1) + \mu_{21} (\phi_i)(1)(\phi_j)(1) \\ &\quad + 2\mu_{22} (\phi_i)_x(1)(\phi_j)(1), \\ K_{i,j} &= b(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 EI(x) (\phi_i)_{xx} (\phi_j)_{xx} dx + \alpha (\phi_i)_x(1)(\phi_j)_x(1) + \beta (\phi_i)(1)(\phi_j)(1). \end{aligned}$$

**Remarque 3.2.** Les matrices M et K sont symétriques, définies et positives donc M et K sont inversibles. Il résulte, d'après la théorie des équations différentielles linéaires, que (3.68) admet une solution unique. Cela implique l'existence et l'unicité de la solution du problème  $G^h$ .

### 3.4.2 Estimation d'erreur a priori

Dans cette partie, la méthode décrite dans [3, 4] est utilisée afin d'effectuer une estimation d'erreur a priori pour la solution de l'approximation de Galerkin (3.63).

Notons qu'on écrira

$$\int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)) \quad \text{pour} \quad \int_0^t a((e_p)_t(\tau), e_t(\tau)) d\tau.$$

Ou encore

$$\int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 \quad \text{pour} \quad \int_0^T \|(e_p)_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.$$

On considère l'opérateur de projection  $P$  défini par

$$b(w - Pw, \phi) = 0 \quad \text{pour tout } \phi \in S^h. \quad (3.69)$$

La projection de la solution faible  $w \in H_E^2(0, 1)$  sur  $S^h$  est notée  $w_p$ . En utilisant la projection, nous subdivisons l'erreur  $e_h(t) = w(t) - w_h(t)$  comme suit :

$$e_h(t) = e(t) + e_p(t) \quad \text{avec} \quad e(t) = w_p(t) - w_h(t) \quad \text{et} \quad e_p(t) = w(t) - w_p(t).$$

Soit  $H_E^4(0, 1)$  un sous espace de  $H_E^2(0, 1)$  tel que

$$H_E^4(0, 1) = \{w \in H^4(0, 1) : w(0) = w_x(0) = 0\}.$$

Supposons que

$$\begin{aligned} y &\in C([0, T]; H_E^4(0, 1)), \\ y_t &\in L^2(0, T; H_E^4(0, 1)), \\ y_{tt} &\in L^2(0, T; H_E^2(0, 1)). \end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.2. p. 471 de [4] et le Théorème 5.4.8 p. 149 de [6], nous avons les estimations suivantes pour presque tout  $t$  :

$$\|e_p\|_{H_E^2(0,1)} = \|w - w_p\|_{H_E^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|w\|_{H_E^4(0,1)}, \quad (3.70)$$

$$\|(e_p)_t\|_{H_E^2(0,1)} = \|w_t - (w_p)_t\|_{H_E^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|w_t\|_{H_E^4(0,1)}, \quad (3.71)$$

$$\|(e_p)_{tt}\|_{L^2(0,1)} = \|w_{tt} - (w_p)_{tt}\|_{L^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|w_{tt}\|_{H_E^4(0,1)}, \quad (3.72)$$

avec  $C_\Pi$  une constante positive.

L'estimation de l'erreur  $e(t) = w_p(t) - w_h(t)$  est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 3.4.** Soit  $w \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$  alors,

$$\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)} + \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)} \leq 4\sqrt{e^{3t}} A_T \quad (3.73)$$

avec

$$\begin{aligned} A_T = & \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)} + 3K \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)} \\ & + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{1+K} \|e(0)\|_{H_E^2(0,1)} + \sqrt{K} \|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)} \end{aligned} \quad (3.74)$$

où  $K$  est une constante positive.

Avant de présenter la preuve de ce lemme, rappelons quelques propositions énoncées et démontrées dans [3] P7 et dans [4] P472. Elles seront utiles pour la preuve du Lemme 3.4.

**Proposition 3.1.** Soit  $w \in C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$  et  $w_p \in C^2((0, T); S^h)$  alors

$$c((e_h)_{tt}(t), \phi) + a((e_h)_t(t), \phi) + b(e(t), \phi) = 0, \text{ pour chaque } \phi \in S^h. \quad (3.75)$$

**Proposition 3.2.** Si  $e_p \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$ , alors pour tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)) = a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)).$$

Présentons maintenant la preuve du Lemme 3.4.

*Démonstration.* On a  $e \in S^h$ . En remplaçant  $w_h$  par  $e$  dans (3.63), on obtient :

$$c(e_{tt}, \phi_j) + a(e_t, \phi_j) + b(e, \phi_j) = 0, \phi_j \in S^h. \quad (3.76)$$

Puis en prenant  $\phi_j = e_t$  dans (3.76), on a de manière analogue à (3.18) l'expres-

sion de l'énergie pour  $e$  donnée par :

$$E(t, e) = \frac{1}{2}c(e_t(t), e_t(t)) + \frac{1}{2}b(e(t), e(t)) = \frac{1}{2}\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2}\|e(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2. \quad (3.77)$$

Les formes bilinéaires  $b$  et  $c$  étant des produits scalaires et d'après (3.77), on a :

$$\frac{d}{dt}E(t, e) = c(e_{tt}(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)). \quad (3.78)$$

Prenons maintenant  $\phi = e_t$  dans (3.75). On obtient :

$$\begin{aligned} c((e_h)_{tt}(t), e_t(t)) + a((e_h)_t(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)) &= 0 \\ c(e_{tt}(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)) + c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) + a((e_p)_t(t), e_t(t)) + a(e_t(t), e_t(t)) &= 0. \end{aligned}$$

En considérant (3.78) et le fait que  $a(e_t(t), e_t(t)) \geq 0$ , on a l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt}E(t, e) \leq -c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) - a((e_p)_t(t), e_t(t)). \quad (3.79)$$

Ainsi, pour tout  $t \in (0, T)$ ,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}E(\cdot, e) \leq - \int_0^t c((e_p)_{tt}(\cdot), e_t(\cdot)) - \int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)). \quad (3.80)$$

Puisque  $e_p \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$ , d'après la Proposition 3.2, on a pour tout  $t \in (0, T)$

$$\int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)) = a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)). \quad (3.81)$$

En considérant (3.80) et (3.81), on obtient

$$\int_0^t \frac{d}{dt} E(\cdot, e) \leq - \int_0^t c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) \quad (3.82)$$

$$- \left( a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)) \right).$$

À partir de l'inégalité de Cauchy, l'inégalité de Young et d'après (3.77), on a les inégalités suivantes :

$$\|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2E(t, e).$$

$$|c((e_p)_{tt}(t), e_t(t))| \leq \frac{1}{2} \|(e_p)_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} |a((e_p)_t(t), e(t))| &\leq K \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)} \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)}, \\ &\leq K\varepsilon^{-2} \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + 2K\varepsilon^2 E(t, e). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)) \right| &\leq \int_0^t |a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot))| \\ &\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + K\varepsilon^2 \int_0^t \|e(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)}^2 \\ &\leq K\varepsilon^{-2} \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + 2K\varepsilon^2 \int_0^t E(\cdot, e) \end{aligned}$$

et

$$\left| a((e_p)_t(0), e(0)) \right| \leq \frac{1}{2} K \|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} K \|e(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2.$$

Avec  $\varepsilon > 0$  une constante strictement positive prise de façon arbitraire et  $K \geq (2k_1\mu_{11} + k_2\mu_{12} + k_3\mu_{21} + 2k_4\mu_{22})$ .

En considérant les expressions précédentes et en choisissant  $\varepsilon$  telle que  $2K\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ ,



(3.82) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E(t, e) &\leq \frac{3}{2} \int_0^t E(\cdot, e) + \frac{1}{2} \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + 4K^2 \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2 \\ &+ 4K^2 \int_0^t \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + E(0, e) + \frac{1}{2}K \|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2}K \|e(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (3.84)$$

En multipliant (3.84) par 2, on obtient

$$E(t, e) \leq 3 \int_0^t E(\cdot, e) + K_T \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } K_T &= \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + 8K^2 \max_{t \in [0, T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + 8K^2 \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)}^2 \\ &+ \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + (1 + K) \|e(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + K \|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant l'inégalité de Gronwall, on obtient  $E(t, e) \leq K_T e^{3t}$  c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2 \leq K_T e^{3t}.$$

Finalement en considérant les inégalités

$$\left( \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)} + \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)} \right)^2 \leq 2 \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2 \leq 4K_T e^{3t}$$

et

$$\begin{aligned} K_T &\leq 4 \left[ \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)} + 3K \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)} \right. \\ &\left. + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{1 + K} \|e(0)\|_{H_E^2(0,1)} + \sqrt{K} \|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)} \right]^2, \end{aligned}$$

on obtient le résultat (3.73). □

Nous pouvons à présent donner un résultat important pour la convergence du schéma semi-discret.

**Théorème 3.7.** Soit  $w$  la solution de (3.22). Supposons que

$w \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$ ,  $w_{tt} \in L^2([0, T]; H_E^4(0, 1))$  et considérons les expressions (3.70)-(3.73). Alors, pour tout  $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \|w(t) - w_h(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_t(t) - (w_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} &\leq C_\Pi h^2 \left( \|w(t)\|_{H_E^4(0,1)} + \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right) \\ &+ 4\sqrt{e^{3t}} C_\Pi h^2 \left[ \int_0^T \|w_{tt}(\cdot)\|_{H_E^4(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right. \\ &+ 3K \int_0^T \|w_{tt}(\cdot)\|_{H_E^4(0,1)} \left. \right] + 4\sqrt{e^{3t}} \left[ \|w_1^P - w_1^h\|_{L^2(0,1)} \right. \\ &+ \left. \sqrt{1+K} \|w_0^P - w_0^h\|_{H_E^2(0,1)} + \sqrt{K} \|w_1 - w_1^P\|_{H_E^2(0,1)} \right]. \quad (3.86) \end{aligned}$$

Avec  $w_p(\cdot, 0) = w_0^P$  et  $(w_p)_t(\cdot, 0) = w_1^P$ .

De plus, si  $w_0^h$  et  $w_1^h$  sont respectivement les interpolations d'Hermite de  $w_0$  et de  $w_1$ , alors :

$$\begin{aligned} \|w(t) - w_h(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_t(t) - (w_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} &\leq C_\Pi h^2 \left[ \left( \|w(t)\|_{H_E^4(0,1)} + \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right) \right. \\ &+ 4\sqrt{e^{3t}} \left( (T + 3KT) \max_{t \in [0, T]} \|w_{tt}(t)\|_{H_E^4(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right. \\ &+ \left. (2 + \sqrt{K}) \|w_1\|_{H_E^4(0,1)} + 2\sqrt{1+K} \|w_0\|_{H_E^4(0,1)} \right) \left. \right]. \quad (3.87) \end{aligned}$$

**Démonstration.** Soit  $w \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$  et  $w_{tt} \in L^2([0, T]; H_E^4(0, 1))$ . Pour tout  $t \in (0, T)$  on a

$$\begin{aligned} \|w(t) - w_h(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_t(t) - (w_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} &\leq \|w(t) - (w_p)(t)\|_{H_E^2(0,1)} \\ &+ \|w_t(t) - (w_p)_t(t)\|_{L^2(0,1)} \quad (3.88) \\ &+ \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.4, (3.88) et (3.70)-(3.72), on obtient (3.86). Aussi, en considérant  $w_0^h = \Pi w_0$  et  $w_1^h = \Pi w_1$  respectivement les interpolations d'Hermite

de  $w_0$  et de  $w_1$ , on a :

$$\begin{aligned}\|w_0^P - \Pi w_0\|_{H_E^2(0,1)} &\leq \|w_0^P - w_0\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_0 - \Pi w_0\|_{H_E^2(0,1)} \\ &\leq 2C_\Pi h^2 \|w_0\|_{H_E^4(0,1)} \\ \|w_1^P - \Pi w_1\|_{L^2(0,1)} &\leq C \|w_1^P - w_1\|_{H_E^2(0,1)} + C \|w_1 - \Pi w_1\|_{H_E^2(0,1)} \\ &\leq 2C_\Pi h^2 \|w_1\|_{H_E^4(0,1)}.\end{aligned}$$

De plus, en prenant  $\int_0^T \|w_{tt}(\cdot)\|_{H_E^4(0,1)} \leq T \max_{t \in [0, T]} \|w_{tt}(t)\|_{H_E^4(0,1)}$ , on obtient (3.87). □

**Remarque 3.3.** *L'ordre de convergence pour le schéma semi-discret en espace est de 2.*

Conclusion : Au terme de ce chapitre, il ressort que le problème (3.1)–(3.5) est bien posé au sens des  $C_0$ -semi-groupes et qu'il existe une unique solution faible pour la formulation faible de ce problème. Par ailleurs, le schéma numérique semi-discret établi au moyen de la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace est stable, convergent et son ordre de convergence est 2.

Nous présentons à présent les différents résultats de nos simulations numériques.

---

# Chapitre 4

## Simulations numériques

Dans ce chapitre, nous effectuons des simulations numériques afin de montrer l'efficacité de la méthode numérique développée aux chapitres précédents. En effet, nous présentons les résultats de simulations permettant de vérifier l'ordre de convergence prouvé dans les sous-sections 2.4.3 et 3.4.2. Nous étudions aussi l'influence des paramètres de contrôle de feedback sur la dissipation de l'énergie et sur les oscillations des poutres étudiées. Dans tous les exemples de simulation, on considère  $EI = \rho = 1$ .

### 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

#### 4.1.1 Ordre de convergence (o.d.c)

Dans cette sous-section, nous déterminons par des simulations numériques l'ordre de convergence obtenu au Théorème 2.6.

Nous fixons de façon arbitraire  $\alpha = \beta = 5$  et nous prenons un pas de temps fixe  $\Delta t = 10^{-2}$ . Puis nous calculons sur l'intervalle  $[0, 1]$ , les solutions numériques pour différents pas de discrétisation en espace  $h = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Pour calculer

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

---

l'ordre de convergence, nous utilisons la formule suivante :

$$(\text{o.d.c.})_i = \log [(e_h)_i / (e_h)_{i-1}] / \log (h_i / h_{i-1}), \quad i = 1, \dots, 6.$$

Nous considérons comme conditions initiales :

$$y_0(x) = -0.6x^2 + 0.4x^3$$

$$v_0 \equiv 0.$$

Les normes  $l^2$  de l'erreur  $e_h = y - y_h$  et les résultats o.d.c sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 4.1 – Ordre de convergence expérimentaux du premier problème.

$\Delta t$	$h$	$\ e_h\ _{l^2}$	<i>o.d.c</i>
$10^{-2}$	$\frac{1}{4}$	$4.68 * 10^{-1}$	—
$10^{-2}$	$\frac{1}{8}$	$2.21 * 10^{-1}$	1.19
$10^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$6.47 * 10^{-2}$	1.77
$10^{-2}$	$\frac{1}{32}$	$1.76 * 10^{-2}$	1.87
$10^{-2}$	$\frac{1}{64}$	$4.60 * 10^{-3}$	1.93
$10^{-2}$	$\frac{1}{128}$	$1.21 * 10^{-3}$	1.98
$10^{-2}$	$\frac{1}{256}$	$2.77 * 10^{-4}$	2.05

### 4.1.2 Influences des contrôles sur la dissipation de l'énergie

Nous présentons maintenant les simulations numériques de la dissipation de l'énergie pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = \beta$ .

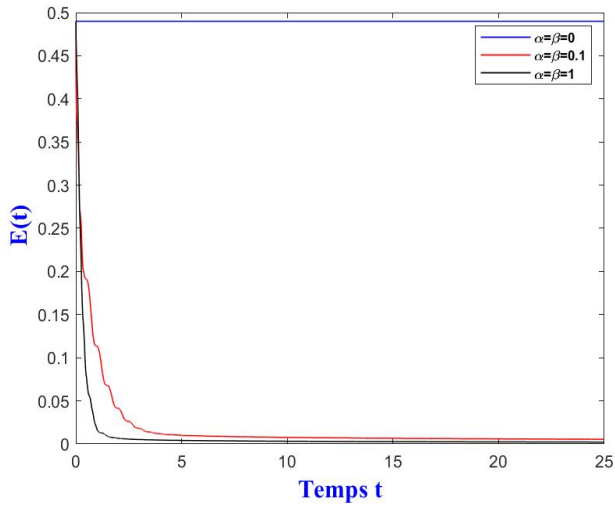


Figure 4.1 – Dissipation de l'énergie pour  $\alpha = \beta = 0; 0.1; 1$ .

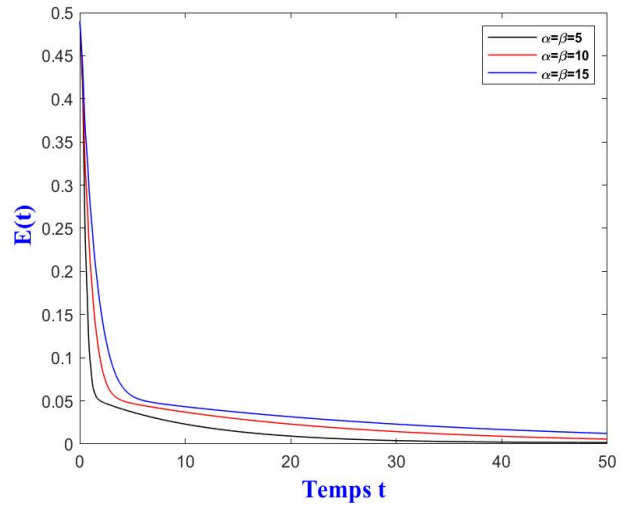


Figure 4.2 – Dissipation de l'énergie pour  $\alpha = \beta = 5; 10; 15$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\alpha \neq \beta$ .

→ On fixe  $\alpha = 0.05$  et on fait varier  $\beta$ .

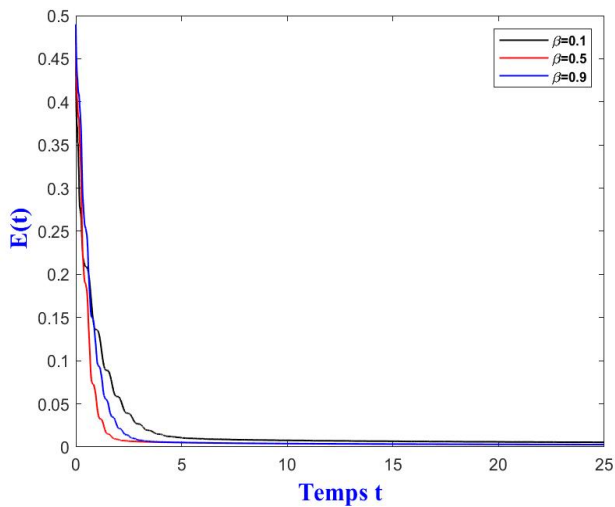


Figure 4.3 – Dissipation de l'énergie pour  $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ .

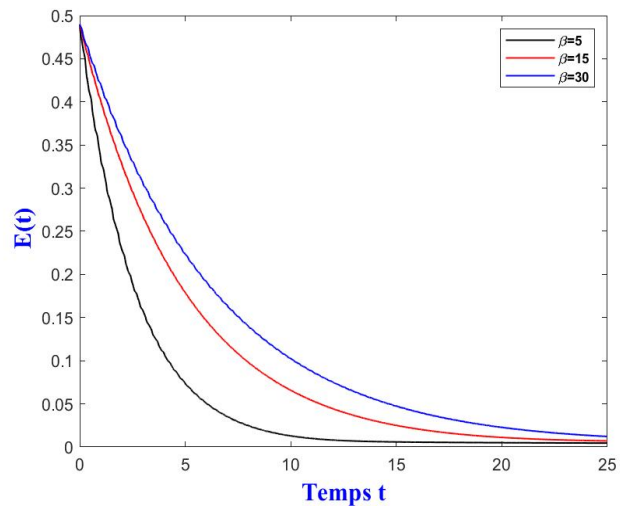


Figure 4.4 – Dissipation de l'énergie pour  $\beta = 5; 15; 30$ .

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

→ On fixe  $\beta = 0.05$  et on fait varier  $\alpha$ .

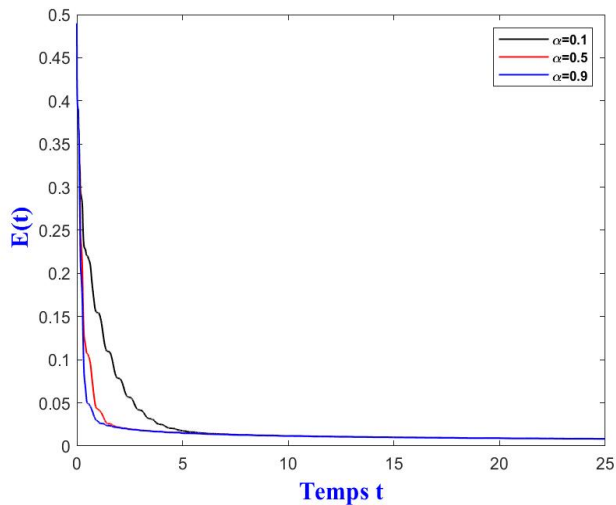


Figure 4.5 – Dissipation de l'énergie pour  $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$ .

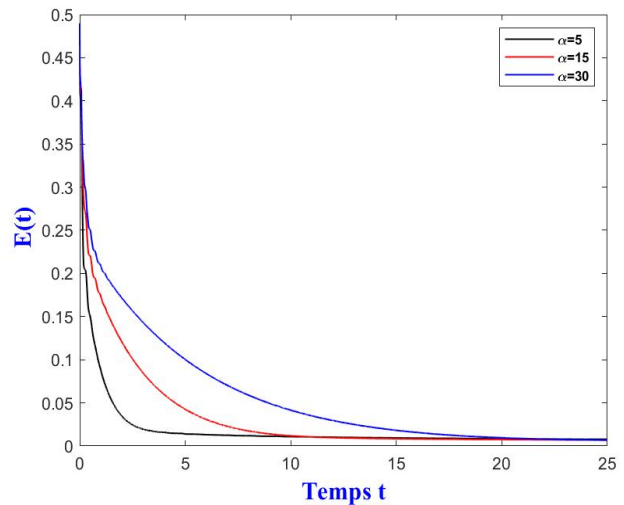


Figure 4.6 – Dissipation de l'énergie pour  $\alpha = 5; 15; 30$ .

### Commentaire 4.1.

On constate de manière générale que les contrôles proposés dissipent l'énergie quelles que soient les valeurs des paramètres de contrôle. Ceci corrobore bien le résultat obtenu en début d'étude sur la décroissance de l'énergie du système. En particulier, pour  $\alpha = \beta = 1$  et pour  $\alpha = \beta = 5$  l'énergie s'annule respectivement au bout de 15 secondes et 40 secondes.

Considérons le cas  $\alpha \neq \beta$ . On fixe un paramètre et on fait varier l'autre paramètre, et vice versa, en leur attribuant des valeurs similaires. On constate à travers les Figures 4.3–4.4 et les Figures 4.5–4.6, que lorsqu'on fait varier  $\beta$  avec  $\alpha$  fixé, on obtient une annulation plus rapide de l'énergie par rapport au cas inverse. En effet, lorsqu'on fixe  $\alpha = 0.05$ , l'énergie s'annule au bout de 15 secondes puis au bout de 20 secondes respectivement pour  $\beta = 0.9$  et pour  $\beta = 0.1$ . Par contre, lorsqu'on fixe  $\beta = 0.05$  avec  $\alpha = 0.9$  puis  $\alpha = 0.1$ , l'énergie ne s'annule pas au bout de 25 secondes.

On peut déduire des résultats graphiques que pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle, le contrôle moment en vitesse de rotation favorise une dissipation plus rapide de l'énergie en comparaison au contrôle force en vitesse.

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

Remarquons que le cas  $\alpha = \beta = 0$  présenté à la Figure 4.1, correspond l'évolution de l'énergie lorsque la poutre n'est pas contrôlée.

### 4.1.3 Influences des contrôles sur les vibrations de la poutre à l'extrémité libre

Dans cette sous section, nous présentons l'effet des contrôles sur la position et l'angle de rotation à l'extrémité libre de la poutre (en  $x = 1$ ).

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = \beta$ .

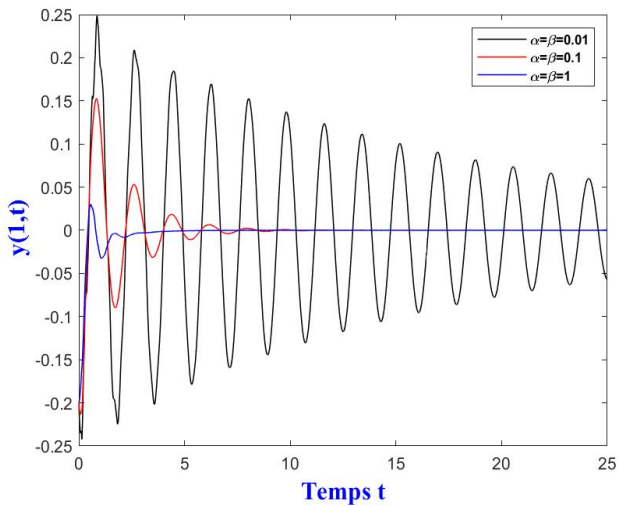


Figure 4.7 – Courbes des positions  $y(1, t)$  pour  $\alpha = \beta = 0.01; 0.1; 1$ .

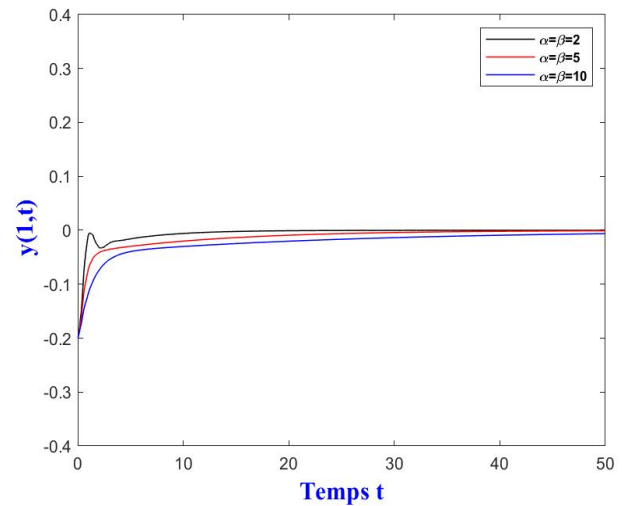


Figure 4.8 – Courbes des positions  $y(1, t)$  pour  $\alpha = \beta = 2; 5; 10$ .



## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

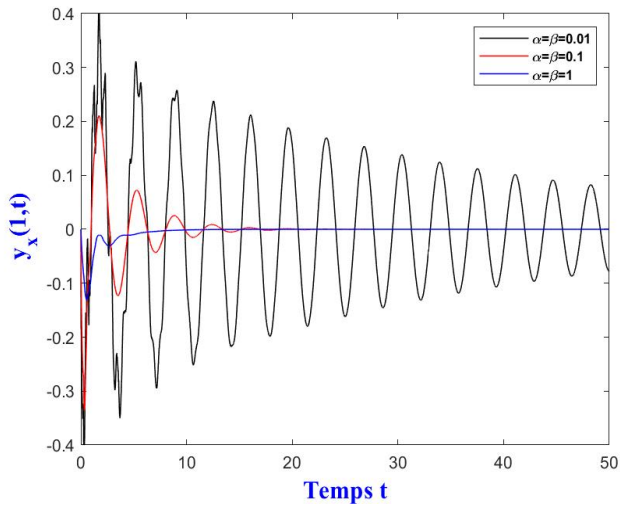


Figure 4.9 – Courbes des angles de rotations  $y_x(1, t)$  pour  $\alpha = \beta = 0.01; 0.1; 1$ .

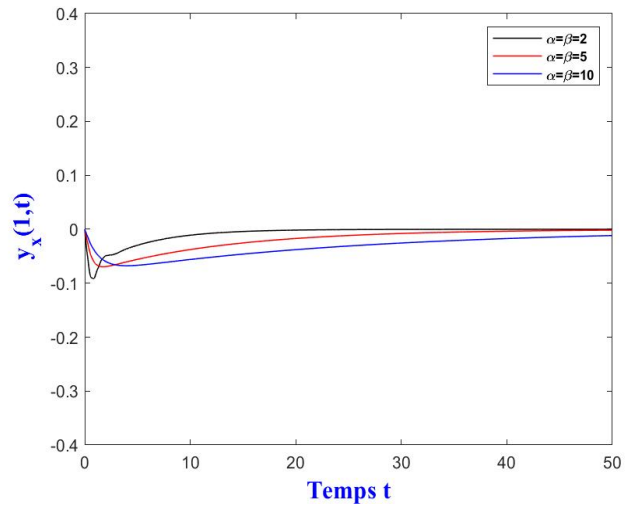


Figure 4.10 – Courbes des angles de rotations  $y_x(1, t)$  pour  $\alpha = \beta = 2; 5; 10$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\alpha \neq \beta$ .

→ On fixe  $\alpha = 1$  et on fait varier  $\beta$ .

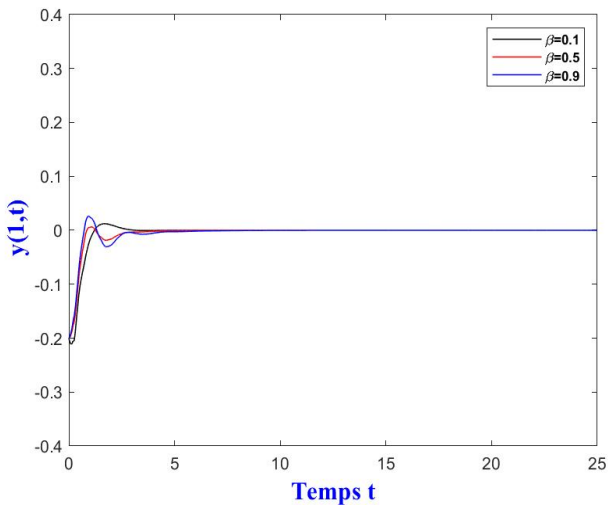


Figure 4.11 – Courbes des positions  $y(1, t)$  pour  $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ .

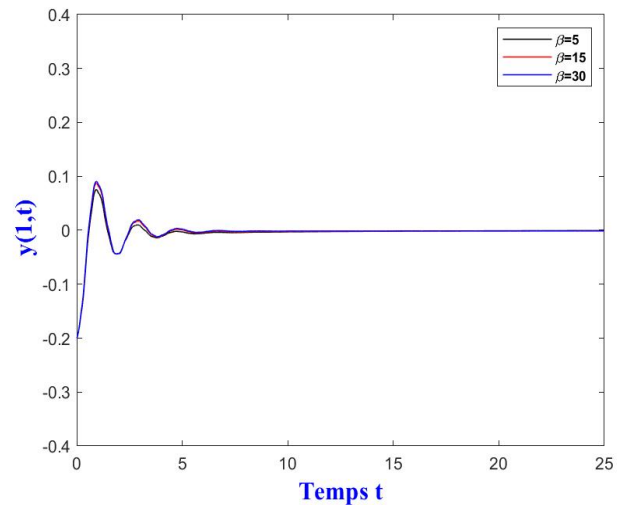


Figure 4.12 – Courbes des positions  $y(1, t)$  pour  $\beta = 5; 15; 30$ .

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

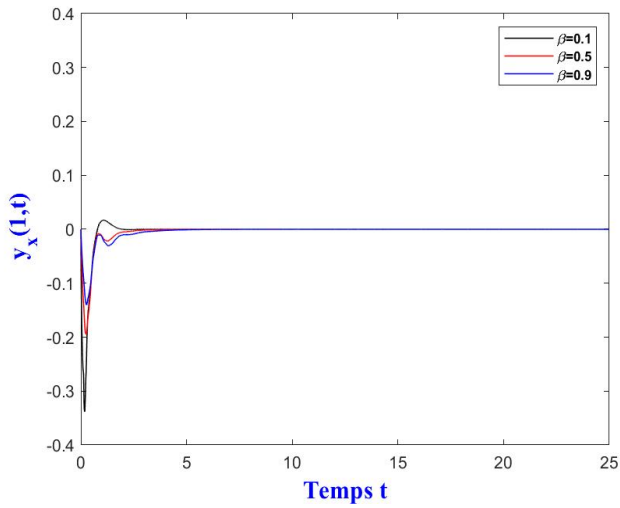


Figure 4.13 – Courbes des angles de rotations  $y_x(1, t)$  pour  $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ .

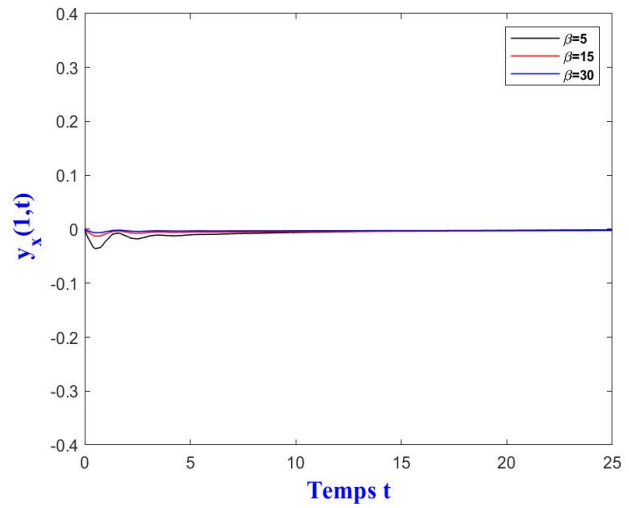


Figure 4.14 – Courbes des angles de rotations  $y_x(1, t)$  pour  $\beta = 5; 15; 30$ .

→ On fixe  $\beta = 1$  et on fait varier  $\alpha$ .

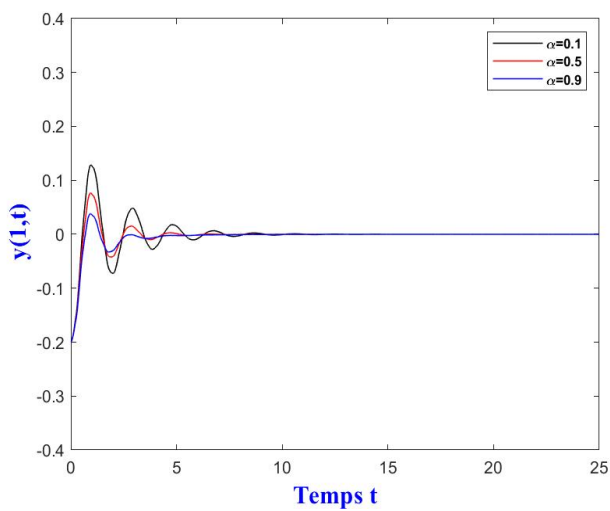


Figure 4.15 – Courbes des positions  $y(1, t)$  pour  $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$ .

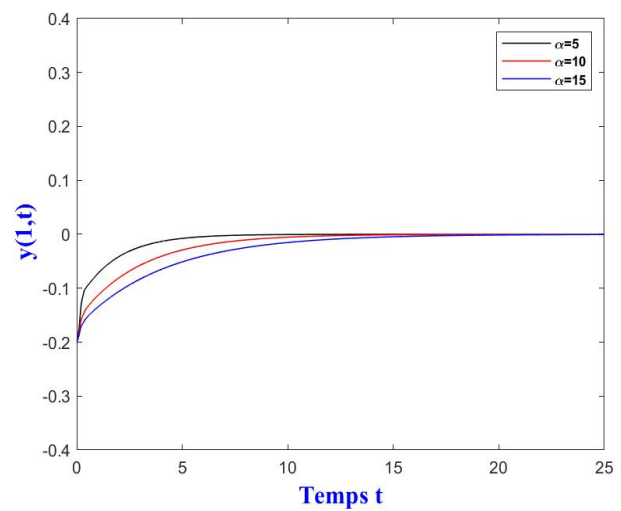


Figure 4.16 – Courbes des positions  $y(1, t)$  pour  $\alpha = 5; 10; 15$ .

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

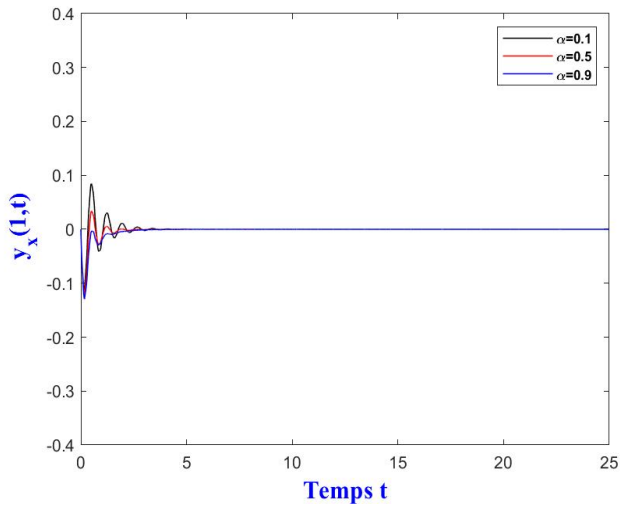


Figure 4.17 – Courbes des angles de rotations  $y_x(1, t)$  pour  $\alpha = 0.1; 0.5; 0.9$ .

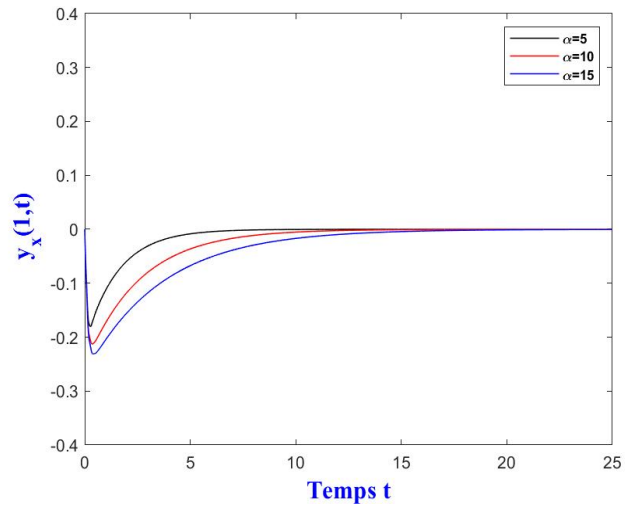


Figure 4.18 – Courbes des angles de rotations  $y_x(1, t)$  pour  $\alpha = 5; 10; 15$ .

### Commentaire 4.2.

À travers les différents cas observés, on constate que de manière générale, les contrôles proposés suppriment les vibrations à l'extrémité libre de la poutre. En particulier, pour  $\alpha = \beta = 1$ , on constate une annulation des vibrations à l'extrémité libre de la poutre au bout de 3.5 secondes.

Aussi, lorsqu'on fixe  $\alpha = 1$  et on fait varier  $\beta$  (Figures 4.11–4.14), l'on constate que les vibrations à l'extrémité libre de la poutre s'annulent rapidement et pratiquement au même moment. Cependant, lorsqu'on fixe  $\beta = 1$  et on fait varier  $\alpha$  (Figure 4.15–4.18), les vibrations à l'extrémité libre de la poutre s'annulent à des moments différents et moins rapidement que dans le cas précédent. Par exemple, pour  $\alpha = 1$  fixé, lorsqu'on prend  $\beta = 0.1$  puis  $\beta = 0.9$ , les vibrations à l'extrémité libre de la poutre s'annulent au bout de 5 secondes (Figure 4.11). Par contre, lorsqu'on fixe  $\beta = 1$  et on prend  $\alpha = 0.1$  puis  $\alpha = 0.9$ , les vibrations à l'extrémité libre de la poutre s'annulent respectivement au bout de 10 secondes puis au bout de 7 secondes (Figure 4.15).

On peut déduire des résultats graphiques que pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle, le contrôle moment en vitesse de rotation stabilise plus rapidement les mouvements de la poutre à l'extrémité libre.

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

### 4.1.4 Influences des contrôles sur la déflexion de la poutre

$$y(x, t)$$

Nous montrons maintenant la déflexion de la poutre  $y(x, t)$  pour  $x \in [0, 1]$  et sa convergence vers l'état d'équilibre  $y \equiv 0$  sur l'intervalle de temps  $t \in [0, 50]$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = \beta$ .

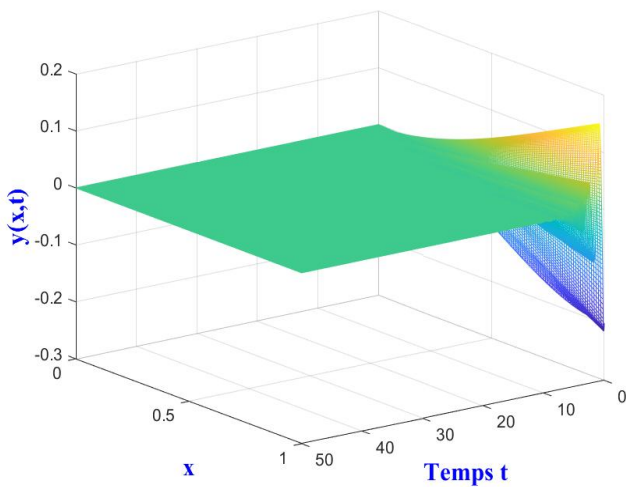


Figure 4.19 – Déflexion  $y(x, t)$  pour  $\alpha = \beta = 0.1$ .

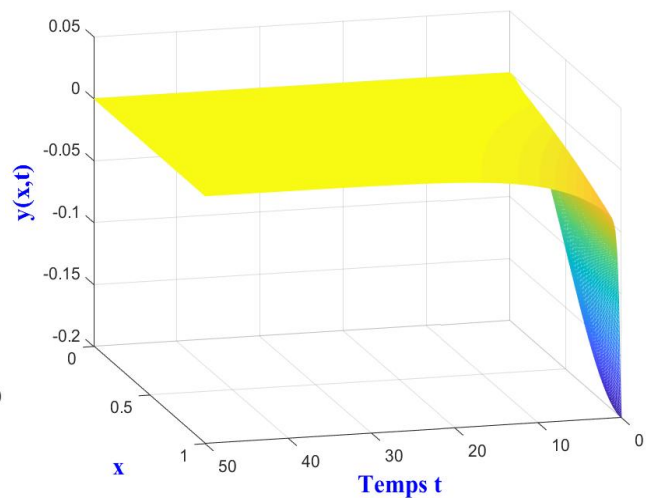


Figure 4.20 – Déflexion  $y(x, t)$  pour  $\alpha = \beta = 5$ .

2<sup>e</sup> cas :  $\alpha \neq \beta$ .

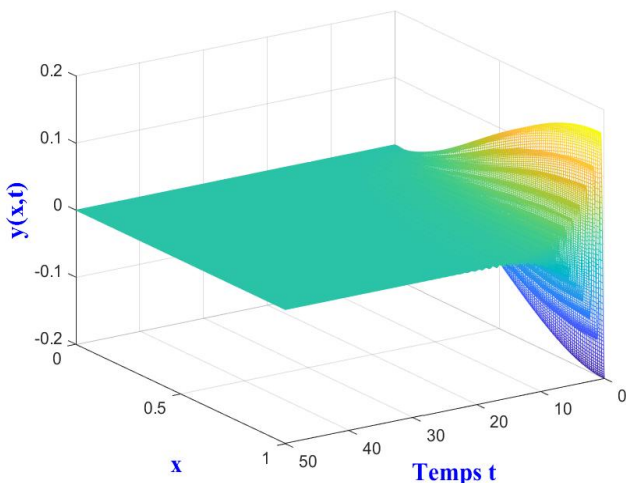


Figure 4.21 – Déflexion  $y(x, t)$  pour  $\alpha = 0.1; \beta = 5$ .

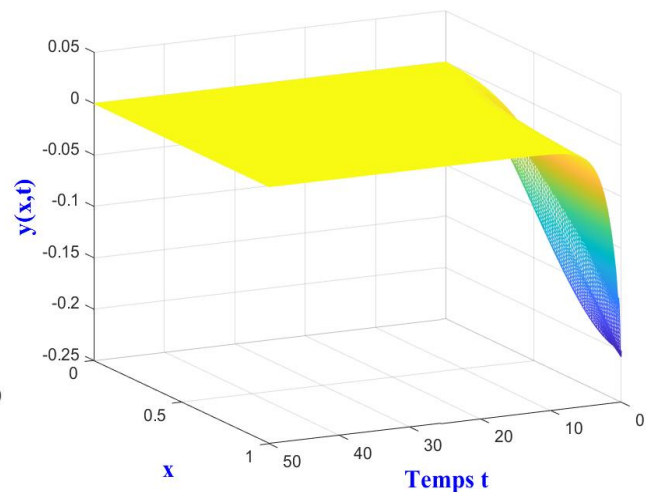


Figure 4.22 – Déflexion  $y(x, t)$  pour  $\alpha = 5; \beta = 0.1$ .

## 4.1 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients constants

---

### Commentaire 4.3.

Les figures présentées nous permettent d'observer l'impact des contrôles sur le comportement dynamique de la poutre. On constate que les oscillations de la poutre sont amorties rapidement pour  $\alpha = \beta = 5$  ou  $\alpha = 5$  et  $\beta = 0.1$ . La poutre retrouve ainsi très rapidement l'état d'équilibre  $y \equiv 0$ . Ces représentations graphiques vérifient bien le résultat du Théorème 2.3.

### 4.1.5 Sensibilité des paramètres $\alpha$ et $\beta$ sur la stabilité

Dans cette partie, nous étudions objectivement l'influence des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sur la stabilisation de la poutre. Dans ce but, on note dans le tableau ci-dessous, le temps d'amortissement  $\delta\tau$  (en seconde) des vibrations de la poutre pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Tableau 4.2 – Temps d'amortissement des vibrations de la poutre (en seconde) pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

$\alpha \backslash \beta$	0.8	1	5	10	15	20	30
0.1	5.53	6.69	17.07	24.76	26.6	27.62	31.41
0.5	3.67	4.61	8.39	9.17	9.51	9.93	9.86
0.85	4.28	4.18	10.81	15.17	15.53	15.19	12.08
1	4.61	4.91	11.79	16.85	18.22	18.46	18.08
1.5	5.70	5.6	14.39	21.85	24.51	26.77	27.48
2	6.69	7.49	19.44	25.62	28.86	30.88	37.79

L'indice de sensibilité de Sobol de premier ordre s'écrit de la manière suivante :

$$S_i = \frac{\text{Var} [\mathbb{E}(\delta\tau|Y_i)]}{\text{Var}(\delta\tau)}, \quad (4.1)$$

où  $\text{Var}(\delta\tau)$  et  $\mathbb{E}(\delta\tau|Y_i)$  ) représentent respectivement la variance de  $\delta\tau$  et l'espé-

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

---

rance conditionnelle de  $\delta\tau$  obtenue en fixant  $Y_i = \alpha$  et  $Y_i = \beta$  dans (4.1).

Le calcul des indices de sensibilité de Sobol de premier ordre, nous donne le résultat suivant :

$$S_\alpha \simeq 0.36$$

$$S_\beta \simeq 0.64.$$

D'après le résultat précédent, on a  $S_\alpha < S_\beta$ . Nous pouvons en déduire que le paramètre de contrôle  $\beta$ , a plus d'impact sur la stabilisation de la poutre par rapport au paramètre  $\alpha$ .

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

### 4.2.1 Ordre de convergence (o.d.c)

Cette sous-section, concerne la validation par des simulations numériques de l'ordre de convergence obtenu au Théorème 3.7.

Nous prenons arbitrairement  $\alpha = \beta = 10^{-1}$  et  $\mu_{11} = 2$ ,  $\mu_{22} = 3$ ,  $\mu_{21} = 5$ ,  $\mu_{12} = 10$  (conformément à la condition (3.6)). Aussi, nous prenons un pas de temps fixe  $\Delta t = 10^{-2}$ . Puis nous calculons sur l'intervalle  $[0, 1]$ , les solutions numériques pour différents pas de discrétisation en espace  $h = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ . Pour calculer l'ordre de convergence, nous utilisons la formule suivante :

$$(\text{o.d.c})_i = \log [(e_h)_i / (e_h)_{i-1}] / \log (h_i / h_{i-1}), \quad i = 1, \dots, 6.$$

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

Nous considérons comme conditions initiales :

$$\text{Cas a) } w_0(x) = -0.6x^2 + 0.4x^3, \quad v_0 \equiv 0 \quad (\text{tableau de gauche})$$

$$\text{Cas b) } w_0(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad v_0 \equiv 0 \quad (\text{tableau de droite}).$$

Les normes de l'erreur  $l^2$  de  $e_h = y - y_h$  et les résultats o.d.c sont présentés dans les tableaux suivants.

Tableau 4.3 – Ordre de convergence expérimentaux du deuxième problème.

$\Delta t$	$h$	$\ e_h\ _{l^2}$	<i>o.d.c</i>
$10^{-2}$	$\frac{1}{4}$	$3.40 * 10^{-1}$	—
$10^{-2}$	$\frac{1}{8}$	$1.73 * 10^{-1}$	1.20
$10^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$5.28 * 10^{-2}$	1.71
$10^{-2}$	$\frac{1}{32}$	$1.43 * 10^{-2}$	1.88
$10^{-2}$	$\frac{1}{64}$	$3.70 * 10^{-3}$	1.95
$10^{-2}$	$\frac{1}{128}$	$8.95 * 10^{-4}$	2.04

$\Delta t$	$h$	$\ e_h\ _{l^2}$	<i>o.d.c</i>
$10^{-2}$	$\frac{1}{4}$	$8.314 * 10^{-1}$	—
$10^{-2}$	$\frac{1}{8}$	$2.078 * 10^{-1}$	2.0002
$10^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$5.194 * 10^{-2}$	2.0014
$10^{-2}$	$\frac{1}{32}$	$1.292 * 10^{-2}$	2.0042
$10^{-2}$	$\frac{1}{64}$	$3.205 * 10^{-3}$	2.0112
$10^{-2}$	$\frac{1}{128}$	$7.612 * 10^{-4}$	2.0704

**Remarque 4.1.** *Le choix de la condition initiale a un impact sur l'ordre de convergence.*

### 4.2.2 Influences des contrôles sur la dissipation de l'énergie

Pour commencer, on fixe les valeurs  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{12} = 5$  et  $\mu_{21} = 1$ . Puis, on fait varier  $\alpha$  (1<sup>er</sup> cas). Ensuite, on prend  $\alpha = 1$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{12} = 5$  et  $\mu_{21} = 1$  on fait varier  $\beta$  (2<sup>e</sup> cas).

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

1<sup>er</sup> cas.

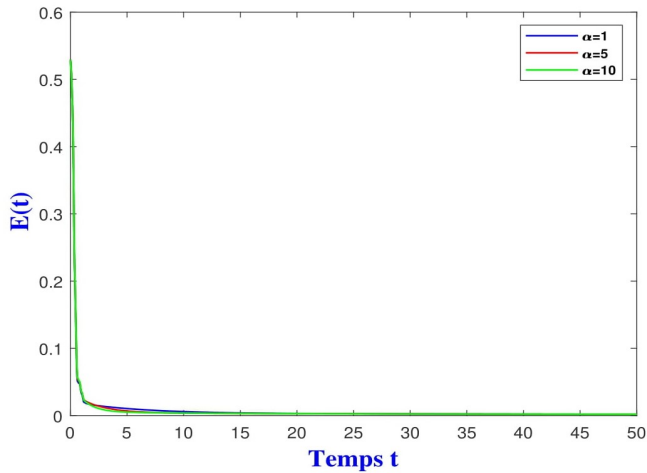


Figure 4.23 – Dissipation de l'énergie pour  $\alpha = 1; 5; 10$ .

2<sup>e</sup> cas.

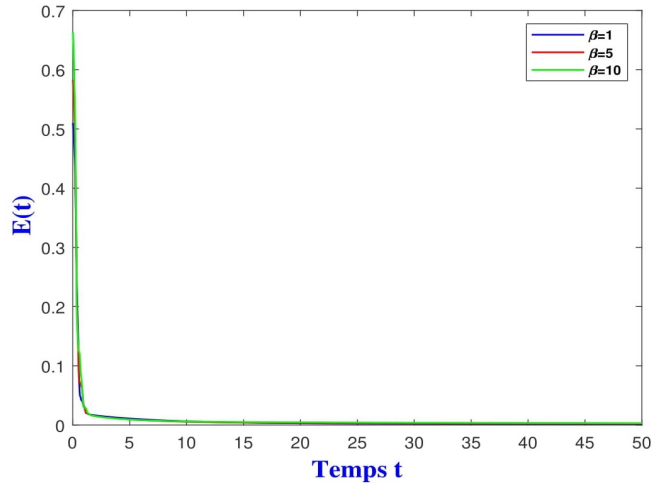


Figure 4.24 – Dissipation de l'énergie pour  $\beta = 1; 5; 10$ .

À présent, nous supposons  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{12} = 5$  et on fait varier  $\mu_{21}$  (1<sup>er</sup> cas), puis on fixe les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 5$ ,  $\mu_{12} = 1$ ,  $\mu_{21} = 5$  et nous faisons varier  $\mu_{22}$  (2<sup>e</sup> cas).

1<sup>er</sup> cas.

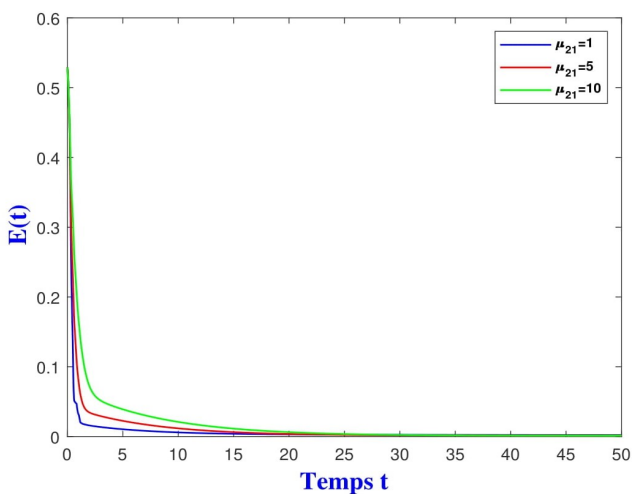


Figure 4.25 – Dissipation de l'énergie pour  $\mu_{21} = 1; 5; 10$ .

2<sup>e</sup> cas.

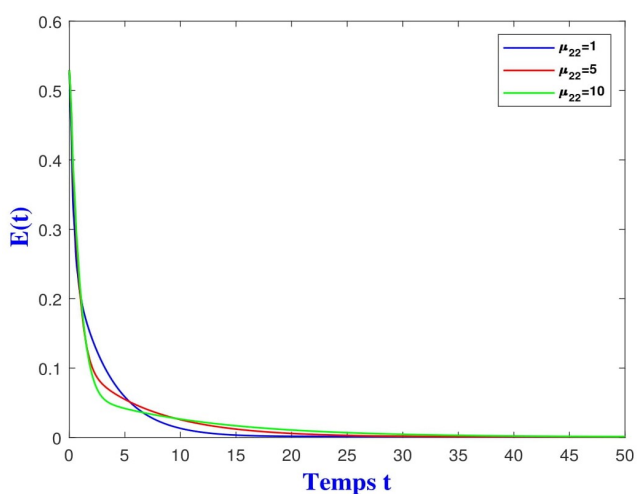


Figure 4.26 – Dissipation de l'énergie pour  $\mu_{22} = 1; 5; 10$ .

Nous prenons maintenant  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 5$ ,  $\mu_{22} = 1$ ,  $\mu_{21} = 5$  et on fait varier



## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

$\mu_{12}$  (1<sup>er</sup> cas). Puis on fixe les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{21} = 5$ ,  $\mu_{12} = 1$  et on fait varier  $\mu_{11}$  (2<sup>e</sup> cas).

1<sup>er</sup> cas.

2<sup>e</sup> cas.

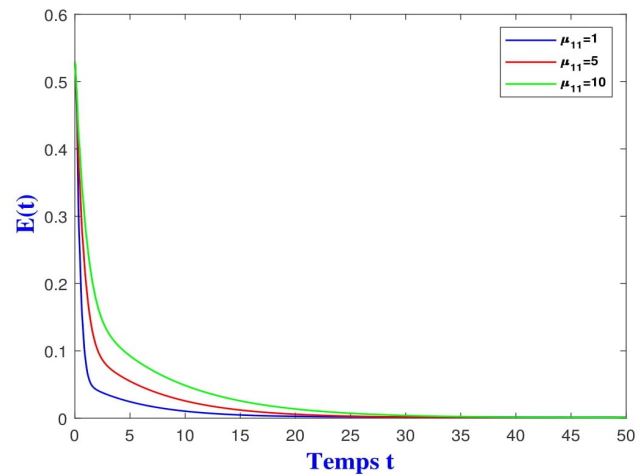
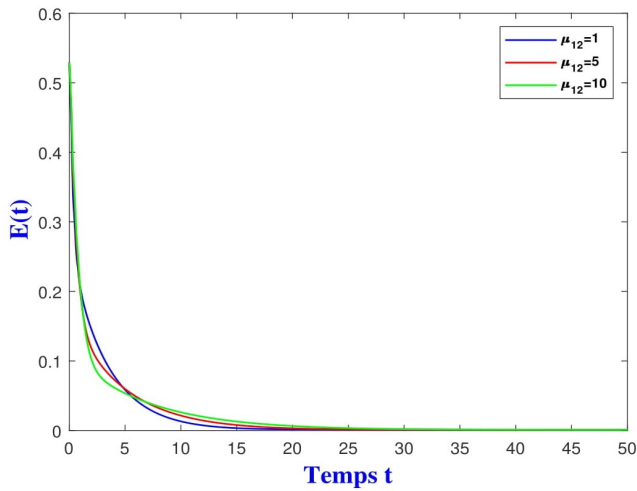


Figure 4.27 – Dissipation de l'énergie pour  $\mu_{12} = 1; 5; 10$ .

Figure 4.28 – Dissipation de l'énergie pour  $\mu_{11} = 1; 5; 10$ .

Pour terminer cette sous section, nous fixons des valeurs à l'ensemble des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\mu_{ij}$  tout en respectant la condition (3.6).

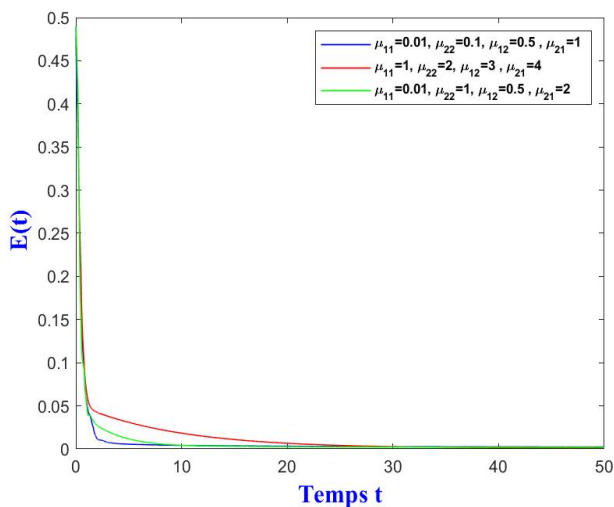


Figure 4.29 – Dissipation de l'énergie pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}$  et  $\alpha = \beta = 0$ .

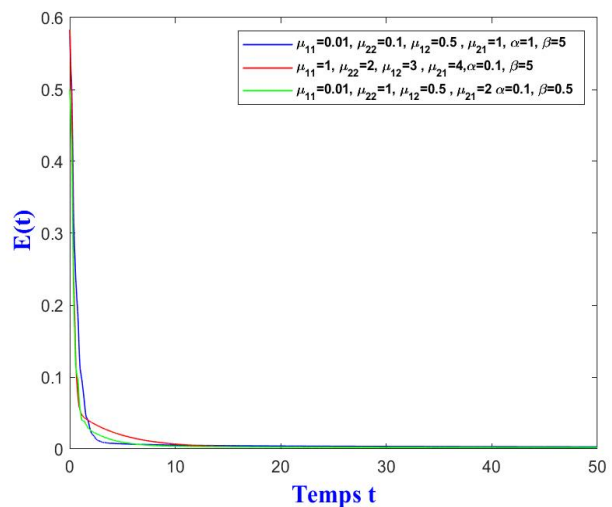


Figure 4.30 – Dissipation de l'énergie pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}$  et  $\alpha \neq \beta \neq 0$ .

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

---

### Commentaire 4.4.

De manière générale, nous observons une dissipation de l'énergie quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres de contrôle, conformément à la condition (3.6) (Figures 4.29 et 4.30). Ceci justifie le résultat de dissipation de l'énergie obtenu en début de l'étude de ce problème.

De plus, au regard de la Figure 4.23 et de la Figure 4.24, on constate que lorsqu'on fait varier les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  les courbes de l'énergie obtenues restent pratiquement identiques. Par contre, on constate aux Figures 4.25–4.28 que pour ces mêmes valeurs attribuées aux paramètres  $\mu_{ij}$  (avec  $1 \leq i, j \leq 2$ ), les courbes de l'énergie sont différentes. On déduit de ces observations que les paramètres de contrôle  $\alpha$  et  $\beta$  n'ont aucune influence sur la dissipation de l'énergie.

À présent, considérons les paramètres  $\mu_{21}$  et  $\mu_{22}$  associés au contrôle force (Figures 4.25–4.26). Lorsqu'on donne à  $\mu_{21}$  des valeurs égales à 1, 5 puis 10, l'énergie s'annule respectivement au bout de 15, 20 puis 25 secondes. Aussi, lorsqu'on donne à  $\mu_{22}$  des valeurs égales à 1, 5 puis 10, l'énergie s'annule respectivement au bout de 17, 25 puis 30 secondes. Le paramètre  $\mu_{21}$  semble donc permettre une annulation plus rapide de l'énergie par rapport au paramètre  $\mu_{22}$ . Considérons maintenant les paramètres  $\mu_{11}$  et  $\mu_{12}$  associés au contrôle moment (Figures 4.27–4.28). Lorsqu'on donne à  $\mu_{12}$  des valeurs égales à 1, 5 puis 10, l'énergie s'annule respectivement au bout de 15, 20 puis 25 secondes. Aussi, lorsqu'on donne à  $\mu_{11}$  des valeurs égales à 1, 5 puis 10 l'énergie s'annule respectivement au bout de 20, 25 puis 30 secondes. Le paramètre  $\mu_{12}$  semble donc permettre une annulation plus rapide de l'énergie par rapport au paramètre  $\mu_{11}$ .

### 4.2.3 Influences des contrôles sur les vibrations de la poutre à l'extrémité libre

Nous comparons maintenant les positions et l'angle de rotation de la poutre en  $x = 1$  pour différentes valeurs des paramètres de contrôle.

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

Pour ce faire, on fixe les valeurs  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{12} = 5$  et  $\mu_{21} = 1$  on fait varier  $\alpha$  (1<sup>er</sup> cas). Ensuite, on prend  $\alpha = 1$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{12} = 5$  et  $\mu_{21} = 1$  on fait varier  $\beta$  (2<sup>e</sup> cas).

1<sup>er</sup> cas

2<sup>e</sup> cas.

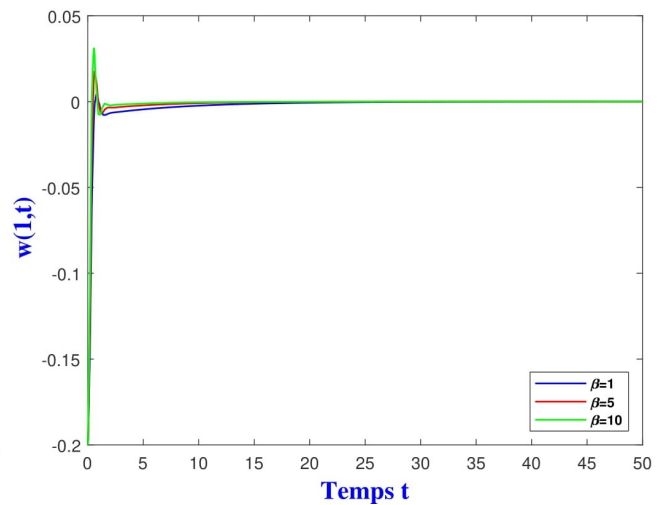
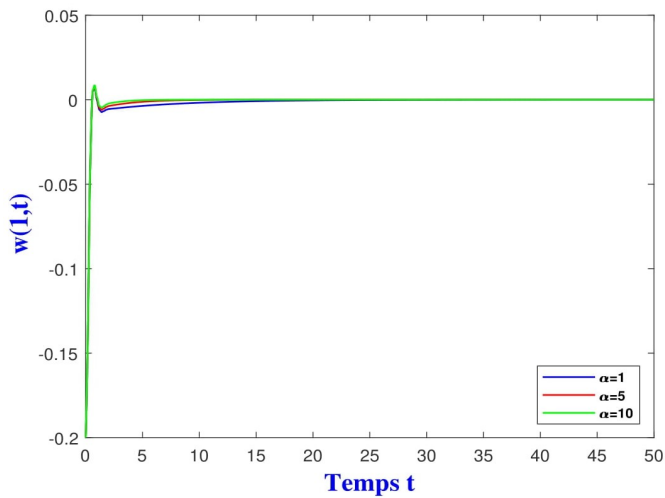


Figure 4.31 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour  $\alpha = 1; 5; 10$ .

Figure 4.32 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour  $\beta = 1; 5; 10$ .

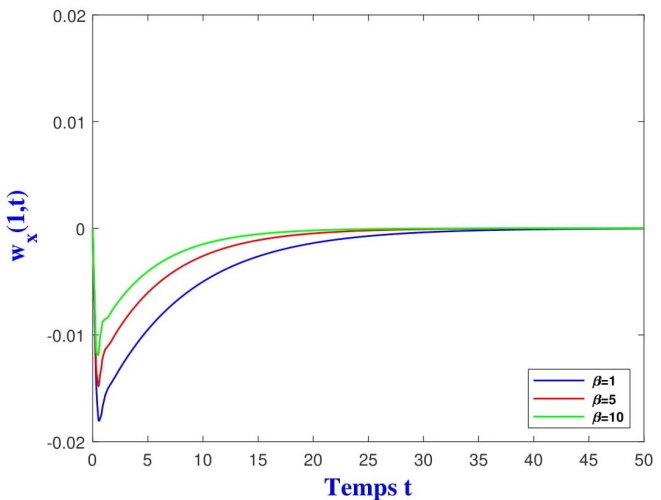
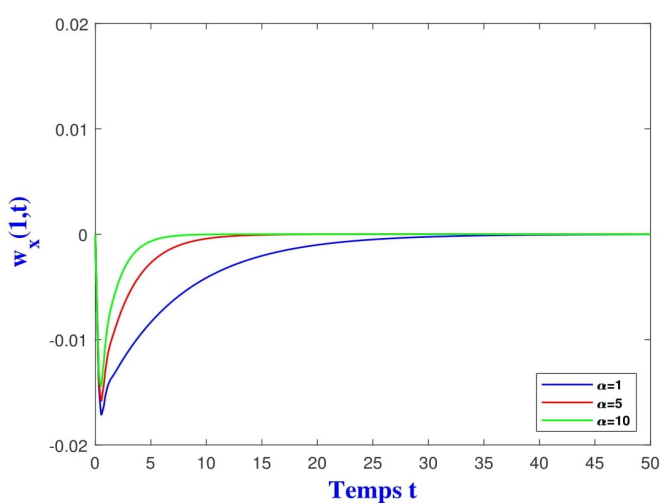


Figure 4.33 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour  $\alpha = 1; 5; 10$ .

Figure 4.34 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour  $\beta = 1; 5; 10$ .

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

À présent, nous supposons  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{12} = 5$  et on fait varier  $\mu_{21}$  (1<sup>er</sup> cas), puis on fixe les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 5$ ,  $\mu_{12} = 1$ ,  $\mu_{21} = 5$  et nous faisons varier  $\mu_{22}$  (2<sup>e</sup> cas).

1<sup>er</sup> cas.

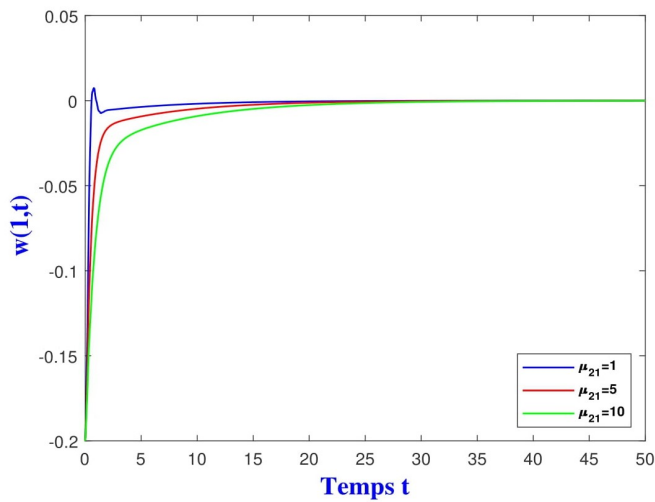


Figure 4.35 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour  $\mu_{21} = 1; 5; 10$ .

2<sup>e</sup> cas.

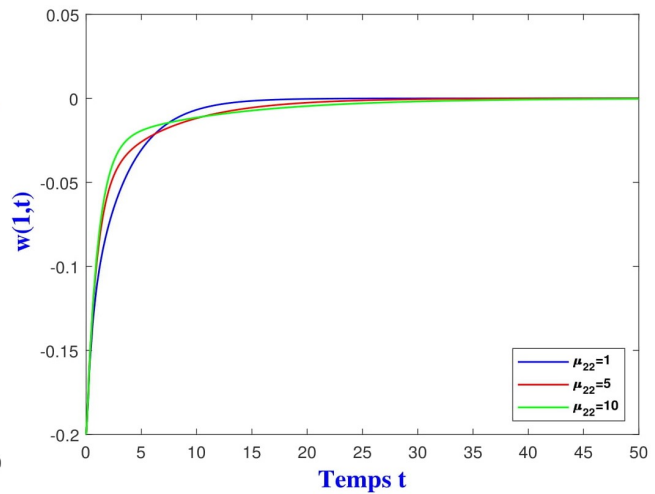


Figure 4.36 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour  $\mu_{22} = 1; 5; 10$ .

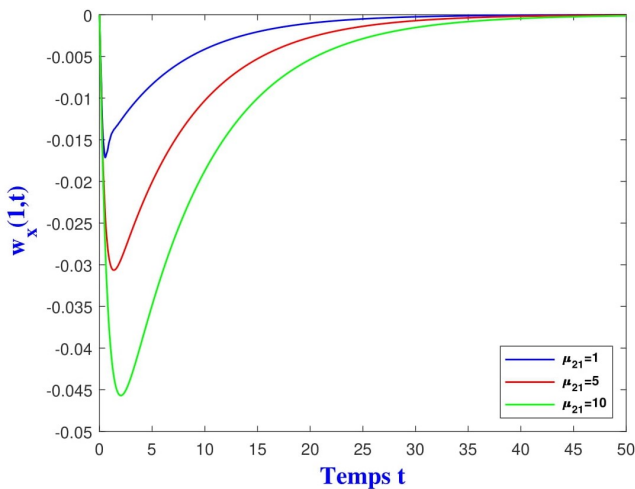


Figure 4.37 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour  $\mu_{21} = 1; 5; 10$ .

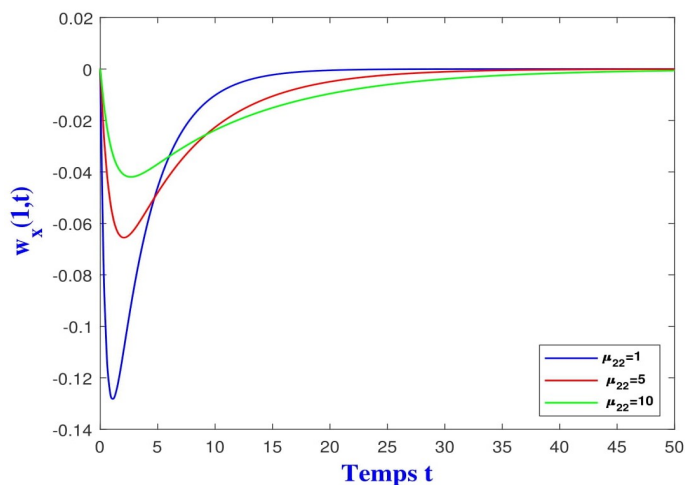


Figure 4.38 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour  $\mu_{22} = 1; 5; 10$ .

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

Nous prenons maintenant  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 5$ ,  $\mu_{22} = 1$ ,  $\mu_{21} = 5$  et on fait varier  $\mu_{12}$  (1<sup>er</sup> cas), puis on fixe les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{22} = 5$ ,  $\mu_{21} = 5$ ,  $\mu_{12} = 1$  et nous faisons varier  $\mu_{11}$  (2<sup>e</sup> cas).

1<sup>er</sup> cas.

2<sup>e</sup> cas.

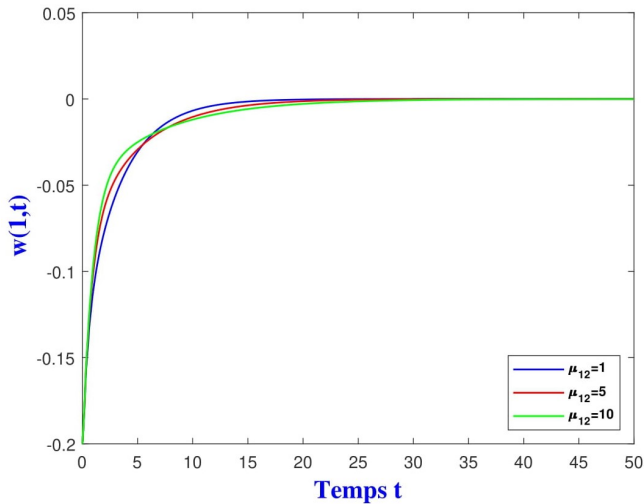


Figure 4.39 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour  $\mu_{12} = 1; 5; 10$ .

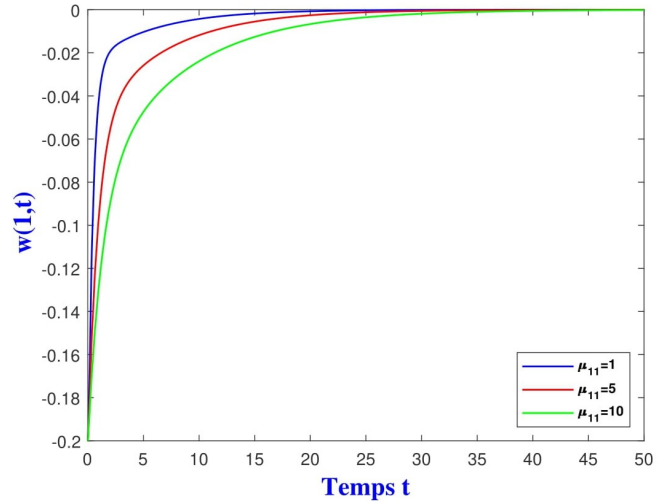


Figure 4.40 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour  $\mu_{11} = 1; 5; 10$ .

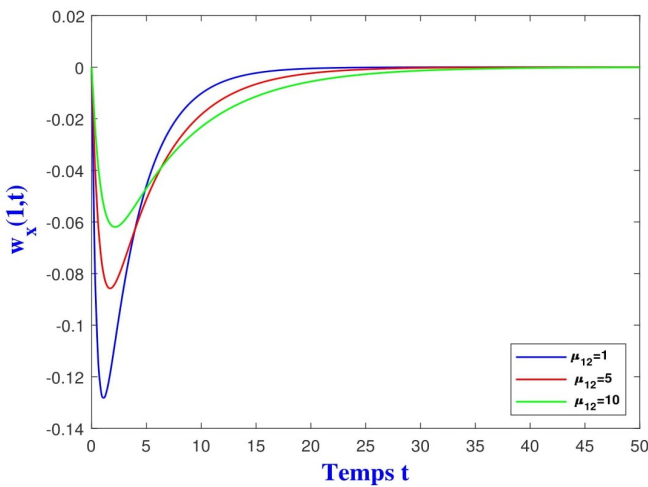


Figure 4.41 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour  $\mu_{12} = 1; 5; 10$ .

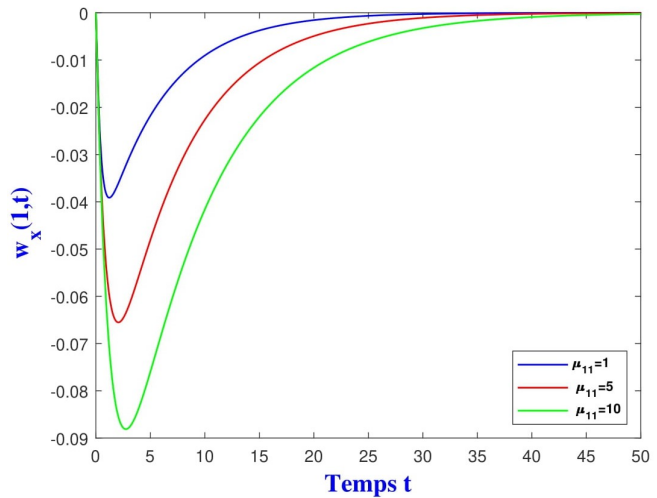


Figure 4.42 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour  $\mu_{11} = 1; 5; 10$ .

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

Nous fixons des valeurs à l'ensemble des variables  $\alpha, \beta$  et  $\mu_{ij}$  tout en respectant la condition (3.6).

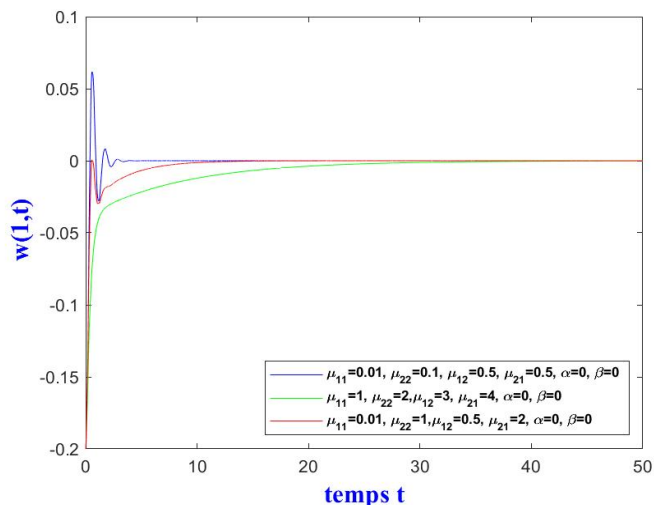


Figure 4.43 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}$  et  $\alpha = \beta = 0$ .

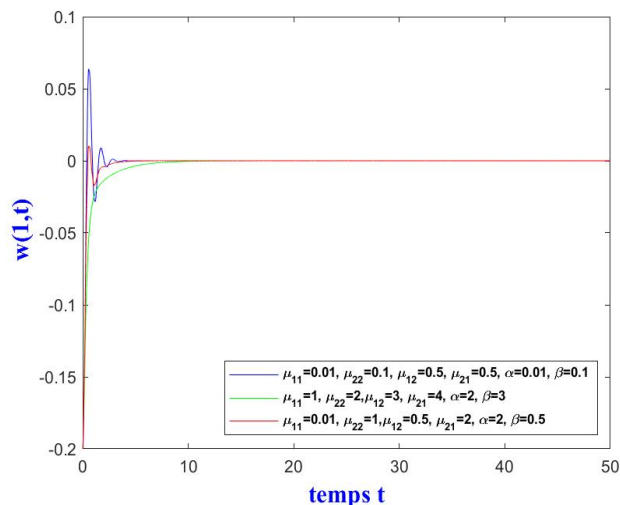


Figure 4.44 – Courbes des positions  $w(1, t)$  pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}, \alpha$  et  $\beta$ .

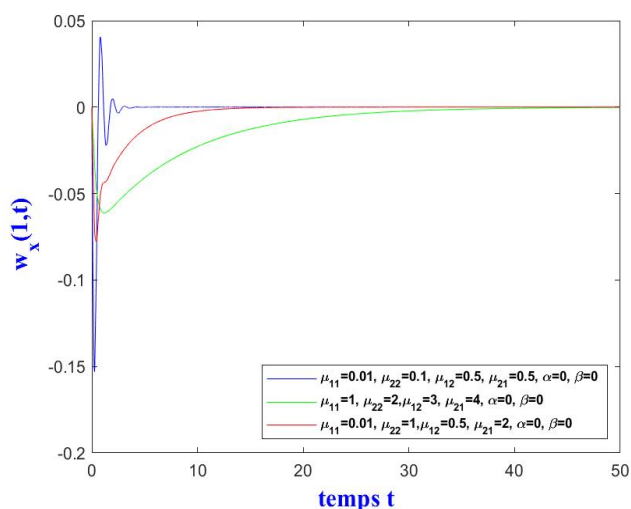


Figure 4.45 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}$  et  $\alpha = \beta = 0$ .

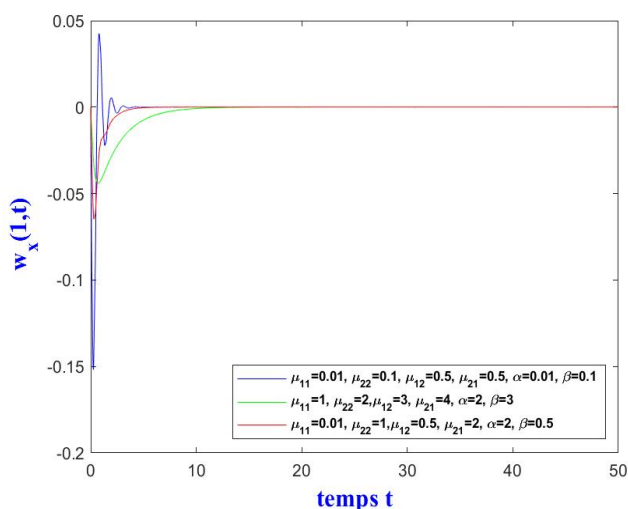


Figure 4.46 – Courbes des angles de rotations  $w_x(1, t)$  pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}, \alpha$  et  $\beta$ .

### Commentaire 4.5.

Au regard des Figures 4.43–4.46, nous constatons que l'attribution d'une valeur positive à tous les paramètres de contrôle conformément à la condition (3.6) permet une annulation rapide des vibrations à l'extrémité libre de la poutre.

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

---

Remarquons à travers les Figures 4.31–4.34, que malgré l'attribution de différentes valeurs aux paramètres de contrôle  $\alpha$  et  $\beta$ , les courbes des positions et des angles de rotation à l'extrémité libre obtenues restent pratiquement les mêmes. Cependant, d'après Figures 4.35–4.42, les courbes des positions et des angles de rotation à l'extrémité libre sont différentes lorsqu'on attribue différentes valeurs aux paramètres de contrôle  $\mu_{ij}$ . De plus, une diminution de la valeur des paramètres  $\mu_{ij}$ , entraîne une annulation plus rapide des vibrations à l'extrémité libre. On déduit de ces observations que les paramètres de contrôle  $\alpha$  et  $\beta$  n'ont pas d'influence sur l'amortissement des vibrations à l'extrémité libre de la poutre contrairement aux paramètres  $\mu_{ij}$ .

### 4.2.4 Influences des contrôles sur la déflexion de la poutre

$$w(x, t)$$

Nous représentons la solution  $w(x, t)$ . Ainsi, nous observons la déflexion de la poutre pour  $x \in [0, 1]$  et sa convergence vers l'état d'équilibre  $w \equiv 0$  sur l'intervalle de temps  $t \in [0, 50]$ .

Nous fixons des valeurs à l'ensemble des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\mu_{ij}$  tout en respectant la condition (3.6). Pour le graphique de gauche nous fixons  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  et  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 2$ ,  $\mu_{12} = 3$ ,  $\mu_{21} = 4$ . Pour le graphique de droite nous considérons  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$  et  $\mu_{11} = 0.01$ ,  $\mu_{22} = 0.1$ ,  $\mu_{12} = 0.5$ ,  $\mu_{21} = 0.5$ .

## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

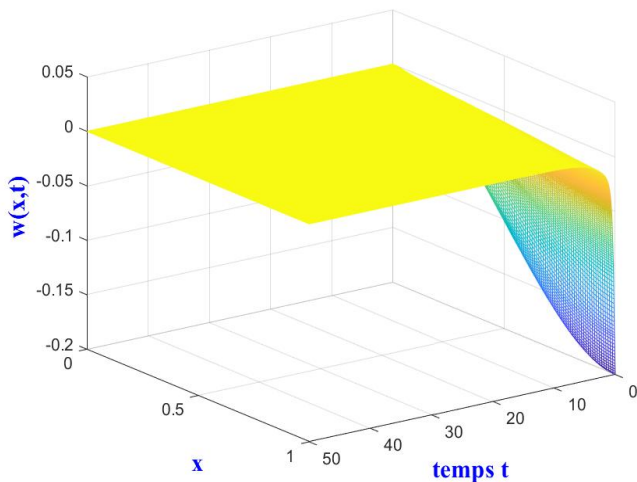


Figure 4.47 – Déflexion  $w(x, t)$  pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

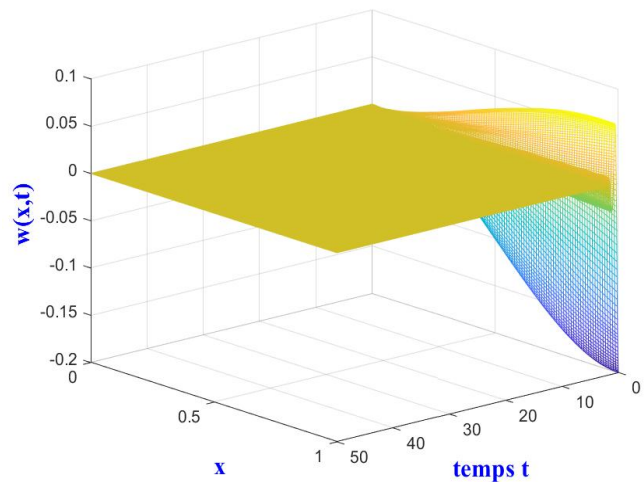


Figure 4.48 – Déflexion  $w(x, t)$  pour différentes valeurs de  $\mu_{ij}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

### Commentaire 4.6.

De manière générale, nous avons la convergence de la poutre vers l'état d'équilibre  $w \equiv 0$ . Ce qui confirme le résultat du Théorème 3.3.

Nous constatons à travers les Figues 4.47 et 4.48 que les oscillations de la poutre sont amorties rapidement pour  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  et  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = 2$ ,  $\mu_{12} = 3$ ,  $\mu_{21} = 4$ . Ainsi, pour ces valeurs des paramètres de contrôle, la poutre retrouve très rapidement l'état d'équilibre.

### 4.2.5 Sensibilité des paramètres de contrôle sur la stabilité

Au regard des courbes obtenues précédemment pour différentes valeurs des paramètres de contrôle ( $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\mu_{ij}$  avec  $1 \leq i, j \leq 2$ ), nous nous proposons dans cette partie, de comparer les indices de sensibilité de Sobol des paramètres  $\mu_{21}$  et  $\mu_{22}$  associés au contrôle force puis les indices de sensibilité de Sobol des paramètres  $\mu_{11}$  et  $\mu_{12}$  associés au contrôle moment.

On note dans le tableau ci-dessous, le temps d'amortissement des vibrations de la poutre  $\delta\tau$  (en seconde), pour différentes valeurs de  $\mu_{21}$  et  $\mu_{22}$ , après avoir fixé les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{12} = 5$ .



## 4.2 Équation de poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

Tableau 4.4 – Temps d'amortissement des vibrations de la poutre (en seconde) pour différentes valeurs de  $\mu_{21}$  et  $\mu_{22}$

$\mu_{21} \backslash \mu_{22}$	0.1	0.9	1	3	5	10	15
0.1	6.43	6.57	6.81	9.00	12.60	13.03	13.51
0.9	7.57	5.96	10.08	12.97	16.27	17.83	15.53
1	8.58	8.08	8.21	13.19	17.5	19.30	17.48
3	9.89	16.62	14.86	15.64	19.77	25.76	27.12
5	10.86	12.91	13.03	16.18	22.98	26.47	34.18
10	14.22	16.19	17.52	15.48	25.98	27.66	44.83
15	21.48	24.67	25.9	20.09	26.93	35.88	45.7

Le calcul de l'indice de sensibilité de Sobol de premier ordre de chacun de ces paramètres donne le résultat suivant :

$$S_{\mu_{21}} \simeq 0.53$$

$$S_{\mu_{22}} \simeq 0.47.$$

Nous constatons que  $S_{\mu_{21}} > S_{\mu_{22}}$ . Nous pouvons donc affirmer que le paramètre de contrôle  $\mu_{21}$ , a plus d'impact sur la stabilisation de la poutre par rapport au paramètre  $\mu_{22}$ .

On note à présent dans le tableau suivant, les temps d'amortissement des vibrations de la poutre  $\delta\tau$  (en seconde), pour différentes valeurs de  $\mu_{12}$  et  $\mu_{11}$ , après avoir fixé les valeurs  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\mu_{21} = 5$ ,  $\mu_{22} = 1$ .

## Conclusion générale et perspectives

---

Tableau 4.5 – Temps d’amortissement des vibrations de la poutre (en seconde) pour différentes valeurs de  $\mu_{12}$  et  $\mu_{11}$ .

$\mu_{12} \backslash \mu_{11}$	0.1	0.9	1	3	5	10	15
0.1	7.11	8.58	8.75	10.22	12.01	13.6	14.07
0.9	8.23	10.62	12.50	14.31	16.06	16.59	16.96
1	9.35	11.73	11.84	10.53	15.63	20.04	18.73
3	10.77	12.88	12.50	12.98	19.93	23.28	30.92
5	12.97	13.09	15.92	17.72	15.88	25.12	33.25
10	13.05	15.64	18.20	22.71	30.52	40.62	44.14
15	22.72	23.26	20.71	29.62	33.39	42.07	45.94

Nous calculons l’indice de sensibilité de Sobol de premier ordre de chacun de ces paramètres. Nous obtenons le résultat suivant :

$$S_{\mu_{12}} \simeq 0.56$$

$$S_{\mu_{11}} \simeq 0.44.$$

Nous constatons que  $S_{\mu_{12}} > S_{\mu_{11}}$ . Nous pouvons donc affirmer que le paramètre de contrôle  $\mu_{12}$ , a plus d’influence sur la stabilisation de la poutre par rapport au paramètre  $\mu_{11}$ .

Conclusion : Finalement, retenons que les simulations numériques présentées dans ce chapitre valident bien la méthode numérique utilisée dans notre étude. En effet, elles confirment les résultats établis, dans le cas continu, dans cette thèse et dans [28, 1]. De plus, ces simulations numériques illustrent l’influence des paramètres de contrôle sur le comportement dynamique asymptotique des systèmes étudiés.

---

# Chapitre 5

## Conclusion générale et perspectives

### Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons effectué une étude numériquement de deux systèmes modélisés par des équations de poutre d'Euler-Bernoulli. Le premier système, étudié au chapitre 2, se constitue d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients constants à laquelle est associée un contrôle en force et en moment ponctuels proportionnels respectivement à la vitesse et à la vitesse de rotation. Le deuxième système, étudié au chapitre 3, est constitué d'une poutre flexible d'Euler-Bernoulli à coefficients variables contrôlée en force et en moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et du terme de position (respectivement l'angle de rotation) dans le contrôle force (respectivement moment).

Notre objectif principal a été de développer une méthode numérique semi-discrète qui conserve les résultats théoriques de stabilité et de dissipativité déjà établis pour ces problèmes et aussi de les résoudre numériquement. Pour ce faire, nous avons pour chaque problème, montré l'existence et l'unicité d'une solution généralisée sous la forme d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions et établis des théorèmes d'existence, d'unicité et de régularité forte de la solution faible. Nous avons étudié numériquement ces deux problèmes et prouvé que l'utilisation de la méthode des éléments finis avec les fonctions polynomiales cubiques d'Hermite permet l'élabo-

---

ration d'un schéma numérique stable et convergent qui conserve les propriétés de ces problèmes, obtenues dans le cas continu. Aussi, les simulations numériques effectuées au chapitre 4 nous ont permis de vérifier la dissipativité de l'énergie et l'ordre de convergence, établis aux chapitres 2 et 3 pour chaque problème. De plus, nous avons montré que les paramètres de contrôle ont une grande influence sur la dissipativité de l'énergie et sur le comportement dynamique asymptotique de ces systèmes. En effet, à travers les représentations graphiques de l'énergie, de la solution et des oscillations à l'extrémité libre de chacune de ces poutres, nous avons constaté que l'attribution de certaines valeurs aux différents paramètres de contrôle, fait décroître plus rapidement la courbe de l'énergie, annule très rapidement les vibrations de l'extrémité de la poutre, et ainsi stabilise plus vite les systèmes étudiés.

## **Perspectives**

À la suite de ce travail, de nombreuses perspectives de recherches sont envisageables. Entre autres, nous avons l'utilisation de la méthode numérique développée dans cette thèse et d'autres méthodes connues pour étudier des systèmes modélisés par des équations de poutre d'Euler-Bernoulli avec un contrôle dynamique non linéaire à la frontière et/ou un amortisseur visqueux. Aussi, il serait intéressant d'effectuer une analyse de la stabilité et une étude numérique pour les systèmes dynamiques modélisés par les équations de poutres de Timoshenko avec un contrôle linéaire à la frontière. En effet, ce modèle prend en compte la déformation de cisaillement et les effets de flexion en rotation, ce qui le rend approprié pour décrire le comportement de poutres épaisses.

---

## Annexe A

Considérons les lemmes suivants qui seront utiles pour la suite.

**Lemme A.1.** Soit l'opérateur  $B_0 : D(B_0) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  de domaine

$$D(B_0) = \{f \in H_l^4(0, 1) : f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0\} \quad (\text{A.1})$$

tel que

$$\forall u \in D(B_0), B_0 u = u_{xxxx}. \quad (\text{A.2})$$

L'opérateur  $B_0$  est maximal, monotone, autoadjoint et à résolvante compacte.

*Démonstration.*

–Monotonie de  $B_0$ .

$\forall \varphi \in D(B_0)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle B_0 \varphi, \varphi \rangle_{L^2(0,1)} &= \langle \varphi_{xxxx}, \varphi \rangle_{L^2(0,1)} \\ \langle B_0 \varphi, \varphi \rangle_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 \varphi_{xxxx} \times \varphi dx. \end{aligned}$$

Après deux intégrations par parties et en tenant compte du fait que  $\varphi_{xx}(1) = \varphi_{xxx}(1) = \varphi_x(0) = \varphi(0) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle B_0 \varphi, \varphi \rangle_{L^2(0,1)} &= \|\varphi_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 \\ \langle B_0 \varphi, \varphi \rangle_{L^2(0,1)} &\geq 0. \end{aligned}$$

---

$B_0$  est donc monotone.

–Montrons que  $B_0$  est maximal.

Soit  $g \in L^2(0, 1)$ , montrons qu'il existe  $f \in D(B_0)$  tel que  $(I + B_0)f = g$ .

$$(I + B_0)f = g \Rightarrow \begin{cases} f + f_{xxxx} = g \\ f(0) = f_x(0) = f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0. \end{cases}$$

En multipliant la première égalité par  $\varphi \in H_l^2(0, 1)$  et en intégrant deux fois par parties sur  $(0, 1)$ , on obtient

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 f_{xx}(x)\varphi_{xx}(x)dx = \int_0^1 g(x)\varphi(x)dx. \quad (\text{A.3})$$

Posons

$$a(f, \varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 f_{xx}(x)\varphi_{xx}(x)dx \quad \text{et} \quad L(\varphi) = \int_0^1 g(x)\varphi(x)dx$$

La forme bilinéaire  $a(., .)$  est continue et coercive sur  $H_l^2(0, 1)$  et la forme linéaire  $L(.)$  est continue sur  $H_l^2(0, 1)$ . Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique  $f \in H_l^2(0, 1)$  solution de (A.3).

En prenant  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ , pour tout  $f \in H_l^4(0, 1)$ , on a :

$$f + f_{xxxx} = g \text{ p.p sur } (0, 1).$$

Prenons en particulier  $\varphi \in H_l^2(0, 1)$ . En considérant (A.3), on a

$$f_{xx}(1)\varphi_x(1) - f_{xxx}(1)\varphi(1) = 0.$$

$\varphi$  étant arbitraire on déduit que

$$f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0.$$

---

Ceci entraîne  $f \in D(B_0)$  donc  $B_0$  est donc maximal

–Montrons que  $B_0$  est autoadjoint.

$\forall \varphi, \psi \in D(B_0)$ , on a :

$$\begin{aligned}\langle B_0\varphi, \psi \rangle_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 \varphi_{xxxx}(x)\psi(x)dx \\ &= \int_0^1 \varphi_{xx}(x)\psi_{xx}(x)dx.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\langle \psi, B_0\varphi \rangle_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 \psi_{xxxx}(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_0^1 \varphi_{xx}(x)\psi_{xx}(x)dx.\end{aligned}$$

D'où,  $\langle \psi, B_0\varphi \rangle_{L^2(0,1)} = \langle B_0\varphi, \psi \rangle_{L^2(0,1)}$  donc  $B_0$  est autoadjoint.

–Montrons que  $B_0$  est à résolvante compacte.

L'injection  $i : H^4(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$  étant compacte, il en est de même pour  $i : D(B_0) \rightarrow L^2(0,1)$ . Et comme  $(I - B_0)^{-1} : L^2(0,1) \rightarrow D(B_0)$  est bornée, donc elle est compacte.  $\square$

**Lemme A.2.** Soit l'opérateur  $A_0 : D(A_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  de domaine

$$D(A_0) = \{(f, g)^\top \in H^4(0,1) \cap H_l^2(0,1) \times H_l^2(0,1) : f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0\}$$

tel que

$$\forall (f, g)^\top \in D(A_0), A_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -f_{xxxx} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

L'opérateur  $A_0$  a les propriétés suivantes :

- i) La résolvante de  $A_0$  est compacte.
- ii)  $A_0$  est générateur d'un groupe d'isométrie  $e^{tA_0}$  sur  $\mathcal{H}$ .

---

iii)  $A_0$  est antiadjoint.

*Démonstration.*

–Montrons que  $A_0$  est à résolvante compacte.

L'injection  $i : H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  étant compacte, il en est de même pour  $i : D(A_0) \rightarrow \mathcal{H}$ . De plus  $(I - A_0)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(A_0)$  est bornée donc elle est compacte.

–Montrons que  $A_0$  est générateur d'un groupe d'isométrie  $e^{tA_0}$  sur  $\mathcal{H}$ .

Pour tout  $\phi$  et  $\psi$  éléments de  $D(A_0)$  avec  $\phi = (u_1, v_1)^\top$ ,  $\psi = (u_2, v_2)^\top$ , on a

$$\begin{aligned} \langle A_0\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle A_0(u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle (v_1, -(u_1)_{xxxx}), (u_2, v_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 -(u_1)_{xxxx}v_2 dx + \int_0^1 (v_1)_{xx}(u_2)_{xx} dx. \end{aligned}$$

Après deux intégrations par parties, on obtient

$$\langle A_0\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 ((v_1)_{xx}(u_2)_{xx} - (u_1)_{xx}(v_2)_{xx}) dx.$$

de la même manière, on a

$$\begin{aligned} -\langle \phi, A_0\psi \rangle_{\mathcal{H}} &= -\langle (u_1, v_1), (v_2, -(u_2)_{xxxx}) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^1 (u_2)_{xxxx}v_1 dx - \int_0^1 (v_2)_{xx}(u_1)_{xx} dx \\ &= \int_0^1 ((v_1)_{xx}(u_2)_{xx} - (u_1)_{xx}(v_2)_{xx}) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$-\langle \phi, A_0\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle A_0\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (\text{A.5})$$

Aussi, pour tout  $\varphi = (u, v)^\top \in D(A_0)$ ,

$$\langle A_0\varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$



$A_0$  est donc dissipatif.

–Montrons que  $A_0$  est maximal.

Soit  $(g_1, g_2)^\top \in \mathcal{H}$ , prouvons qu'il existe un  $(f_1, f_2)^\top \in D(A_0)$  tel que

$(I - A_0)(f_1, f_2)^\top = (g_1, g_2)^\top$ . On a

$$(I - A_0)(f_1, f_2)^\top = (g_1, g_2)^\top \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1)_{xxxx} + f_2 = g_2 \\ f_1 - f_2 = g_1 \\ f_1(0) = (f_1)_x(0) = 0 \\ (f_1)_{xx}(1) = (f_1)_{xxx}(1) = 0 \\ f_2 = f_1 - g_1 \end{cases}$$

Cela revient à chercher  $f_1$  dans  $D(B_0)$  tel que  $(I + B_0)f_1 = g_1 + g_2$  or  $B_0$  est maximal. Ce qui entraîne que  $A_0$  est maximal.

Donc  $A_0$  est m-dissipatif. Il est générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $\mathcal{H}$ . Aussi, de la relation (A.5), nous déduisons que  $A_0$  est antiadjoint. Il en résulte que  $A_0$  est générateur d'un semi-groupe d'isométrie sur  $\mathcal{H}$  (Selon le Théorème 1.15 du chapitre 1).  $\square$

Soit maintenant le résultat suivant utilisé pour justifier le Théorème 2.3.

**Proposition A.1.** Soit  $S = \{w \in \mathcal{H} : \frac{d\mathcal{L}}{dt}(w) = 0\}$  avec  $\mathcal{L}$  la fonctionnelle de Lyapunov définie par (2.25). Le plus grand sous-ensemble invariant  $M$  de  $S$  est réduit à  $\{0\}$ .

*Démonstration.* La preuve suivante est une adaptation de la méthode décrite dans [11] p. 13-20 et [21] p. 41-45.

Pour tout  $\tilde{w} = (\tilde{y}(\cdot, t), \tilde{y}_t(\cdot, t))^\top \in M$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt}(\tilde{w}) = 0 &\Leftrightarrow -\alpha [\tilde{y}_t(1)]^2 - \beta [\tilde{y}_{xt}(1)]^2 \\ &\Leftrightarrow \tilde{y}_t(1) = \tilde{y}_{xt}(1) = 0. \end{aligned}$$

---

Ce qui implique que  $\tilde{y}$  vérifie le système suivant :

$$\tilde{y}_{tt}(x, t) + \tilde{y}_{xxxx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{y}(0, t) = \tilde{y}_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{y}_{xx}(1, t) = \tilde{y}_{xxx}(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{y}_t(1) = \tilde{y}_{xt}(1) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{y}(x, 0) = \tilde{y}_0(x), \quad \tilde{y}_t(x, 0) = \tilde{v}_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (\text{A.10})$$

Afin de démontrer que l'unique solution du système (A.6)-(A.10) est la solution nulle, nous introduisons sur  $L^2(0, 1)$  l'opérateur  $B_0$  de domaine  $D(B_0)$  défini par :

$$D(B_0) = \{f \in H_t^4(0, 1) : f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0\}. \quad (\text{A.11})$$

$D(B_0)$  est dense dans  $L^2(0, 1)$  et on a

$$\forall u \in D(B_0), \quad B_0 u = u_{xxxx}. \quad (\text{A.12})$$

L'opérateur  $B_0$  est maximal, monotone, auto-adjoint et à résolvante compacte ( voir Lemme A.1 ).

Il existe donc  $(\varphi_n, \mu_n)$  une suite de fonctions-valeurs propres de  $B_0$  telles que :

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1} \leq \dots$$

$$\begin{cases} \varphi_n \in D(B_0) \\ \varphi_{nxxxx} = \mu_n \varphi_n \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Pour des raisons de simplification, on va considérer  $\|\varphi_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2}$ .

D'après la Proposition 3.5 de [11] p. 18 et p. 21 , pour tout  $n \geq 1$ , on a :

i) La valeurs propre  $\mu_n$  est simple.

ii) La fonction propre de  $\varphi_n$  est telle que  $\varphi_n(1) \neq 0$  et  $\varphi_{nx}(1) \neq 0$ .

---

Considérons maintenant l'opérateur  $A_0$  de domaine

$$D(A_0) = \{(f, g)^\top \in H^4(0, 1) \cap H_l^2(0, 1) \times H_l^2(0, 1) : f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0\}.$$

$D(A_0)$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et on a

$$\forall (f, g)^\top \in D(A_0), A_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -f_{xxxx} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

L'opérateur  $A_0$  est antiadjoint, à résolvante compacte, et générateur d'un groupe d'isométrie  $e^{tA_0}$  sur  $\mathcal{H}$  ( voir Lemme A.2 ).

Le spectre de  $A_0$  est donc discret et imaginaire pur et ses fonctions propres  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forment une base de Riez de l'espace  $\mathcal{H}$ . On montre de plus que cette base est orthonormée.

En effet, le spectre de  $B_0$  étant simple, il en est de même pour celui de  $A_0$ .

Ainsi, la famille  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale dans  $\mathcal{H}$ .

En outre,

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A_0) &\Rightarrow \exists (f, g)^\top \in D(A_0) : A_0(f, g)^\top = \lambda(f, g)^\top \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} g \\ -f_{xxxx} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} g = \lambda f \\ -f_{xxxx} = \lambda g = \lambda^2 f \\ f(0) = f_x(0) = 0 \\ f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

---


$$\Rightarrow \begin{cases} g = \lambda f \\ B_0 f = -\lambda^2 f \\ f(0) = f_x(0) = f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\lambda_n^2 = \mu_n$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm n} = \pm i\sqrt{\mu_n}.$$

Soit  $\psi_n$  la fonction propre de  $A_0$  associée à  $\lambda_n$ , on a alors :

$$\psi_{\pm n} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\varphi_n}{\lambda_n} \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

En considérant  $\|\varphi_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2}$  et (A.13), on montre que  $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$ . La famille  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est donc une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ .

On va maintenant utiliser le fait que  $\tilde{y}_{tx}(1, t) = 0$  pour montrer que  $\tilde{w}(t) = 0$ .

D'après ce qui précède, tout élément  $\tilde{w}_0 \in D(A_0)$ , s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\tilde{w}_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \psi_n, \quad c_0 = 0.$$

Ainsi,

$$\tilde{w}(t) = e^{tA_0} \tilde{w}_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{t\lambda_n} \psi_n,$$

avec  $c_{-n} = \bar{c}_n$  car  $\tilde{w}(t)$  est réelle.

Posons  $c_n = a_n + ib_n$  alors  $c_{-n} = a_n - ib_n$ .

Puisque,

$$c_n e^{t\lambda_n} = (a_n \cos t\sqrt{\mu_n} - b_n \sin t\sqrt{\mu_n}) + i(a_n \sin t\sqrt{\mu_n} + b_n \cos t\sqrt{\mu_n}).$$

---

Alors,

$$\tilde{y}(\cdot, t) = 2 \sum_{n>0} (b_n \cos t\sqrt{\mu_n} + a_n \sin t\sqrt{\mu_n}) \frac{\varphi_n}{\sqrt{\mu_n}} \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{y}_t(\cdot, t) = 2 \sum_{n>0} (a_n \cos t\sqrt{\mu_n} - b_n \sin t\sqrt{\mu_n}) \varphi_n. \quad (\text{A.16})$$

Les séries (A.15) et (A.16) convergent respectivement dans  $H_l^2(0, 1)$  et  $L^2(0, 1)$ .

Montrons à présent que (A.16) converge uniformément dans  $H_l^2(0, 1)$ .

En effet,  $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_t(\cdot, 0) = 2 \sum_{n>1} a_n \varphi_n \in H_l^2(0, 1)$  car  $\begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} \in D(A_0)$ .

D'autre part,  $\varphi_n$  étant orthogonale dans  $H_l^2(0, 1)$  et puisque  $\|\varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \mu_n \|\varphi_n\|_2^2 = \frac{\mu_n}{2}$  alors,

$$\sum_{n>1} a_n^2 \mu_n < \infty.$$

Donc la série  $\sum_{n>0} (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t) \varphi_n$  converge uniformément dans  $H_l^2(0, 1)$  pour tout  $t > 0$ .

Aussi, on a

$$\sum_{n>1} b_n^2 \mu_n < \infty.$$

En effet, puisque

$$\tilde{y}_0 \in D(A_0) \Rightarrow \tilde{y}_0 \in D(B_0) \Rightarrow B_0 \tilde{y}_0 \in L^2(0, 1).$$

On obtient que

$$\sum_{n>0} \langle B_0 \tilde{y}_0, \varphi_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 < \infty.$$

Comme  $B_0$  est autoadjoint et  $B_0 \varphi_n = \mu_n \varphi_n$ , on peut écrire :

$$\langle B_0 \tilde{y}_0, \varphi_n \rangle_{L^2(0,1)} = \langle \tilde{y}_0, B_0 \varphi_n \rangle_{L^2(0,1)} = \mu_n \langle \tilde{y}_0, \varphi_n \rangle_{L^2(0,1)}.$$

---

De plus,

$$\langle \tilde{y}_0, \varphi_n \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{n>0} \frac{b_n}{\sqrt{\mu_n}}.$$

Alors,

$$\langle B_0 \tilde{y}_0, \varphi_n \rangle_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{n>0} b_n^2 \mu_n < \infty.$$

Donc  $2 \sum_{n>0} (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t - b_n \sin \sqrt{\mu_n} t) \varphi_n$  convergente uniformément en  $t$  dans  $H_l^2(0, 1)$ . Par continuité de la trace  $y \rightarrow y_x(1)$  dans  $H_l^2(0, 1)$  on a :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{tx}(1, t) &= 2 \sum_{n>0} (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t - b_n \sin \sqrt{\mu_n} t) \varphi_{nx}(1, t) \\ \tilde{y}_{tx}(1, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{t \lambda_n} \varphi_{nx}(1). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{\mu_{n+1}} - \sqrt{\mu_n}) = +\infty$$

et d'après les inégalités d'Ingham, on a :

$$\int_0^T \tilde{y}_{tx}^2(1, t) dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n \varphi_{nx}(1)|^2, \quad \forall C > 0.$$

Or

$$\tilde{y}_{tx}^2(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n \varphi_{nx}(1)|^2 = 0.$$

Et comme

$$\varphi_{nx}(1) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

---

On a donc

$$c_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ce qui entraîne que

$$\tilde{w}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Finalement, on obtient que  $M = \{0\}$ .

□

---

## **Annexe B**

Nous présentons à présent l'article publié dans un journal spécialisé.



## A NUMERICAL METHOD BY FINITE ELEMENT METHOD (FEM) OF AN EULER-BERNOULLI BEAM TO VARIABLE COEFFICIENTS

A. P. GOH ABRO<sup>1</sup>, J. M. GOSSRIN BOMISSO, A. KIDJÉGBO TOURÉ, AND ADAMA COULIBALY

**ABSTRACT.** We consider the Euler-Bernoulli beam equation with variable coefficients  $\rho(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = 0$  in the domain  $(0, 1)$  clamped at one end and controlled at the other end, in force and in moment, as well as its corresponding Cauchy problem  $\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t)$ ;  $y(0) = y_0$  in the appropriate state space. For this boundary value problem, we establish existence and uniqueness results adapting the standard strategy presented in [7, 9]. Indeed, using its weak formulation, we adapt the techniques of Faedo-Galerkin raised in [7, 9] to show the existence and uniqueness of weak solution for the case of the linear boundary conditions. Finally, we develop a stable and convergent numerical method by the finite element method. This method is validated by numerical simulations.

### 1. INTRODUCTION

In this paper, we establish existence and uniqueness theorems and develop a numerical method for an Euler-Bernoulli beam with variable coefficients. This beam is clamped at one end and controlled at the other end, in force and in moment by a linear combination of the velocity, velocity of rotation and the position term (respectively the angle of rotation) in the control of force (respectively moment). The vibrating beam system can be described as follows:

---

<sup>1</sup>corresponding author

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 35B45, 37N30, 35L20, 65N30, 74S05.

*Key words and phrases.* beam equation, stability, existence and uniqueness, higher regularity, Galerkin method, finite element method.

$$(1.1) \quad \rho(x)w_{tt}(x, t) + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$(1.2) \quad w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$(1.3) \quad -EI(1)w_{xx}(1, t) = (2\mu_{11}w_t + \mu_{12}w_{xt} + \alpha w_x)(1, t), \quad t > 0$$

$$(1.4) \quad (EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = (\mu_{21}w_t + 2\mu_{22}w_{xt} + \beta w)(1, t), \quad t > 0$$

$$(1.5) \quad w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1$$

where  $w(x, t)$  is the transversal deviation at position  $x$  and time  $t$ . We suppose that  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  and  $\mu_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  are constants such that

$$(1.6) \quad \mu_{12} > 0 \quad \text{and} \quad \mu_{12}\mu_{21} \geq (\mu_{11} + \mu_{22})^2.$$

In the system (1.1)–(1.5), we assume that the length of the beam is equal unity. Also, the function  $\rho(x)$  is the mass density of the beam and the function  $EI(x)$  is its flexural rigidity of the beam satisfying the following conditions:

$$(\rho(x), EI(x)) \in [C^4(0, 1)]^2, \text{ with } \rho(x) > 0, EI(x) > 0,$$

for all  $x \in (0, 1)$ .

This system has been studied by My Driss Aouragh and Naji Yebari [1] where it is shown that a set of generalized eigenfunctions of problem (1.1)–(1.4) forms a Riesz basis for the appropriate Hilbert space and that the spectrum-determined growth condition holds. In addition, to study numerically the spectrum of system, they used the finite difference scheme with the QZ method [8, 12].

A study of existence and uniqueness of weak solution was made by Bomisso et al [5] who analyzed a flexible Euler-Bernoulli beam with a force control in rotation and velocity rotation (a study with constant coefficients). The same study of this type was made for an Euler-Bernoulli beam with tip body and passivity-based boundary control (a study with variable coefficients) by Miletic et al [11]. Their studies were based on the Faedo-Galerkin's method and the work of Lions et al in [9]. We adapt the same procedure to study the existence and uniqueness of the problem (1.1) under the conditions (1.2)–(1.4). The main difficulty lies in the appearance of the time terms which appear in the definition of the weak solution of boundary value problem. The presence of this time terms can, greatly, complicate the application of standard techniques stated in [7, 9]. We overcome this difficulty by adapting these standard techniques. In addition, we develop a numerical method which preserves unconditionally the

results obtained in the continuous case. We derive an error estimate for a semi-discrete approximation and establish convergence.

The paper consists of five sections. In section 2, after proving that the problem is well posed in the sense  $C_0$ -semigroup of contractions, we show that this system is Lyapunov stable. In section 3, from the weak formulation, we show the existence, uniqueness and higher regularity of the weak solution. In section 4, a semi-discrete numerical method is constructed using the finite element method and in section 5, the numerical simulations are presented in order to illustrate the results obtained.

## 2. PRELIMINARIES

**2.1. Semigroup formulation.** Let us introduce the following spaces:

$$H_E^2(0, 1) = \{w \in H^2(0, 1) : w(0) = w_x(0) = 0\}.$$

The Hilbert space is defined by:

$$\mathcal{H} = H_E^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

with the inner product

$$\langle w, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \rho g_1 \overline{g_2} dx + \int_0^1 EI(f_1)_{xx} \overline{(f_2)_{xx}} dx + \alpha (f_1)_x(1) \overline{(f_2)_x}(1) + \beta f_1(1) \overline{f_2}(1)$$

where  $w = (f_1, g_1)^T \in \mathcal{H}$ ,  $v = w_t = (f_2, g_2)^T \in \mathcal{H}$  and we denote by  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  the corresponding norm. The superscript T stands for the transpose.

Let  $\mathbb{H} = (H_E^2(0, 1) \cap H^4(0, 1)) \times H_E^2(0, 1)$  and we consider  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  an linear operator with the domain

$$(2.1) \quad D(A) = \left\{ (f, g) \in \mathbb{H} : \begin{aligned} -EI(1)f_{xx}(1) &= 2\mu_{11}g(1) + \mu_{12}g_x(1) + \alpha f_x(1), \\ (EI(\cdot)f_{xx}(\cdot))_x(1) &= \mu_{21}g(1) + 2\mu_{22}g_x(1) + \beta f(1) \end{aligned} \right\}$$

defined by

$$(2.2) \quad A \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\cdot) \\ -\frac{1}{\rho(\cdot)} (EI(\cdot)f_{xx}(\cdot))_{xx} \end{pmatrix}.$$

Now (1.1)–(1.5) can be written as a following Cauchy problem:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathcal{H} \end{cases}$$

where  $y(t) = (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t))^T$ ,  $y(0) = (w_0, v_0)^T$  for all  $t > 0$ .

We give the proof on the well-posedness result of the system (1.1)–(1.5):

**Theorem 2.1.** *The operator  $A$  defined by (2.1)–(2.2) is closed, densely defined and dissipative. Furthermore,  $A$  is invertible with  $A^{-1}$  being compact and  $A$  generates a  $C_0$ -semigroup of contractions on  $\mathcal{H}$  denoted by  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .*

*Proof.* We start by showing that  $A$  is the dissipative operator.

For all  $w = (f, g)^T \in D(A)$ ,

$$\begin{aligned} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \left( g(x), -\frac{1}{\rho(x)} (EI(x)f_{xx}(x))_{xx} \right)^T, (f, g)^T \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^1 - (EI(x)f_{xx})_{xx} \bar{g}(x) dx + \int_0^1 EI(x)g_{xx}(x) \bar{f}_{xx}(x) dx \\ &\quad + \alpha g_x(1) \bar{f}_x(1) + \beta g(1) \bar{f}(1). \end{aligned}$$

Integrating twice by parts, using (1.2)–(1.4) and taking real part, we obtain:

$$\operatorname{Re} \langle Aw, w \rangle_{\mathcal{H}} = - \left( \mu_{21} |g(1)|^2 + \mu_{12} |g_x(1)|^2 + 2\mu_{22} |g_x(1)g(1)| + 2\mu_{11} |g(1)g_x(1)| \right) \leq 0.$$

Thus,  $A$  is a dissipative operator. Now let us show that the operator  $A$  is maximal i.e. prove that for all  $(f, g)^T \in \mathcal{H}$ , we can find  $(w, v)^T \in D(A)$  such that  $(I - A)(w, v) = (f, g)$ . This leads us in an equivalent way to seek  $(w, v)$  solution of the following system:

$$v = w - f$$

$$(2.4) \quad \rho(x)w + (EI(x)w_{xx}(x, t))_{xx} = \rho(x)(g + f)$$

$$(2.5) \quad -EI(1)w_{xx}(1, t) = (2\mu_{11}v + \mu_{12}v_x + \alpha w_x)(1, t)$$

$$(2.6) \quad (EI(\cdot)w_{xx})_x(1, t) = (\mu_{21}v + 2\mu_{22}v_x + \beta w)(1, t)$$

with  $w \in H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)$ ,  $v \in H_E^2(0, 1)$  and  $g \in L^2(0, 1)$ .

Now, multiply (2.4) by  $\varphi \in H_E^2(0, 1)$  and after integrating twice by parts and using the conditions (2.5)–(2.6), we obtain:

$$(2.7) \quad a(w, \varphi) = L(\varphi)$$

where

$$\begin{aligned}
 a(w, \varphi) &= \int_0^1 \rho(x)w\varphi dx + \int_0^1 (EI(x)w_{xx}) \varphi_{xx} dx + \alpha w_x(1)\varphi_x(1) + \beta w(1)\varphi(1) \\
 L(\varphi) &= \int_0^1 \rho(x)(g + f)\varphi dx + 2\mu_{11}v(1)\varphi_x(1) + \mu_{12}v_x(1)\varphi_x(1) + \mu_{21}v(1)\varphi(1) \\
 &+ 2\mu_{22}v_x(1)\varphi(1).
 \end{aligned}$$

We easily show that, for all  $\varphi \in H_E^2(0, 1)$ , the bilinear form  $a(., .)$  is continuous, coercive and the linear form  $L(.)$  is continuous on  $H_E^2(0, 1)$ .

Thus, according to the Lax-Milgram theorem, there exists a unique solution  $w \in H^4(0, 1) \cap H_E^2(0, 1)$  for (2.7). Then the operator  $A$  is maximal.

Next, the domain  $D(A)$  is clearly dense in  $\mathcal{H}$  and the operator is closed.

Finally, we prove that  $A^{-1}$  exists. For any  $\Psi = (g_1, g_2)^T$ , we need to find a unique  $\Phi = (f_1, f_2)^T \in D(A)$  such that  $A\Phi = \Psi$  which yields

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= g_1(x), \quad g_1 \in H_E^2(0, 1) \\
 (EI(x)(f_1)_{xx})_{xx} &= -\rho(x)g_2(x), \quad g_2 \in L^2(0, 1) \\
 f_1(0) &= (f_1)_x(0) = 0 \\
 -EI(1)(f_1)_{xx}(1) &= 2\mu_{11}g_1(1) + \mu_{12}(g_1)_x(1) + \alpha(f_1)_x(1) \\
 (EI(\cdot)(f_1)_{xx}(\cdot))_x(1) &= \mu_{21}g_1(1) + 2\mu_{22}(g_1)_x(1) + \beta(f_1)(1).
 \end{aligned}$$

A direct computation shows that the above solution is given by:

$$\left\{ \begin{aligned}
 f_2(x) &= g_1(x), \\
 f_1(x) &= \int_0^x \int_0^s \left[ -\beta f_1(1) \frac{1-\xi}{EI(\xi)} - \alpha(f_1)_x(1) \frac{1}{EI(\xi)} - \frac{1}{EI(\xi)} \int_\xi^1 \int_\eta^1 \rho(x)g_2(x)drd\eta \right. \\
 &\quad \left. - (\mu_{21}g_1(1) + 2\mu_{11}(g_1)_x(1)) \frac{1-\xi}{EI(\xi)} - (2\mu_{11}g_1(1) + \mu_{12}(g_1)_x(1)) \frac{1}{EI(\xi)} \right] d\xi ds.
 \end{aligned} \right.$$

Thus,  $A^{-1}$  exists and is bounded on  $\mathcal{H}$ . Furthermore, the Sobolev embedding theorem implies that  $A^{-1}$  is compact on  $\mathcal{H}$ . □

Now according to Lumer-Phillips theorem (see [13]), the statement of the theorem follows.

**Theorem 2.2.** (2.3) has a unique mild solution  $y(t) = S(t)y_0 \in C([0; \infty); \mathcal{H})$  for all  $y_0 \in \mathcal{H}$ .

**2.2. Stability in the sense of Lyapunov of (2.3).** The idea of this part is that if there exists a functional  $\mathcal{V} \geq 0$  on Hilbert space  $\mathcal{H}$  such that  $\frac{d}{dt}\mathcal{V} \leq 0$  (the generalized time derivative of  $\mathcal{V}$ ) and the set  $\{x : \mathcal{V}(x) = 0\}$  does not contain any complete negative orbit except the trivial one  $x = 0$  then the system is Lyapunov stable.

Notice that the total mechanical energy of the system (1.1)–(1.5) is given by :

$$(2.8) \quad E(t, w) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \rho(x) w_t^2 dx + \int_0^1 EI(x) w_{xx}^2 dx + \alpha w_x^2(1) + \beta w^2(1) \right).$$

The time derivative of the energy function  $E(t)$  along the classical solutions of (1.1)–(1.5) is

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} E(t, w) = -2(\mu_{22} + \mu_{11}) w_{tx}(1, t) w_t(1, t) - \mu_{21} w_t^2(1, t) - \mu_{12} w_{tx}^2(1, t) \leq 0.$$

The property of semigroup contractions in Theorem 2.1 implies that  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  is a good candidate for the Lyapunov functional for (2.3).

Let the functional  $\mathcal{V} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  defined as follows

$$(2.10) \quad \mathcal{V}(y) = \|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 EI(x) w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) w_t^2 dx + \frac{1}{2} \alpha w_x^2(1, t) + \frac{1}{2} \beta w^2(1, t).$$

Analogously as in (2.9), for all classical solutions  $y$  it follows that:

$$(2.11) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{V}(y) = \frac{d}{dt} \|y\|_{\mathcal{H}}^2 = -2(\mu_{22} + \mu_{11}) w_{tx}(1, t) w_t(1, t) - \mu_{21} w_t^2(1, t) - \mu_{12} w_{tx}^2(1, t) \leq 0.$$

So, the time evolution of the Lyapunov functional along the classical solutions is non-increasing. Furthermore, from Theorem 2.1, the decay of energy along the classical solutions can be extended to mild solutions. Hence,  $\mathcal{V}$  is the Lyapunov functional for (2.3). The system (2.3) is stable in the sense of Lyapunov. Now, applying LaSalle's invariance principle [10], the stability result is enunciated as follows:

**Theorem 2.3.** *Assume that  $y(t)$  is the mild solution of (2.3) for all  $y_0 \in \mathcal{H}$ . Then  $y(t) \rightarrow 0 \in \mathcal{H}$  when  $t \rightarrow \infty$ .*

## 3. EXISTENCE, UNIQUENESS AND HIGHER REGULARITY OF THE WEAK SOLUTION

Before defining the weak solution of the boundary problem, let's define what is called "intermediate spaces" (see [9]), which spaces will be useful in the following.

Let  $X$  and  $Y$  two hilbert spaces. Let  $\langle, \rangle_X$  and  $\langle, \rangle_Y$  be the inner products in  $X$  and  $Y$  respectively.  $X$  is densely embedded in  $Y$  and suppose that the canonical injection of  $X$  into  $Y$  is continuous. The space  $X$  may be defined as the domain of an operator  $\Lambda$  which is self-adjoint, positive and unbounded in  $Y$ . The norm in  $X$  being equivalent to the norm of the graph

$$(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in D(\Lambda) = X.$$

We denote by  $D(S)$  the set of elements  $u$  such that the antilinear form

$$v \mapsto \langle u, v \rangle_X, \quad v \in X$$

is continuous in the induced topology by  $Y$ . Then

$$(3.1) \quad \langle u, v \rangle_X = \langle Su, v \rangle_Y,$$

which defines  $S$  as an unbounded operator in  $Y$ , with domain  $D(S)$ , dense in  $Y$ .  $S$  is a self-adjoint and strictly positive operator. Indeed, there exists a constant  $M$  such that

$$\langle Sv, v \rangle_Y = \|v\|_X^2 \geq M\|v\|_Y^2.$$

Using the spectral decomposition of self-adjoint operators, for  $\theta$  real or complex, the powers  $S^\theta$  of  $S$ , may be defined. In particular, we take  $\theta = \frac{1}{2}$  and we shall use the fractional space

$$(3.2) \quad \Lambda = S^{\frac{1}{2}}.$$

The operator  $\Lambda$  is self-adjoint and positive in  $Y$ , with domain  $X$ . From (3.1)–(3.2), we deduce

$$\langle u, v \rangle_X = \langle \Lambda u, \Lambda v \rangle_Y, \quad \forall u, v \in X.$$

We give the following definition of the intermediate spaces  $[X, Y]_\theta$  :

**Definition 3.1.** Let  $X$  and  $Y$  be two Hilbert spaces that we assume to be separable with  $X \subset Y$ ,  $X$  being dense in  $Y$  with continuous injection and  $\Lambda$  defined by (3.2). The intermediate space  $[X, Y]_\theta$  is defined by

$$[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

with  $D(\Lambda^{1-\theta})$  the domain of  $\Lambda^{1-\theta}$  and the norm of  $[X, Y]_\theta$  equal norm of the graph of  $\Lambda^{1-\theta}$  i.e.  $(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\theta}u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}$ .

From the properties of the spectral decomposition, we immediately have that  $X$  is dense in  $[X, Y]_\theta$ . Furthermore, according to the duality theorem, we have for all  $\theta \in ]0, 1[$ ,  $[X, Y]_\theta' = [Y', X']_{1-\theta}$ . In the next paragraph, we arbitrarily choose  $\theta = \frac{1}{2}$ .

**3.1. Definition of weak solution.** Let  $\phi \in H_E^2(0, 1)$ . Multiplying (1.1) by  $\phi$ , integrating twice by parts over  $(0, 1)$  and using (1.2)–(1.4), we have the following identity:

$$(3.3) \quad \int_0^1 \rho(x)w_{tt}\phi dx + \int_0^1 EI(x)w_{xx}\phi_{xx}dx + \alpha w_x(1)\phi_x(1) + \beta w(1)\phi(1) \\ + 2\mu_{11}w_t(1)\phi_x(1) + \mu_{12}w_{xt}(1)\phi_x(1) + \mu_{21}w_t(1)\phi(1) + 2\mu_{22}w_{xt}(1)\phi(1) = 0.$$

In order to give the definition of the weak solution, we will adapt the ideas of the authors H.T. Banks et al [2] and Evans [7] to the problem (1.1)–(1.5).

We build the following functional spaces:

$$X = \mathbb{R}^2 \times H_E^2(0, 1) = \left\{ \widehat{\phi} = (\phi(1), \phi_x(1), \phi), \phi \in H_E^2(0, 1) \right\}$$

and

$$Y = \mathbb{R}^2 \times L^2(0, 1) = \left\{ \widehat{z} = (z(1), z_x(1), z), z \in L^2(0, 1) \right\}$$

with the following respect inner product

$$\langle \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \rangle_X = \langle (\phi_1)_{xx}, (\phi_2)_{xx} \rangle_{L^2(0,1)} \quad \text{and} \quad \langle \widehat{z}_1, \widehat{z}_2 \rangle_Y = \langle \rho z_1, z_2 \rangle_{L^2(0,1)}.$$

We notice that  $X$  is densely embedded in  $Y$  and suppose that the canonical injection of  $X$  into  $Y$  is continuous. Therefore, we obtain a Gelfand triple :  $X \subset Y \equiv Y' \subset X'$  where  $X'$  is the dual of  $X$  and  $Y'$  the dual of  $Y$ . Consider the bilinear forms  $a^{(1)} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  and  $a^{(2)} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  defined as follows:

$$a^{(1)} \left( \widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \right) = \langle EI\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2 \rangle_X + \alpha(\phi_1)_x(1)(\phi_2)_x(1) + \beta\phi_1(1)\phi_2(1)$$

$$a^{(2)} \left( \widehat{z}_1, \widehat{z}_2 \right) = 2\mu_{11}z_1(1)(z_2)_x(1) + \mu_{12}(z_1)_x(1)(z_2)_x(1) + \mu_{21}z_1(1)z_2(1) + 2\mu_{22}(z_1)_x(1)z_2(1).$$

We can now define the weak solution. In it, note that  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X'}$  represents the duality pairing between  $X$  and  $X'$ .



**Definition 3.2.** Let  $T > 0$  be fixed. We say that  $\hat{w} = (w(1), w_x(1), w)$  is a weak solution of problem (1.1) – (1.5) on  $(0, 1)$  if

$$\hat{w} \in L^2(0, T; X) \quad \text{with} \quad \hat{w}_t \in L^2(0, T; Y), \quad \hat{w}_{tt} \in L^2(0, T; X')$$

and satisfies

$$(3.4) \quad \langle \hat{w}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{X, X'} + a^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi}) = 0$$

almost everywhere on  $t \in (0, T)$  and for all  $\hat{\phi} \in H_E^2(0, 1)$ , with the following initial conditions

$$(3.5) \quad \hat{w}(0) = \hat{w}_0 = (w_0(1), (w_0)_x(1), w_0) \in X,$$

$$(3.6) \quad \hat{w}_t(0) = \hat{v}_0 = (v_0(1), (v_0)_x(1), v_0) \in Y.$$

**Remark 3.1.** In the Definition 3.2, notice that the assumptions  $\hat{w} \in L^2(0, T; X)$  and  $\hat{w}_t \in L^2(0, T; Y)$  implies that  $\hat{w} \in C\left([0, T], [X, Y]_{\frac{1}{2}}\right)$  after, possibly, a modification on a set of measure zero (see [9]). This gives meaning to the initial conditions (3.5)–(3.6).

For the proof of the existence of the weak solution, we will need the following lemma whose proof appears in [5, 11]:

**Lemma 3.1.** Let  $H_E^2(0, 1)$  be a subspace of  $H^2(0, 1)$ . Then there exists a infinite sequence of functions  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  such that  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  is an orthogonal basis of  $H_E^2(0, 1)$  and  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  is an orthonormal basis of  $L^2(0, 1)$ .

### 3.2. Existence of the weak solution.

**Theorem 3.1.** There exists a weak solution  $\hat{w}$  of weak formulation (3.4)–(3.6) such that

$$(3.7) \quad \hat{w} \in L^\infty(0, T; X)$$

$$(3.8) \quad \hat{w}_t \in L^\infty(0, T; Y)$$

$$(3.9) \quad \hat{w} \in C\left([0, T], [X, Y]_{\frac{1}{2}}\right)$$

$$(3.10) \quad \hat{w}_t \in C\left([0, T], [X, Y]_{\frac{1}{2}}'\right).$$

*Proof.* This proof is based on the Faedo-Galerkin’s method. According to Lemma 3.1, there exists by extension an infinite sequence of functions  $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$  that is an orthogonal basis for  $X$  and an orthonormal basis for  $Y$ . Consider such a

sequence. Introduce the following finite dimensional spaces spanned by  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$  defined as

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \hat{V}_m := \text{span} \left\{ \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_m \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{\phi}_j, \quad \text{with } \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

### Step 1 : Construction of approximate solutions

We seek  $\hat{w} = \hat{w}_m(t) \in \hat{V}_m$  the approximate solution of the problem in the form:

$$\hat{w}_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \hat{\phi}_i$$

where  $g_{im}(t) \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq t \leq T$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) are the solutions of the weak formulation (3.3) on  $\hat{V}_m$ . So for a fixed integer  $m$ , we have:

$$(3.11) \quad \langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{w}_m, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi}) = 0, \quad \forall \hat{\phi} \in \hat{V}_m$$

with the initial conditions:

$$(3.12) \quad \hat{w}_m(0) = \hat{w}_{m0}, \quad \hat{w}_{m0} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \hat{\phi}_i \longrightarrow \hat{w}_0 \text{ in } X \text{ when } m \longrightarrow \infty,$$

$$(3.13) \quad (\hat{w}_m)_t(0) = \hat{v}_m(0), \quad \hat{v}_m(0) = \hat{v}_{m0}, \quad \hat{v}_{m0} = \sum_{i=1}^m \beta_{im} \hat{\phi}_i \longrightarrow \hat{v}_0 \text{ in } Y \text{ when } m \longrightarrow \infty$$

with  $\alpha_{im} = g_{im}(0)$  and  $\beta_{im} = (g_{im})_t(0)$ .

Thus, according to the general results on the systems of the second order differential equations, one is assured of the existence of a solution  $\hat{w}_m \in C^2([0; T], X)$  of (3.11) – (3.13), for  $0 \leq t \leq T$ .

### Step 2 : A-priori estimates on approximate solutions

Let  $\hat{E} : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$  the energy functional for the trajectory  $\hat{w}$  analogous to that defined by the expression of the Lyapunov functional (2.10).

$$\hat{E}(t, \hat{w}) = \frac{1}{2} \int_0^1 EI(x) \hat{w}_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho(x) \hat{w}_t^2 dx + \frac{1}{2} \alpha \hat{w}_x^2(1, t) + \frac{1}{2} \beta \hat{w}^2(1, t)$$

$$\hat{E}(t, \hat{w}) = \|(\hat{w}, v)\|_{\mathcal{H}}.$$

Assuming that there exists a solution  $\hat{w}_m \in C^2([0; \tau], \hat{V}_m)$  to (3.11) on some interval  $[0; \tau]$ . Let's take  $(\hat{w}_m)_t = \hat{\phi}$  in (3.11), we obtain

$$\langle (\hat{w}_m)_{tt}, (\hat{w}_m)_t \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{w}_m, (\hat{w}_m)_t) + a^{(2)}((\hat{w}_m)_t, (\hat{w}_m)_t) = 0$$

and

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(t, \hat{w}_m) \leq 0$$

for all  $t \in [0, \tau]$ . So we have uniform boundedness of the solution on  $[0, \tau]$  :

$$\hat{E}(t, \hat{w}_m) \leq \hat{E}(0, \hat{w}_{m0}), \quad t \geq 0$$

which implies that :

$$(3.14) \quad \{\hat{w}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ is bounded in } C([0, T]; X)$$

$$(3.15) \quad \{(\hat{w}_m)_t\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ is bounded in } C([0, T]; Y).$$

We further to show that  $\{(\hat{w}_m)_{tt}\}_{m \in \mathbb{N}}$  is bounded.

Let  $m$  be fixed. We Consider  $\hat{\phi} \in X$  and  $\hat{\phi} = \hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2$  such that  $\hat{\phi}_1 \in \hat{V}_m$  and  $\hat{\phi}_2$  orthogonal to  $\hat{V}_m$  in  $Y$ . Hence  $\langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\phi}_1 \rangle_Y = 0$ . From (3.11), we have:

$$\langle (\hat{w}_m)_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y = -a^{(1)}(\hat{w}_m, \hat{\phi}) - a^{(2)}((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi}) \leq M \|\hat{\phi}_1\|_X \leq M \|\hat{\phi}\|_X,$$

where  $M$  is a positive constant which does not depend on  $m$ . This implies that

$$\{(\hat{w}_m)_{tt}\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ is bounded in } C([0, T]; X').$$

### Step 3 : Passage to the limit

According to the Eberlein-Smulian Theorem [6], we can extract weakly convergent subsequences  $\{\hat{w}_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $\{(\hat{w}_{m_l})_t\}_{l \in \mathbb{N}}$  and  $\{(\hat{w}_{m_l})_{tt}\}_{l \in \mathbb{N}}$  and  $\hat{w} \in L^2(0, T; X)$ ,  $\hat{w}_t \in L^2(0, T; Y)$ ,  $\hat{w}_{tt} \in L^2(0, T; X')$  such that:

$$(3.16) \quad \{\hat{w}_{m_l}\} \rightharpoonup \hat{w} \text{ in } L^2(0, T; X)$$

$$(3.17) \quad \{(\hat{w}_{m_l})_t\} \rightharpoonup \hat{w}_t \text{ in } L^2(0, T; Y)$$

$$(3.18) \quad \{(\hat{w}_{m_l})_{tt}\} \rightharpoonup \hat{w}_{tt} \text{ in } L^2(0, T; X').$$

Let  $m_0 \in \mathbb{N}$ . For all functions  $\hat{\phi} \in L^2(0, T; \hat{V}_{m_0})$  of the form

$$(3.19) \quad \hat{\phi}(x, t) = \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j(t) \phi_j(x)$$

where  $\alpha_j \in L^2(0, T; \mathbb{R})$  and for all  $m_l \geq m_0$ , the formulation (3.11) becomes:

$$(3.20) \quad \int_0^T [\langle (\hat{w}_{m_l})_{tt}, \hat{\phi} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{w}_{m_l}, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{w}_{m_l})_t, \hat{\phi})] dt = 0.$$

Therefore, passing on to the limit in (3.20) for  $m = m_l$  when  $l \rightarrow \infty$  and using the convergence results (3.16)–(3.18), one obtains:

$$(3.21) \quad \int_0^T [\langle \hat{w}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{X, X'} + a^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi})] dt = 0.$$

Then  $\langle (\hat{w})_{tt}, \hat{\phi} \rangle + a^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi}) = 0$  a.e on  $[0, T]$  for all  $\hat{\phi} \in L^2(0, T; X)$ . The functions  $\hat{\phi}$  of the form (3.19) are dense in  $L^2(0, T; X)$ . So (3.21) is well defined for all  $\hat{\phi} \in L^2(0, T; X)$ . We thus obtain the expression of the weak formulation almost everywhere on  $[0, T]$ .  $\hat{w}$  is well the solution of (3.3).

Regarding additional regularities, we have that  $\hat{w}$  follows the regularity (3.7)–(3.8), by definition of weak solution and the important results (3.14)–(3.15).  $\square$

In addition, note that (3.9) follows directly from Remark 3.1 after possible modification on a set of measures zero and the regularity of (3.10) is deduced from Remark 3.1 and from the previous duality theorem.

**3.3. Uniqueness of the Weak Solution.** Let us state the following theorem on the uniqueness of the solution for the weak formulation.

**Theorem 3.2.** *The weak formulation (3.4) with the conditions (3.5) – (3.6) has a unique solution  $\hat{w}$ .*

*Proof.* This proof is an adaptation of proof of Theorem 8.1 pp. 290 – 291 in [9]. First let us show that the solution  $\hat{w}$  satisfies the conditions (3.5)–(3.6). Let  $\hat{\phi} \in C^2([0, T], X)$  such that  $\hat{\phi}(T) = 0$  and  $\hat{\phi}_t(T) = 0$ . Integrating the identity (3.4) over  $[0, T]$ , we get:

$$\int_0^T [\langle \hat{w}_{tt}, \hat{\phi} \rangle_{X, X'} + a^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi})] d\tau = 0.$$

By integrating by parts over  $[0, T]$  under the duality pairing, we have:

$$(3.22) \quad \int_0^T [\langle \hat{w}, \hat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + a^{(2)}(\hat{w}_t, \hat{\phi})] d\tau = \langle \hat{w}_t(0), \hat{\phi}(0) \rangle_{X, X'} - \langle \hat{w}(0), \hat{\phi}_t(0) \rangle_Y.$$

Similarly, for a fixed  $m$ , it follows by integrating twice by parts (3.11):

$$(3.23) \quad \int_0^T [\langle \hat{w}_m, \hat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{w}_m, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{w}_m)_t, \hat{\phi})] d\tau = \langle \hat{v}_{m0}, \hat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \hat{w}_{m0}, \hat{\phi}_t(0) \rangle_Y.$$

Using (3.12)–(3.13) with (3.16)–(3.18), and passing to the limit in (3.23) along the convergent subsequence  $\{\hat{w}_{m_i}\}$ , this gives:

$$(3.24) \quad \int_0^T \left[ \langle \hat{w}, \hat{\phi}_{tt} \rangle_Y + a^{(1)}(\hat{w}, \hat{\phi}) + a^{(2)}((\hat{w})_t, \hat{\phi}) \right] d\tau = \langle \hat{v}_0, \hat{\phi}(0) \rangle_Y - \langle \hat{w}_0, \hat{\phi}_t(0) \rangle_Y.$$

Comparing (3.24) with (3.22), we have  $\hat{w}(0) = \hat{w}_0$  and  $\hat{v}_0 = \hat{w}_t(0)$ . Thus the initial conditions are satisfied.

Let us now show the uniqueness of the weak solution of (3.4).

Let  $0 < s < T$  be fixed and introduce an auxiliary function:

$$\hat{\psi} : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \hat{\psi}(t) = \begin{cases} \int_t^s \hat{w}(\tau) d\tau, & 0 < t < s \\ 0, & t \geq s. \end{cases}$$

By replacing  $\hat{\phi}$  by  $\hat{\psi}$  in (3.4) and by integrating by parts on  $]0, T[$ , we obtain

$$\int_0^s \left[ \langle \hat{w}_t(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle_Y - a^{(1)}(\hat{\psi}_t(\tau), \hat{\psi}(\tau)) + a^{(2)}(\hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau)) \right] d\tau = 0$$

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \langle \hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle_Y - \frac{1}{2} a^{(1)}(\hat{\psi}(\tau), \hat{\psi}(\tau)) \right] d\tau = - \int_0^s a^{(2)}(\hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau)) d\tau.$$

This is equivalent to

$$\left[ \frac{1}{2} \langle \hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau) \rangle_Y - \frac{1}{2} a^{(1)}(\hat{\psi}(\tau), \hat{\psi}(\tau)) \right]_0^s = - \int_0^s a^{(2)}(\hat{w}(\tau), \hat{w}(\tau)) d\tau.$$

Therefore,

$$\frac{1}{2} \|\hat{w}(s)\|_Y + \frac{1}{2} a^{(1)}(\hat{\psi}(0), \hat{\psi}(0)) \leq 0.$$

The bilinear form  $a^{(1)}(\cdot, \cdot)$  is coercive. Hence  $\hat{w}(s) \equiv 0$  et  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Since  $s \in ]0, T[$  was arbitrary then  $\hat{w} \equiv 0$ . □

**3.4. Higher regularity results.** Before showing the theorem of higher regularity (Theorem 3.3) of the weak solution  $\hat{w}$  solving (3.4)-(3.6), let's state a following lemma which is proved in [9].

**Lemma 3.2.** *Let  $X$  and  $Y$  two Banach spaces,  $X \subset Y$  with continuous injection, the space  $X$  being reflexive. We set:*

$$C_w([0, T]; Y) = \left\{ w \in L^\infty(0, T; Y) : t \longrightarrow \langle f, w(t) \rangle \text{ is continuous on } [0, T], \forall f \in Y' \right\}$$

which denotes the space of weakly continuous functions with values in  $Y$ . Thus we get

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_w([0, T]; Y) = C_w([0, T]; X).$$

**Theorem 3.3.** *After, possibly, a modification on a set of measure zero, the weak solution  $\hat{w}$  of (3.4)-(3.6) satisfies*

$$\begin{aligned}\hat{w} &\in C([0, T]; X) \\ \hat{w}_t &\in C([0, T]; Y).\end{aligned}$$

*Proof.* This proof is an adaption of standard strategies in section 8.4 of [9] pp. 297 – 301 and in section 2.4 of [14].

Considering Lemma 3.2, it follows from (3.7) and (3.9) that  $\hat{w} \in C_w([0, T]; X)$ . Similarly (3.8) and (3.10) imply  $\hat{w}_t \in C_w([0, T]; Y)$ .

Let  $\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$  a scalar cutoff function such that  $\xi(x) = 1$  if  $x \in J \subset\subset [0, T]$  and  $\xi(x) = 0$  else. Then the function  $\xi\hat{w}$  is then compactly supported. Let  $\eta^\varepsilon$  be a standard mollifier in time. Using convolutional regulation of distributions, we define

$$\hat{w}^\varepsilon = \eta^\varepsilon * \xi\hat{w} \in C_c^\infty(\mathbb{R}, X).$$

$\hat{w}^\varepsilon$  converges to  $\hat{w}$  in  $X$  and  $\hat{w}_t^\varepsilon$  converges to  $\hat{w}_t$  in  $X$  almost everywhere on  $J$ . Hence,  $\hat{E}(t, \hat{w}^\varepsilon)$  converges to  $\hat{E}(t, \hat{w})$  almost everywhere on  $J$ . Since  $\hat{w}^\varepsilon$  is smooth, we obtain by a straightforward calculation on  $J$ :

(3.25)

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(t, \hat{w}^\varepsilon) = -2(\mu_{11} + \mu_{22}) \left[ \frac{d}{dt}\hat{w}_x^\varepsilon(t) \cdot \frac{d}{dt}\hat{w}^\varepsilon(t) \right] - \mu_{12} \left[ \frac{d}{dt}\hat{w}_x^\varepsilon(t) \right]^2 - \mu_{21} \left[ \frac{d}{dt}\hat{w}^\varepsilon(t) \right]^2.$$

Passing to the limit in (3.25) as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , we obtain:

(3.26)

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(t, \hat{w}) = -2(\mu_{11} + \mu_{22}) \left[ \frac{d}{dt}\hat{w}_x(t) \cdot \frac{d}{dt}\hat{w}(t) \right] - \mu_{12} \left[ \frac{d}{dt}\hat{w}_x(t) \right]^2 - \mu_{21} \left[ \frac{d}{dt}\hat{w}(t) \right]^2$$

in the sense of distributions on  $J$ . (3.26) holds on all compact subintervals of  $[0, T]$ , since  $J$  was arbitrary.

Let  $t \in [0, \infty[$  be fixed and  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequence such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ . Let  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be defined by

$$\nu_n = \frac{1}{2} \|\hat{w}_t(t) - \hat{w}_t(t_n)\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|\hat{w}(t) - \hat{w}(t_n)\|_X^2 + \frac{\alpha}{2} [\hat{w}_x(t) - \hat{w}_x(t_n)]^2 + \frac{\beta}{2} [\hat{w}(t) - \hat{w}(t_n)]^2.$$

Then

$$(3.27) \quad \nu_n = \hat{E}(t, \hat{w}) + \hat{E}(t_n, \hat{w}) - \langle \hat{w}_t(t), \hat{w}_t(t_n) \rangle_Y - \langle \hat{w}(t), \hat{w}(t_n) \rangle_X - \alpha \hat{w}_x(t) \hat{w}_x(t_n) - \beta \hat{w}(t) \hat{w}(t_n).$$

Since  $\hat{w}, \hat{w}_t$  are weakly continuous and  $\hat{E}$  is continuous in  $t$ , we have, passing to the limit in (3.27):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = 0.$$

Therefore, this implies that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{w}_t(t) - \hat{w}_t(t_n)\|_Y^2 = 0 \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{w}(t) - \hat{w}(t_n)\|_X^2 = 0.$$

Finally,  $\hat{w} \in C([0, T]; X)$  and  $\hat{w}_t \in C([0, T]; Y)$ . □

#### 4. SEMI-DISCRETE SCHEME BY THE FINITE ELEMENT METHOD (FEM)

**4.1. Piecewise Cubic Hermite Polynomials.** In this subsection, we recall the construction of these functions as for example in [5, 15] and another references.

We construct an appropriate piecewise space of  $C^1$ -functions on  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ . Let us start with the reference domain  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  where  $\Omega = (0, 1)$ . We first introduce the local nodal basis functions on the reference domain (see Figure 1) defined by

$$(4.1) \quad N_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad N_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi,$$

$$(4.2) \quad N_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad N_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2.$$

We need to use the Hermite cubic nodal basis functions in an arbitrary interval rather than the reference interval  $[0, 1]$ . This can be done by transforming our formulas in (4.1)-(4.2) to an arbitrary interval, for example  $[x_l; x_r]$  with the function  $\zeta : [x_l, x_r] \rightarrow [0, 1]$  as  $\zeta(x) = \frac{x-x_l}{x_r-x_l}$ . This leads to functions  $\psi_i : [x_l, x_r] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , defined as

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= N_1(\zeta(x)), & \psi_2(x) &= (x_r - x_l) (N_2(\zeta(x))) \\ \psi_3(x) &= N_3(\zeta(x)), & \psi_4(x) &= (x_r - x_l) (N_4(\zeta(x))). \end{aligned}$$

Notice that the nodal value of  $\psi_i(x)$  is equal the nodal value of  $N_i(x)$  for  $i = 1, 2, 3, 4$ , and  $\psi_i(x)$  preserves the properties of the Hermite cubic nodal basis functions.

Let  $n$  be a fixed integer and let us introduce a partition of  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  defined by  $\Omega_h = \cup_{m=1}^{n-1} Z_m$  where  $Z_m = [x_m; x_{m+1}]$  for  $m = 1, 2, \dots, n-1$ , is called an element of this partition, and we assume that these elements are formed by node points  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ , with  $n-1$  being the number of elements. Notice that, if the subdivision is uniform, let us denote the step length by  $h = 1/n$  and  $Z_m = [mh; (m+1)h] = [x_m; x_{m+1}]$ .

For each element of  $Z_m$ , we will use the notation  $\psi_{m,i} = [x_m; x_{m+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , to denote the Hermite cubic local nodal basis functions defined over this element. At each node  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , we define two global nodal basis functions as follows.

At  $x_1$ , we define

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [x_1; x_2] \\ \psi_{1,1}(x) & \text{if } x \in [x_1; x_2] \end{cases} \quad \phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [x_1; x_2] \\ \psi_{1,2}(x) & \text{if } x \in [x_1; x_2]. \end{cases}$$

At  $x_m$ ,  $m = 2, 3, \dots, n-1$ , we define

$$\phi_{2m-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [x_{m-1}; x_{m+1}] \\ \psi_{m-1,3}(x) & \text{if } x \in [x_{m-1}; x_m] \\ \psi_{m,1}(x) & \text{if } x \in [x_m; x_{m+1}] \end{cases}, \quad \phi_{2m}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [x_{m-1}; x_{m+1}] \\ \psi_{m-1,4}(x) & \text{if } x \in [x_{m-1}; x_m] \\ \psi_{m,2}(x) & \text{if } x \in [x_m; x_{m+1}]. \end{cases}$$

And at  $x_n$ , we define

$$\phi_{2n-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [x_{n-1}; x_n] \\ \psi_{n-1,3}(x) & \text{if } x \in [x_{n-1}; x_n] \end{cases}, \quad \phi_{2n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [x_{n-1}; x_n] \\ \psi_{n-1,4}(x) & \text{if } x \in [x_{n-1}; x_n]. \end{cases}$$

Thus, the nodal value for  $\phi_m(x_j)$  for  $m = 1, 2, \dots, 2n$  and  $j = 1, 2, \dots, n$  is given as follows:

$$\phi_{2i-1}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_j \neq x_i \\ 1 & \text{if } x_j = x_i \end{cases} \quad \phi_{2i}(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_j \neq x_i \\ 1 & \text{if } x_j = x_i \end{cases}$$

for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Notice that the nodal values for  $\phi_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2n-1, 2n$  are carried from the properties of the Hermite cubic local nodal basis functions  $\psi_{m,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Here, we plot the standard Hermite cubic global basis functions with nodes  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.2$  and  $x_3 = 0.4$  on the domain  $[0, 1]$  to give a visualization of these global basis functions (see Figure 2).



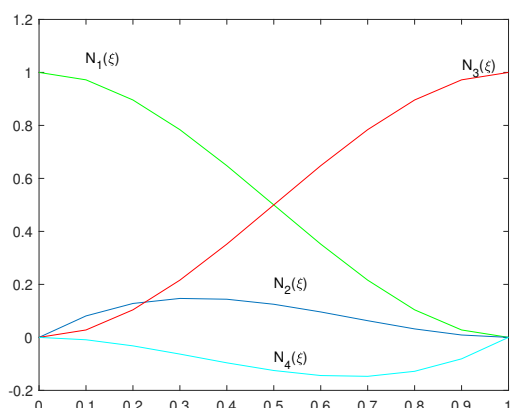


FIGURE 1. The standard Hermite cubic local basis functions  $N_i(\xi)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

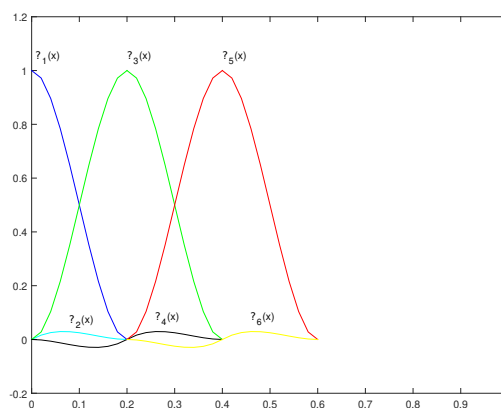


FIGURE 2. First six of the Hermite cubic global basis functions with six nodes partition on  $[0, 1]$ .

Finally, our Hermite cubic finite element space is defined as:

$$S^h = \text{span} \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n-1}, \phi_{2n} \}.$$

With the separation of variables, the approximate solution  $w_h \in S^h$  which we seek can be written as follows:

$$w_h(x, t) = \sum_{i=1}^n [\bar{w}_i(t)\phi_{2i-1}(x) + (\bar{w}_i)_x(t)\phi_{2i}(x)]$$

for  $w_h(1, t) = \bar{w}_{n-1}(t)$  and  $(w_h)_x(1, t) = \bar{w}_n(t)$ .

**4.2. Space discretization.** Let  $X^h$  and  $S^h$  be the respective finite dimension subspaces of  $X$  and  $H_E^2(0, 1)$  such that  $\phi_j, j = 1, \dots, N$  ( with  $N = 2n$  ) be fixed basis for  $S^h$ . We obtain the following approximating problem :

**Problem  $G^h$ :** Find  $\hat{w}_h = (w_h(1), (w_h)_x(1), w_h) \in C^2([0; \infty), X^h)$  or more simply find the last component  $w_h \in C^2([0; \infty), S^h)$  such that for each  $t \in (0; \infty)$

$$(4.3) \quad c((w_h)_{tt}(t), \phi_j) + a((w_h)_t(t), \phi_j) + b(w_h(t), \phi_j) = 0, \quad \phi_j \in S^h$$

with

$$w_h(\cdot, 0) = w_0^h \in S^h \quad \text{and} \quad (w_h)_t(\cdot, 0) = w_1^h \in S^h,$$

where the inner products  $c$  and  $b$  are bilinear forms such as :

$$c((w_h)_{tt}(t), \phi_j) = \int_0^1 \rho(x)(w_h)_{tt}\phi_j dx,$$

$$b(w_h(t), \phi_j) = \int_0^1 EI(x)(w_h)_{xx}(\phi_j)_{xx} dx + \alpha(w_h)_x(1)(\phi_j)_x(1) + \beta(w_h)(1)(\phi_j)(1)$$

and  $a$  is bilinear form such as :

$$a((w_h)_t(t), \phi_j) = 2\mu_{11}(w_h)_t(1)(\phi_j)_x(1) + \mu_{12}(w_h)_{xt}(1)(\phi_j)_x(1) \\ + \mu_{21}(w_h)_t(1)(\phi_j)(1) + 2\mu_{22}(w_h)_{xt}(1)(\phi_j)(1).$$

By separation of variables,  $w_h$  can be written in the form:  $w_h(x, t) = \sum_{i=1}^N \bar{w}_i(t)\phi_i(x)$  with  $w_h(x, 0) = \sum_{i=1}^N \bar{d}_i\phi_i(x)$  and  $(w_h)_t(x, 0) = \sum_{i=1}^N \bar{l}_i\phi_i(x)$  where  $W$ ,  $d$ ,  $l$  are respectively, vector representation of the functions  $w_h$ ,  $w_h(x, 0)$  and  $(w_h)_t(x, 0)$  defined as follows:

$$W = [\bar{w}_1 \quad \bar{w}_2 \quad \dots \quad \bar{w}_n \quad \bar{w}_{1x} \quad \bar{w}_{2x} \quad \dots \quad \bar{w}_{nx}]^T,$$

$$d = [\bar{d}_1 \quad \bar{d}_2 \quad \dots \quad \bar{d}_n \quad \bar{d}_{1x} \quad \bar{d}_{2x} \quad \dots \quad \bar{d}_{nx}]^T,$$

$$l = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \dots \quad \bar{l}_n \quad \bar{l}_{1x} \quad \bar{l}_{2x} \quad \dots \quad \bar{l}_{nx}]^T.$$

Equation (4.3) is equivalent to the following equation:

$$(4.4) \quad MW_{tt} + CW_t + KW = 0, \quad \text{with } W(0) = d \quad \text{and} \quad W_t(0) = l.$$

$M$  is the mass matrix and  $K$  is the rigidity matrix. For all  $i, j = 1, \dots, N$ , the corresponding matrices  $M$ ,  $C$  and  $K$  are given by:

$$M_{i,j} = c(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \rho(x)\phi_i\phi_j dx,$$

$$C_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j) = 2\mu_{11}\phi_i(1)(\phi_j)_x(1) + \mu_{12}(\phi_i)_x(1)(\phi_j)_x(1) + \mu_{21}(\phi_i)(1)(\phi_j)(1) \\ + 2\mu_{22}(\phi_i)_x(1)(\phi_j)(1),$$

$$K_{i,j} = b(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 EI(x)(\phi_i)_{xx}(\phi_j)_{xx} dx + \alpha(\phi_i)_x(1)(\phi_j)_x(1) + \beta(\phi_i)(1)(\phi_j)(1).$$

**Remark 4.1.** *The matrices  $M$  and  $K$  are symmetric, defined and positive therefore  $M$  and  $K$  are invertible. It follows from the theory of linear differential equations that (4.4) has a unique solution. This implies the existence and the uniqueness of the solution of problem  $G^h$ .*

**4.3. A-priori error estimates.** In this subsection, the a-priori error estimates for the semi-discrete solution approximation (4.3) are obtained. We will use a method used in [3, 4] to obtain error estimates.

The projection of weak solution  $w$  to  $S^h$  on  $H_E^2(0, 1)$  denoted by  $w_p$  is such that:

$$b(w - w_p, \phi) = 0 \quad \text{for all } \phi \in S^h.$$

Using the projection, we divide the error  $e_h(t) = w(t) - w_h(t)$  such that  $e_h(t) = e(t) + e_p(t)$  with  $e(t) = w_p(t) - w_h(t)$  and  $e_p(t) = w(t) - w_p(t)$ .

Let us state the following proposition [3] which will be useful in the rest of our work.

**Proposition 4.1.** *Let  $w \in C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$  and  $w_p \in C^2((0, T), S^h)$  then*

$$(4.5) \quad c((e_h)_{tt}(t), \phi) + a((e_h)_t(t), \phi) + b(e(t), \phi) = 0, \quad \text{for all } \phi \in S^h.$$

We set  $H_E^4(0, 1) = \{w \in H^4(0, 1) : w(0) = w_x(0) = 0\}$ . From Proposition 3.2. of [4], we have the following estimations almost every in  $t$ , and where  $C_\Pi$  is a constant:

$$(4.6) \quad \|e_p\|_{H_E^2(0,1)} = \|w - w_p\|_{H_E^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|w\|_{H_E^4(0,1)}$$

$$(4.7) \quad \|(e_p)_t\|_{H_E^2(0,1)} = \|w_t - (w_p)_t\|_{H_E^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|w_t\|_{H_E^4(0,1)}$$

$$(4.8) \quad \|(e_p)_{tt}\|_{L^2(0,1)} = \|w_{tt} - (w_p)_{tt}\|_{L^2(0,1)} \leq C_\Pi h^2 \|w_{tt}\|_{H_E^4(0,1)}.$$

The following lemma gives an estimate of the error  $e(t) = w_p(t) - w_h(t)$ .

**Lemma 4.1.** *Let  $w \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$  then,*

$$(4.9) \quad \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)} + \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)} \leq 4\sqrt{e^{3t}} A_T$$

with

$$A_T = \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)} + 3K \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)} \\ + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{1 + K} \|e(0)\|_{H_E^2(0,1)} + \sqrt{K} \|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)}$$

where  $K$  is a constant.

*Proof.* It is easy to show that the error  $e$  checks the weak formulation (3.3) for all  $\phi_j \in S^h$  or (4.3). Using  $\phi_j = e_t$ , we obtain the energy expression for  $e$  analogously to (2.8):

$$(4.10) \quad E(t, e) = \frac{1}{2}c(e_t(t), e_t(t)) + \frac{1}{2}b(e(t), e(t)) = \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2.$$

From (4.10), and since  $b$  and  $c$  are inner products, we have

$$\frac{d}{dt}E(t, e) = c(e_{tt}(t), e_t(t)) + b(e(t), e_t(t)).$$

Taking  $\phi = e_t$  in (4.5) and considering the fact that  $a(e_t(t), e_t(t)) \geq 0$ , we obtain

$$\frac{d}{dt}E(t, e) \leq -c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) - a((e_p)_t(t), e_t(t)).$$

Thus for all  $t \in (0, T)$ ,

$$(4.11) \quad \int_0^t \frac{d}{dt}E(\cdot, e) \leq - \int_0^t c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) - \int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)).$$

Since  $e_p \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2((0, T); H_E^2(0, 1))$ , then for any  $t \in (0, T)$ ,

$$(4.12) \quad \int_0^t a((e_p)_t(\cdot), e_t(\cdot)) = a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)).$$

Using (4.11) and (4.12) we obtain

$$(4.13) \quad \int_0^t \frac{d}{dt}E(\cdot, e) \leq - \int_0^t c((e_p)_{tt}(t), e_t(t)) \left( a((e_p)_t(t), e(t)) - a((e_p)_t(0), e(0)) - \int_0^t a((e_p)_{tt}(\cdot), e(\cdot)) \right).$$

By integration and using Cauchy Schwarz's inequality, Young's inequality and the fact that  $|a(w, \phi)| \leq K \|w\|_{H_E^2(0,1)} \|\phi\|_{H_E^2(0,1)}$  with  $K = k(\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{21} + \mu_{22})$ ,

(4.13) yields

$$E(t, e) \leq 3 \int_0^t E(\cdot, e) + K_T$$

with

$$K_T = \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,1)}^2 + 8K^2 \max_{t \in [0, T]} \|(e_p)_t(t)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + 8K^2 \int_0^T \|(e_p)_{tt}(\cdot)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + \|e_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + (1 + K)\|e(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2 + K\|(e_p)_t(0)\|_{H_E^2(0,1)}^2.$$

By applying the Gronwall inequality and using the fact that  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , we get the result (4.9).  $\square$

Now, we give an important result for the convergence of the semi-discrete scheme:

**Theorem 4.1.** *Let  $w$  the solution of (3.3). Assume that  $w \in C^1([0, T]; H_E^2(0, 1)) \cap C^2([0, T]; H_E^2(0, 1))$ ,  $w_{tt} \in L^2([0, T]; H_E^4(0, 1))$  and the expressions (4.6)-(4.9). Then, for all  $t \in (0, T)$*

$$\begin{aligned} & \|w(t) - w_h(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_t(t) - (w_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq C_{\Pi} h^2 \left( \|w(t)\|_{H_E^4(0,1)} + \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right) \\ & \quad + 4\sqrt{e^{3t}} C_{\Pi} h^2 \left[ \int_0^T \|w_{tt}(\cdot)\|_{H_E^4(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right. \\ & \quad \left. + 3K \int_0^T \|w_{tt}(\cdot)\|_{H_E^4(0,1)} \right] + 4\sqrt{e^{3t}} \left[ \|w_1^P - w_1^h\|_{L^2(0,1)} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{1+K} \|w_0^P - w_0^h\|_{H_E^2(0,1)} + \sqrt{K} \|w_1 - w_1^P\|_{H_E^2(0,1)} \right]. \end{aligned}$$

Furthermore, if  $w_0^h$  and  $w_1^h$  are respectively Hermite interpolations of  $w_0$  and of  $w_1$ , then :

$$\begin{aligned} & \|w(t) - w_h(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_t(t) - (w_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq C_{\Pi} h^2 \left[ \left( \|w(t)\|_{H_E^4(0,1)} + \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right) \right. \\ & \quad \left. + 4\sqrt{e^{3t}} \left( (T + 3KT) \max_{t \in [0, T]} \|w_{tt}(t)\|_{H_E^4(0,1)} + 3K \max_{t \in [0, T]} \|w_t(t)\|_{H_E^4(0,1)} \right) \right. \\ & \quad \left. + (2 + \sqrt{K}) \|w_1\|_{H_E^4(0,1)} + 2\sqrt{1+K} \|w_0\|_{H_E^4(0,1)} \right]. \end{aligned}$$

*Proof.* We know that

$$\begin{aligned} (4.14) \quad & \|w(t) - w_h(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|w_t(t) - (w_h)_t(t)\|_{L^2(0,1)} \leq \|w(t) - (w_p)(t)\|_{H_E^2(0,1)} \\ & \quad + \|w_t(t) - (w_p)_t(t)\|_{L^2(0,1)} \\ & \quad + \|e(t)\|_{H_E^2(0,1)} + \|e_t(t)\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Using Lemma 4.1, (4.14) and (4.6)-(4.8), we get the Theorem 4.1. □

### 5. NUMERICAL SIMULATIONS

In this section, we show through simulations, the efficiency of the numerical method developed in the previous section.

In what follows, we will take :  $EI = \rho = 1$ .

**5.1. Order of convergence (o.o.c).** In order to verify the order of convergence proved in previous section, simulations are performed for different space discretization steps.

We take  $\alpha = \beta = 10^{-1}$  and  $\mu_{11} = 2, \mu_{22} = 3, \mu_{21} = 5, \mu_{12} = 10$  (according the conditions (1.6)). In following tables, the  $l^2$ -error norms of  $e_h$  are listed. The o.o.c. results are given for fixed  $\Delta t = 10^{-2}$  and varying space discretization step  $h = \frac{1}{2^n}, n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , on the space interval  $[0, 1]$ . The order is calculated using the following formula:

$$(\text{o.o.c.})_i = \log [(e_h)_i / (e_h)_{i-1}] / \log (h_i / h_{i-1}), \quad i = 1, \dots, 5.$$

For the initial conditions, we take two cases:

Case a)  $w_0(x) = -0.6x^2 + 0.4x^3, \quad v_0 \equiv 0$  (table on the left)

Case b)  $w_0(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad v_0 \equiv 0$  (table on the right).

$\Delta t$	$h$	$\ e_h\ _{l^2}$	<i>o.o.c</i>
$10^{-2}$	$\frac{1}{4}$	$3.398 * 10^{-1}$	—
$10^{-2}$	$\frac{1}{8}$	$1.735 * 10^{-1}$	1.2
$10^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$5.28 * 10^{-2}$	1.71
$10^{-2}$	$\frac{1}{32}$	$1.43 * 10^{-2}$	1.88
$10^{-2}$	$\frac{1}{64}$	$3.7 * 10^{-3}$	1.95
$10^{-2}$	$\frac{1}{128}$	$8.95 * 10^{-4}$	2.04

$\Delta t$	$h$	$\ e_h\ _{l^2}$	<i>o.o.c</i>
$10^{-2}$	$\frac{1}{4}$	$8.314 * 10^{-1}$	—
$10^{-2}$	$\frac{1}{8}$	$2.078 * 10^{-1}$	2.0002
$10^{-2}$	$\frac{1}{16}$	$5.19 * 10^{-2}$	2.0014
$10^{-2}$	$\frac{1}{32}$	$1.29 * 10^{-2}$	2.0042
$10^{-2}$	$\frac{1}{64}$	$3.2 * 10^{-3}$	2.0112
$10^{-2}$	$\frac{1}{128}$	$7.61 * 10^{-4}$	2.0704

We thus notice that the choice of the initial conditions have an impact on the speed of convergence.

## 5.2. Energy decay and representation of solution $\widehat{w}(x, t) = (w(1, t), w_x(1, t), w(x, t))$ .

Now, we present the numerical simulation for the case a), the energy decay, tip position  $w(1, t)$ , tip angle  $w_x(1, t)$  and deflection  $w(x, t)$  of the beam over time. Then we discuss according to the values of the different variables,  $\alpha, \beta, \mu_{ij}$ .

**5.2.1. Energy decay.** As for the graphical representation of energy decay, we set firstly  $\alpha = \beta = 0$  and  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{21} = 0$  and we vary  $\mu_{12}$  (see Figure 3). Secondly, we set  $\mu_{12} = 1, \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{21} = 0$  and we vary  $\alpha, \beta$  (so that we always have  $\alpha = \beta$ ) (see Figure 4). These two figures are as follows.

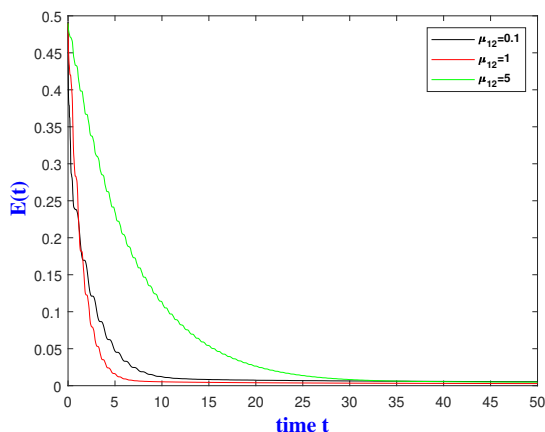


FIGURE 3. Energy for different values of  $\mu_{12}$ .

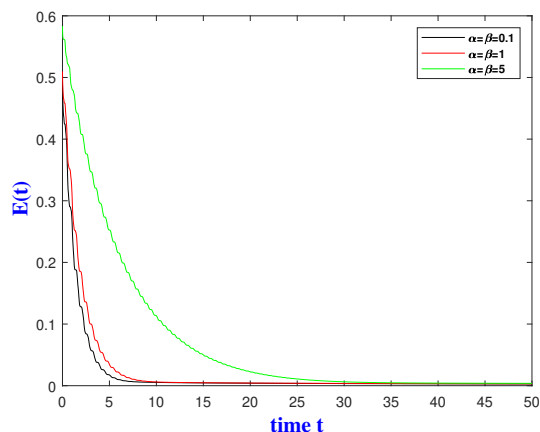


FIGURE 4. Energy for different values of  $\alpha$  and  $\beta$ .

We notice that the choice of these values has an influence on the rate of energy decay.

5.2.2. Representation of each component of the solution  $\hat{w}(x, t)$ . Firstly, we will represent the tip position and tip angle and then the deflection.

**Graphical representation of tip position  $w(1, t)$  and tip angle  $w_x(1, t)$ .**

- We set  $\alpha = \beta = 0$  and  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{21} = 0$ . Then we vary  $\mu_{12}$ .

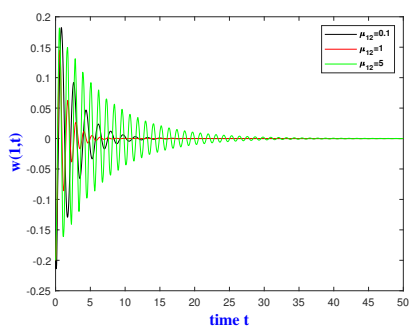


FIGURE 5. Tip position.

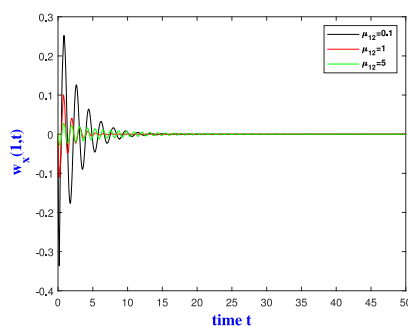


FIGURE 6. Tip angle

- We set  $\mu_{12} = 1$  and  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{21} = 0$ . Then we vary  $\alpha, \beta$  (so that we always have  $\alpha = \beta$ ).

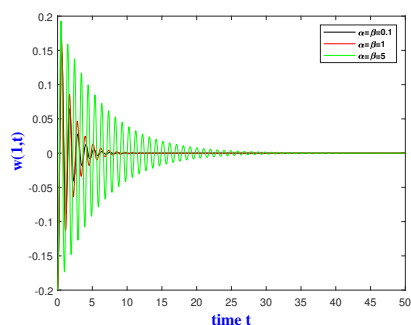


FIGURE 7. Tip position

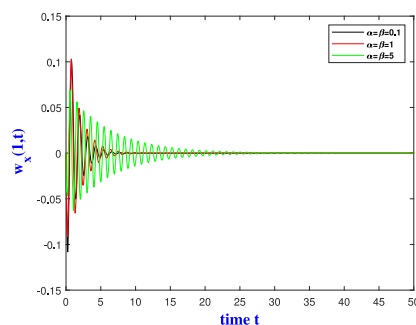
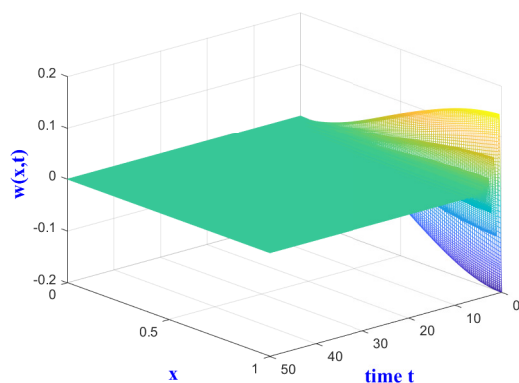
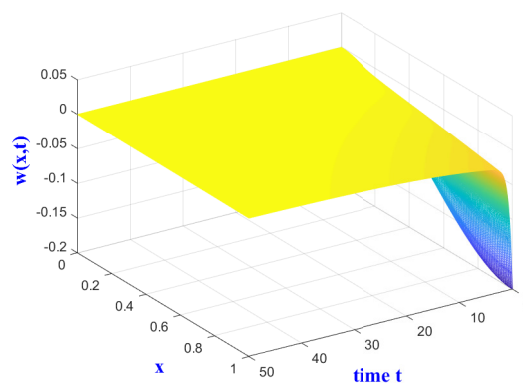


FIGURE 8. Tip angle

**Graphical representation of deflection  $w(x, t)$ :** First, we choose  $\alpha = \beta = 0.1$ ,  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{21} = 0$  and  $\mu_{12} = 1$  (see Figure 9). Next, Figure 10 is obtained with the arbitrary values  $\alpha = \beta = 0.1$  and  $\mu_{11} = 2$ ,  $\mu_{22} = 3$ ,  $\mu_{21} = 5$ ,  $\mu_{12} = 10$ .

FIGURE 9. Deflection  $w(x, t)$ FIGURE 10. Deflection  $w(x, t)$ 

## REFERENCES

- [1] M. D. AOURAGH, N. YEBARI: *Stabilisation exponentielle d'une équation des poutres d'Euler-Bernoulli à coefficients variables*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, **16**(2) (2009), 483–510.
- [2] H. T. BANKS, I. G. ROSEN: *Computational methods for the identification of spatially varying stiffness and damping in beams*, Theory and advanced technology, **3**(1) (1987), 1–32.
- [3] M. BASSON, N. F. J. VAN RENSBURG: *Galerkin finite element approximation of general linear second order hyperbolic equations*, Numer. Func. Anal. Opt., **34**(9) (2013), 976–1000.



- [4] M. BASSON, B. STAPELBERG, N. F. J. VAN RENSBURG: *Error Estimates for Semi-Discrete and Fully Discrete Galerkin Finite Element Approximations of the General Linear Second-Order Hyperbolic Equation*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **38**(4) (2017), 466–485.
- [5] G. J. M. BOMISSO, A. TOURÉ, G. YORO: *Dissipative Numerical Method for a Flexible Euler-Bernoulli Beam with a Force Control in Rotation and Velocity Rotation*, Journal of Mathematics Research, **9**(4) (2017), 30–48.
- [6] H. BREZIS: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [7] L. C. EVANS: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [8] G. H. GOLUB, C. F. V. LOAN : *Computations*, The Johns Hopkins university Press, 1989.
- [9] J. L. LIONS, E. MAGENES: *Problèmes aux limites non homogènes et Applications*, Volume 1, Dunod, 1968.
- [10] Z. H. LUO, B. Z. GUO, O. MORGUL: *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*, Communications and control Engineering series, Springer-Verlag London Ltd, London, 1999.
- [11] M. MILETIC, A. ARNOLD: *A piezoelectric Euler-Bernoulli beam with dynamic boundary control: Stability and dissipative FEM*, arXiv:1507.02542 [math.AP], 2015.
- [12] C. B. MOLER, G. W. STEWART: *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal., **10** (1973), 241–256.
- [13] A. PAZY: *Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, **44**, 1983.
- [14] R. TEMAM: *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, **68**, 1988.
- [15] T. WANG: *A Hermite cubic immersed finite element space for beam design problems*, Thesis, Blacksburg, Virginia, 2005.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUET BOIGNY DE YAMOISSOUKRO  
BP 2444 YAMOISSOUKRO, CÔTE D'IVOIRE  
*Email address:* esaie54v1@gmail.com

UFR SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES  
UNIVERSITÉ NANGUI ABROGOUA D'ABOBO-ADJAMÉ  
02 BP 801 ABIDJAN 02, CÔTE D'IVOIRE  
*Email address:* bogojm@yahoo.fr

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE HOUPHOUET BOIGNY DE YAMOISSOUKRO  
BP 2444 YAMOISSOUKRO, CÔTE D'IVOIRE  
*Email address:* latoureci@gmail.com

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUET BOIGNY DE COCODY  
BP 582 ABIDJAN 22, CÔTE D'IVOIRE  
*Email address:* couliba@yahoo.fr

---

# Bibliographie

- [1] AOURAGH, M. D. ET YEBARI, N., *Stabilisation exponentielle d'une équation des poutres d'Euler-Bernoulli à coefficients variables*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2009.
- [2] BANKS, H. T., AND ROSEN, I. G., *Computational methods for the identification of spatially varying stiffness and damping in beams*, Control theory and advanced technology, Vol. 3, n<sup>o</sup> 1, pp. 1–32, 1987.
- [3] BASSON, M., AND VAN RENSBURG, N. F. J., *Galerkin finite element approximation of general linear second order hyperbolic equations*, Numer. Func. Anal. Opt., Nool. Vol. 34, n<sup>o</sup> 9, pp. 976-1000, 2013.
- [4] BASSON, M., AND STAPELBERG, B., & VAN RENSBURG, N. F. J., *Error Estimates for Semi-Discrete and Fully Discrete Galerkin Finite Element Approximations of the General Linear Second-Order Hyperbolic Equation*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 38, n<sup>o</sup> 4, pp. 466-485, 2017.
- [5] BOMISSO, G. J. M., TOURÉ, A. AND YORO, G., *Dissipative Numerical Method for a Flexible Euler-Bernoulli Beam with a Force Control in Rotation and Velocity Rotation*, Journal of Mathematics Research, Vol. 9, n<sup>o</sup> 4, pp. 30-48, 2017.
- [6] BRENNER, S. C., SCOTT, L. R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, third ed. Springer, New York, 2008.
- [7] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

## Bibliographie

---

- [8] BREZIS, H., *Fonctional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [9] CHAKRAVARTHY, A., EVANS, K. A., AND EVERS, J. , *Sensitivities and functional gains for a flexible aircraft-inspired model*, In American Control Conference (ACC), IEEE, pp. 4893–4898, 2010.
- [10] CHEN, G., KRANTZ, D.W., WAYNE C.E., AND WEST, H. H., *The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation*, Operators Methods for Optimal Control Problems, Editor : S. J. Lee, Marcel Dekker Inc., 1988.
- [11] CONRAD, F., PIERRE, M., *Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback*, Research report INRIA, University of Nancy 1, France, n<sup>o</sup> 1235, 1990.
- [12] DREYFUSS, P., *Introduction à l'analyse des équations de Navier-Stokes*, ellipses, 2012.
- [13] DRONIOU, J., *Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles*, Polyco-  
pié de l'école doctorale de Math-Info à Marseille, disponible depuis l'adresse  
[http ://www-gm3.univmrs.fr/polys](http://www-gm3.univmrs.fr/polys), 2001.
- [14] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society,  
Providence, 1998.
- [15] GOLUB, G. H. AND LOAN, C. F. V., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins  
university Press, 1989.
- [16] GRABOWSKI, P., *Well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems*,  
J. Mathematical system, Estimation and Control, Vol. 6, pp. 121-124, 1996.
- [17] HADAMARD, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential*, Yale  
University Press, London, 1923.
- [18] HARAUX, A., *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Masson, Paris,  
1991.

## Bibliographie

---

- [19] KRALL, A. M. AND PAYRE, G. , *Asymptotic Stability of the Euler-Bernoulli Beam with Boundary Control*, Journal of mathematical analysis and applications, Vol. 137, pp. 288-295, 1989.
- [20] LEE, S. W. R. AND LI, H. L., *Development and characterization of a rotary motor driven by anisotropic piezoelectric composite*, Smart Materials Structures, Vol. 7, pp. 327-336, 1998.
- [21] LAOUSY, H., *Sur quelques problèmes de stabilisation de systèmes à paramètres distribués*, Thèse de Doctorat, Université de Metz, France, 1997.
- [22] LI, X. F., TANG, G. J., AND XI, L. Y., *Vibration of a Rayleigh cantilever beam with axial force and tip mass*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 80, n<sup>o</sup> 2, pp. 15-22, 2013.
- [23] LIONS, J.L. AND MAGENES, E., *Problèmes aux limites non homogènes et Applications*, Vol. 1, Dunod, 1968.
- [24] LUO, Z. H. , *Direct strain feedback control of flexible robot arms : new theoretical and experimental results*, Automatic Control, IEEE Transactions on vol. 38, n<sup>o</sup> 11, pp. 1610-1622, 1993.
- [25] LUO, Z.H., GUO, B.Z. AND MORGUL, Ö., *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*, Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, 1999.
- [26] MARTINEZ, C. AND SANZ, M., *The theory of fractional powers of operators*, North-Holland, New York, 2001.
- [27] MANCEAU, D., *Résolution pratique des équations aux dérivées partielles*.
- [28] MENSAH, PATRICE, E., *On the numerical approximation of the spectrum of a flexible Euler-Bernoulli beam with a force control in velocity and a moment control in rotating velocity*, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), Vol. 126, n<sup>o</sup> 1, pp. 13-31, 2020.

## Bibliographie

---

- [29] MCKAY, M. D., *Evaluating prediction uncertainty*, Technical Report NUREG/CR-6311, US Nuclear Regulator Commission and Los Alamos National Laboratory, New Mexico, NM, USA, 1995
- [30] MILETIC, M. AND ARNOLD, A., *A piezoelectric Euler-Bernoulli beam with dynamic boundary control : Stability and dissipative FEM*, Acta Applicandae Mathematicae, 2015.
- [31] MILETIC, M. AND DOMINIK, S. AND ARNOLD, A., *An Euler-Bernoulli beam with nonlinear damping and nonlinear spring at the tip* , Discrete and continuous dynamical systems series B, Vol 20, n<sup>o</sup> 9, pp. 3029-3055, November 2015.
- [32] MOLER, C. B. AND STEWART, G. W., *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 10, pp. 241-256, 1973.
- [33] NICAISE, S., *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*, Dunod, Paris, 2000.
- [34] PAZY, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [35] RIESZ, F. AND NAGY, B. SZ, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Akad. Kiado, Budapest, 1952.
- [36] RIDEAU, P., *Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs actionneurs ponctuels : étude du spectre du système*, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines, Paris, Sophia-Antipolis, 1985.
- [37] SHKALIKOV, A., *Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in boundary conditions*, Journal of Soviet Mathematics, Vol. 33, pp. 1311-1342, 1986.
- [38] SOPSAKIS, P. , *The Real of Linear State Space Control Systems*, <http://users.ntua.gr/chvng/en>, 2011.
- [39] STONE, M. H., *Linear transformations in Hilbert spaces and their applications to analysis*, Amer. Maths. Soc. Coll. Publ., Vol 15, 1932.

## Bibliographie

---

- [40] TAO, L.-J., WANG, W.-P., ZHANG, B., LI, W.-B., AND XU, Y.-J. , *Steady vibration of the double Euler-Bernoulli beam system under a moving load with uniform velocity*, In ICETCE 12 Proceedings of the 2012 Second International Conference on Electric Technology and Civil Engineering, IEEE, pp. 2623–2626, 2012.
- [41] TEMAM, R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, Vol. 68, 1988.
- [42] TZIN WANG, *A Hermite cubic immersed finite element space for beam design problems*, Phd Thesis, Blacksburg, Virginia, 2005.
- [43] YOSIDA, K., *Functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [44] YOSIDA, K., *Functional analysis*, Grundleheren B.123, Springer, Berlin, 1965.
- [45] YOUNG, R. M., *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York, 1980.